

Séparation d'un mélange sous-déterminé de sources par simulation stochastique

Éric LE CARPENTIER

Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes
IRCCyN - 1, rue de la Noë - BP 92 101 - 44321 Nantes CEDEX 03
Eric.Le-Carpentier@ircryn.ec-nantes.fr

Résumé – Nous proposons dans cet article un algorithme de Gibbs pour l'identification, la séparation et la déconvolution d'un mélange mono-capteur de sources i.i.d. mutuellement indépendantes régies par une loi de Bernoulli-Gauss, et filtrées linéairement. Il s'agit d'une étude préparatoire, l'objectif à moyen-terme étant l'analyse des signaux électromyographiques pour le diagnostic des pathologies neuro-musculaires. L'extension au cas multi-capteur (mélange convolutif) est immédiate.

Abstract – This paper deals with the derivation of a Gibbs algorithm for mixture separation and deconvolution, when the observed signal is a sum of linear filtering of mutually independent Bernoulli-Gauss i.i.d. sequences. This is a first step towards electromyographic signals analysis, for automatic diagnosis purpose. The extension to multi-sensors case is straightforward.

1 Introduction

Soit un signal scalaire à temps discret $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modélisable de la façon suivante : pour tout instant n :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=1}^s (h^{(i)} * x^{(i)})_n + w_n \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{d=0}^{\ell} h_d^{(i)} x_{n-d}^{(i)} + w_n \end{aligned}$$

où les $x^{(i)}$, $1 \leq i \leq s$ sont des séquences aléatoires i.i.d. mutuellement indépendantes et suivant une loi de Bernoulli-Gauss, les $h^{(i)}$ sont des réponses impulsionnelles de longueur finie $\ell + 1$, et telles que $h_0^{(i)} = 1$, $*$ dénote le produit de convolution, et w est un bruit additif gaussien, indépendant des $x^{(i)}$.

Ce modèle est apte à représenter, par exemple, des signaux biomédicaux de type électromyographiques [1]. Ces signaux sont constitués d'une superposition d'ondelettes élémentaires, les potentiels d'unité motrice, se propageant le long des muscles. La forme de ces ondelettes correspond aux réponses impulsionnelles $h^{(i)}$, et les paramètres de la loi de Bernoulli-Gauss renseignent sur la probabilité d'apparition de telles ondelettes. Ces divers paramètres peuvent être utilisés pour caractériser et diagnostiquer certaines pathologies neuromusculaires.

L'objectif est donc l'estimation des réponses impulsionnelles et des paramètres des lois de probabilité (identification), ainsi que la reconstruction des séquences $x^{(i)}$ (séparation et déconvolution), à partir d'un enregistrement de longueur finie $y_{1:N} = (y_n)_{1 \leq n \leq N}$.

Un problème analogue a été traité par Sénécal et Amblard, dans le cas d'un mélange instantané et déterminé de sources discrètes [2]. Dans le contexte convolutif, Cheng *et al.* propose une méthode de déconvolution de signaux sismiques, dans un cas mono-source [3]. Dans les deux cas,

une approche de simulation bayésienne par MCMC est proposée [4]. Nous proposons dans cet article d'étendre les résultats de Cheng au contexte multi-source mono-capteur.

2 Approche bayésienne

Soit θ l'ensemble des paramètres à estimer, et soit $\rho : \theta \mapsto \rho(\theta)$ la densité de θ conditionnellement à l'observation $y_{1:N}$. L'estimateur de l'espérance *a posteriori* s'écrit :

$$\hat{\theta} = \mathcal{E} \{ \theta | y_{1:N} \} \quad (1)$$

$$= \int \theta \rho(\theta) d\theta \quad (2)$$

où $\mathcal{E} \{ \}$ désigne l'espérance mathématique. Nous approchons cet estimateur par Monte-Carlo, en tirant T valeurs de θ suivant la loi de densité ρ .

$$\hat{\theta} \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \theta^{(t)} \quad (3)$$

Pour effectuer cette opération, nous utilisons un algorithme de Gibbs, qui consiste, lorsque le vecteur paramètre θ est scindé sous la forme $(\theta_1, \dots, \theta_d)$, à tirer récursivement chaque sous-paramètre θ_k conditionnellement à $(\theta_\ell)_{\ell \neq k}$. En pratique, il s'agit d'exprimer préalablement la densité ρ , puis d'isoler pour chaque k les termes dépendant de θ_k , les autres paramètres étant fixés. Par la règle de Bayes, on obtient ρ par la formule :

$$\rho(\theta) = p(\theta | y_{1:N}) \propto p(y_{1:N} | \theta) p(\theta) \quad (4)$$

Il faut donc exprimer la densité de la mesure conditionnellement aux paramètres, ainsi que les *a priori* sur ces paramètres.

3 Formalisation

Posons $g(\cdot, V)$ la densité de la loi de Gauss centrée de variance-covariance V . La densité des sources s'écrit alors, pour tout n et pour tout i , en notant $\lambda_1^{(i)}$ le coefficient de mélange pour la i^e source :

$$p(x_n^{(i)} | \lambda_1^{(i)} \mu^{(i)} \nu^{(i)}) = \sum_{k=0}^1 \lambda_k^{(i)} g(x_n^{(i)} - \mu_k^{(i)}, \nu_k^{(i)}) \quad (5)$$

avec :

$$\lambda_0^{(i)} = 1 - \lambda_1^{(i)} \quad \text{et} \quad \mu_0^{(i)} = \sqrt{\nu_0^{(i)}} = 0 \quad (6)$$

Et la densité du bruit additif s'écrit, si r est sa variance :

$$p(w_n | r) = g(w_n, r) \quad (7)$$

Pour mener à bien les calculs, il est préférable de procéder à une augmentation de variable, en marquant les $(x_n^{(i)})$ par la composante $k_n^{(i)} \in \{0, 1\}$ suivant laquelle $x_n^{(i)}$ a été tirée. La loi des variables marquées s'écrit donc :

$$p(x_n^{(i)} k_n^{(i)} | \mu_1^{(i)} \nu_1^{(i)} \lambda_1^{(i)}) = \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} g(x_n^{(i)} - \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)}) \quad (8)$$

Le vecteur des paramètres à estimer vaut donc :

$$\theta = ((x_n^{(1:s)})_n, (k_n^{(1:s)})_n, h^{(1:s)}, r, \mu_1^{(1:s)}, \nu_1^{(1:s)}, \lambda_1^{(1:s)}) \quad (9)$$

avec n variant de $1 - \ell$ à N , pour éviter toute troncature, comme le montre plus bas la formule 12.

La loi suivant laquelle il faudra tirer les paramètres s'écrit, en l'absence de tout *a priori* sur $\mu_1^{(1:s)}, \nu_1^{(1:s)}, \lambda_1^{(1:s)}$:

$$\rho(\theta) \propto p(y_{1:N} | \theta) p(\theta) \quad (10)$$

$$\propto p(y_{1:N} | (x_n^{(1:s)})_n, (k_n^{(1:s)})_n, h^{(1:s)}, r) \times p((x_n^{(1:s)})_n, (k_n^{(1:s)})_n | \mu_1^{(1:s)}, \nu_1^{(1:s)}, \lambda_1^{(1:s)}) \quad (11)$$

Posons :

$$\epsilon_n = y_n - \sum_{i=1}^s \sum_{d=0}^{\ell} h_d^{(i)} x_{n-d}^{(i)} \quad (12)$$

Comme fait classiquement en filtrage linéaire, on obtient facilement que le premier terme de l'équation 11 s'écrit :

$$p(y_{1:N} | (x_n^{(1:s)})_n, (k_n^{(1:s)})_n, h^{(1:s)}, r) \quad (13)$$

$$= \prod_{n=1}^N p_{w_n | r}(\epsilon_n) \quad (14)$$

$$= \prod_{n=1}^N g(\epsilon_n, r) \quad (15)$$

D'autre part, en tirant parti de la mutuelle indépendance des sources, et de leur caractère i.i.d.

$$p((x_n^{(1:s)})_n, (k_n^{(1:s)})_n | \mu_1^{(1:s)}, \nu_1^{(1:s)}, \lambda_1^{(1:s)}) \quad (16)$$

$$= \prod_{i=1}^s \prod_{n=1-\ell}^N p(x_n^{(i)}, k_n^{(i)} | \mu_1^{(i)}, \nu_1^{(i)}, \lambda_1^{(i)}) \quad (17)$$

$$= \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} g(x_n^{(i)} - \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)}) \quad (18)$$

On obtient finalement :

$$\rho(\theta) \propto \prod_{n=1}^N g(\epsilon_n, r) \times \prod_{i=1}^s \prod_{n=1-\ell}^N \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} g(x_n^{(i)} - \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)}) \quad (19)$$

4 Lois conditionnelles

Le calcul des densités conditionnelles consiste alors à exhiber, dans la formule 19, les termes dépendant de chaque paramètre, les autres étant fixés.

4.1 Paramètres de mélange $\lambda_1^{(i)}$

En isolant les termes de la formule 19 dépendant de $\lambda_1^{(i)}$, on obtient (les produits et sommes sur n portent sur l'intervalle $\{1 - \ell, \dots, N\}$) :

$$\rho(\lambda_1^{(i)} | \text{reste}) \propto \prod_n \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} \quad (20)$$

$$\propto (1 - \lambda_1^{(i)})^{N + \ell - \sum_n k_n^{(i)}} (\lambda_1^{(i)})^{\sum_n k_n^{(i)}} \quad (21)$$

Il faut donc tirer $\lambda_1^{(i)}$ suivant une loi beta, soit $\mathcal{Be}(\sum_n k_n^{(i)} + 1, N + \ell - \sum_n k_n^{(i)} + 1)$.

4.2 Moyennes $\mu_1^{(i)}$

En isolant les termes de la formule 19 dépendant de $\mu_1^{(i)}$, on obtient (les produits et sommes sur n portent sur l'intervalle $\{1 - \ell, \dots, N\}$) :

$$\rho(\mu_1^{(i)} | \text{reste}) \propto \prod_{k_n^{(i)}=1}^N g(x_n^{(i)} - \mu_1^{(i)}, \nu_1^{(i)}) \quad (22)$$

$$\propto \exp \left[-\frac{1}{2\nu_1^{(i)}} \sum_n k_n^{(i)} (x_n^{(i)} - \mu_1^{(i)})^2 \right] \quad (23)$$

$$\propto \exp \left[-\frac{\sum_n k_n^{(i)}}{2\nu_1^{(i)}} \left(\mu_1^{(i)} - \frac{\sum_n k_n^{(i)} x_n^{(i)}}{\sum_n k_n^{(i)}} \right)^2 \right] \quad (24)$$

Il faut donc tirer $\mu_1^{(i)}$ suivant une loi normale, soit

$$\mathcal{N} \left(\frac{\sum_n k_n^{(i)} x_n^{(i)}}{\sum_n k_n^{(i)}}, \frac{\nu_1^{(i)}}{\sum_n k_n^{(i)}} \right).$$

4.3 Variances $\nu_1^{(i)}$

En isolant les termes de la formule 19 dépendant de $\nu_1^{(i)}$, on obtient (les produits et sommes sur n portent sur l'intervalle $\{1 - \ell, \dots, N\}$) :

$$\rho(\nu_1^{(i)} | \text{reste}) \propto \prod_{k_n^{(i)}=1}^N g(x_n^{(i)} - \mu_1^{(i)}, \nu_1^{(i)}) \quad (25)$$

$$\propto \frac{1}{\nu_1^{\frac{1}{2} \sum_n k_n^{(i)}}} \exp \left[-\frac{1}{2\nu_1^{(i)}} \sum_n k_n^{(i)} (x_n^{(i)} - \mu_1^{(i)})^2 \right] \quad (26)$$

Il faut donc tirer $\nu_1^{(i)}$ suivant une loi gamma inverse, soit $\mathcal{IG} \left(\frac{1}{2} \sum_n k_n^{(i)} - 1, \frac{1}{2} \sum_n k_n^{(i)} (x_n^{(i)} - \mu_1^{(i)})^2 \right)$.

4.4 Variance r

En isolant les termes de la formule 19 dépendant de r , on obtient (les produits et sommes sur n portent sur

l'intervalle $\{1, \dots, N\}$:

$$\rho(r|\text{reste}) \propto \prod_n g(\epsilon_n, r) \quad (27)$$

$$\propto \frac{1}{r^{\frac{N}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2r} \sum_n \epsilon_n^2 \right] \quad (28)$$

Il faut donc tirer r suivant une loi gamma inverse, soit $\mathcal{IG}(\frac{N}{2} - 1, \frac{1}{2} \sum_n \epsilon_n^2)$.

4.5 Réponses impulsionnelles $h^{(i)}$

Définissons les vecteurs suivants :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} \quad x^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_N^{(i)} \end{bmatrix} \quad h^{(i)} = \begin{bmatrix} h_1^{(i)} \\ \vdots \\ h_\ell^{(i)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ainsi que les matrices Toeplitz circulantes suivantes :

$$\mathcal{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_0^{(i)} & \dots & x_{1-\ell}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x_0^{(i)} \\ x_{N-1}^{(i)} & \dots & x_{N-\ell}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

L'équation 12 peut alors s'écrire sous forme vectorielle :

$$\epsilon = y - \sum_j x^{(j)} - \sum_j \mathcal{X}^{(j)} h^{(j)} \quad (31)$$

$$= y - \underbrace{\sum_j x^{(j)} - \sum_{j \neq i} \mathcal{X}^{(j)} h^{(j)}}_{\tilde{\epsilon}^{(i)}} - \mathcal{X}^{(i)} h^{(i)} \quad (32)$$

Le terme $\tilde{\epsilon}^{(i)}$ ne dépend pas de $h^{(i)}$. En isolant, dans la formule 19, les termes dépendant de $h^{(i)}$, on obtient :

$$\rho(h^{(i)}|\text{reste}) \propto \prod_n g(\epsilon_n, r) \quad (33)$$

$$\propto \exp \left[-\frac{1}{2r} \sum_n \epsilon_n^2 \right] \quad (34)$$

$$\propto \exp \left[-\frac{1}{2r} \epsilon^T \epsilon \right] \quad (35)$$

$$\propto \exp \left[-\frac{1}{2r} (\tilde{\epsilon}^{(i)} - \mathcal{X}^{(i)} h^{(i)})^T (\tilde{\epsilon}^{(i)} - \mathcal{X}^{(i)} h^{(i)}) \right] \quad (36)$$

En faisant apparaître les carrés nécessaires, on obtient que $h^{(i)}$ doit être tiré suivant une loi normale, soit $\mathcal{N} \left((\mathcal{X}^{(i)T} \mathcal{X}^{(i)})^{-1} \mathcal{X}^{(i)T} \tilde{\epsilon}^{(i)}, r (\mathcal{X}^{(i)T} \mathcal{X}^{(i)})^{-1} \right)$

4.6 Entrées marquées $(x_n^{(i)}, k_n^{(i)})$

Rappelons que n doit varier ici de $1 - \ell$ à N . Définissons, en complément des vecteurs définis en 29, les vecteurs suivants, à $N + \ell$ lignes :

$$\bar{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{1-\ell}^{(i)} \\ \vdots \\ x_N^{(i)} \end{bmatrix} \quad (37)$$

ainsi que les matrices Toeplitz circulantes suivantes, à N lignes :

$$\mathcal{H}^{(i)} = \begin{bmatrix} h_p^{(i)} & \dots & 1 & 0 \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & h_p^{(i)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

En outre, nous noterons $\mathcal{H}_n^{(i)}$ la n^e colonne de $\mathcal{H}^{(i)}$. L'équation 12 peut alors s'écrire sous la nouvelle forme vectorielle :

$$\epsilon = y - \sum_j \mathcal{H}^{(j)} \bar{x}^{(j)} \quad (39)$$

$$= y - \sum_{j \neq i} \mathcal{H}^{(j)} \bar{x}^{(j)} - \mathcal{H}^{(i)} \bar{x}^{(i)} \quad (40)$$

$$= y - \underbrace{\sum_{j \neq i} \mathcal{H}^{(j)} \bar{x}^{(j)} - \sum_{m \neq n} \mathcal{H}_m^{(i)} x_m^{(i)} - \mathcal{H}_n^{(i)} x_n^{(i)}}_{\tilde{\epsilon}^{(i)}} \quad (41)$$

Le terme $\tilde{\epsilon}^{(i)}$ ne dépend pas de $x_n^{(i)}$ et $k_n^{(i)}$. En isolant, dans la formule 19, les termes dépendant de $x_n^{(i)}$ et $k_n^{(i)}$, on obtient :

$$\rho(x_n^{(i)}, k_n^{(i)}|\text{reste}) \quad (42)$$

$$\propto \prod_{m=1}^N g(\epsilon_m, r) g(x_n^{(i)} - \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)}) \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} \quad (43)$$

$$\propto g(\epsilon, r I_N) g(x_n^{(i)} - \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)}) \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} \quad (44)$$

$$\propto g(\tilde{\epsilon}^{(i)} - \mathcal{H}_n^{(i)} x_n^{(i)}, r I_N) g(x_n^{(i)} - \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)}) \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} \quad (45)$$

En faisant apparaître les carrés nécessaires, le premier terme conduit à la densité de la loi de Gauss de moyenne $\bar{\mu}_n^{(i)}$ et de variance $\bar{\nu}_n^{(i)}$ par rapport à $x_n^{(i)}$, définies par :

$$\bar{\mu}_n^{(i)} = \frac{\mathcal{H}_n^{(i)T} \tilde{\epsilon}^{(i)}}{\mathcal{H}_n^{(i)T} \mathcal{H}_n^{(i)}} \quad \bar{\nu}_n^{(i)} = \frac{r}{\mathcal{H}_n^{(i)T} \mathcal{H}_n^{(i)}} \quad (46)$$

La densité conditionnelle s'écrit donc, en utilisant les règles de produit de densités de Gauss :

$$\rho(x_n^{(i)}, k_n^{(i)}|\text{reste}) \quad (47)$$

$$\propto g(x_n^{(i)} - \bar{\mu}_n^{(i)}, \bar{\nu}_n^{(i)}) g(x_n^{(i)} - \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)}) \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)} \quad (48)$$

$$\propto g \left(x_n^{(i)} - \frac{\bar{\nu}_n^{(i)} \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)} + \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} \bar{\mu}_n^{(i)}}{\nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} + \bar{\nu}_n^{(i)}}, \frac{\nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} \bar{\nu}_n^{(i)}}{\nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} + \bar{\nu}_n^{(i)}} \right) \times \underbrace{g(\mu_{k_n^{(i)}}^{(i)} - \bar{\mu}_n^{(i)}, \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} + \bar{\nu}_n^{(i)}) \lambda_{k_n^{(i)}}^{(i)}}_{\bar{\lambda}_{k_n^{(i)}}^{(i)}} \quad (49)$$

L'étiquette $k_n^{(i)}$ doit donc prendre la valeur 1 avec la probabilité $\frac{\bar{\lambda}_1^{(i)}}{\bar{\lambda}_0^{(i)} + \bar{\lambda}_1^{(i)}}$, 0 avec la probabilité $\frac{\bar{\lambda}_0^{(i)}}{\bar{\lambda}_0^{(i)} + \bar{\lambda}_1^{(i)}}$. $x_n^{(i)}$ est ensuite tirée suivant une loi normale, soit

$\mathcal{N} \left(\frac{\bar{\nu}_n^{(i)} \mu_{k_n^{(i)}}^{(i)} + \nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} \bar{\mu}_n^{(i)}}{\nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} + \bar{\nu}_n^{(i)}}, \frac{\nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} \bar{\nu}_n^{(i)}}{\nu_{k_n^{(i)}}^{(i)} + \bar{\nu}_n^{(i)}} \right)$. On constate immédiatement que dans le cas Bernoulli-gaussien, si $k_n^{(i)}$ prend la valeur 0, $x_n^{(i)}$ est obligatoirement nul.

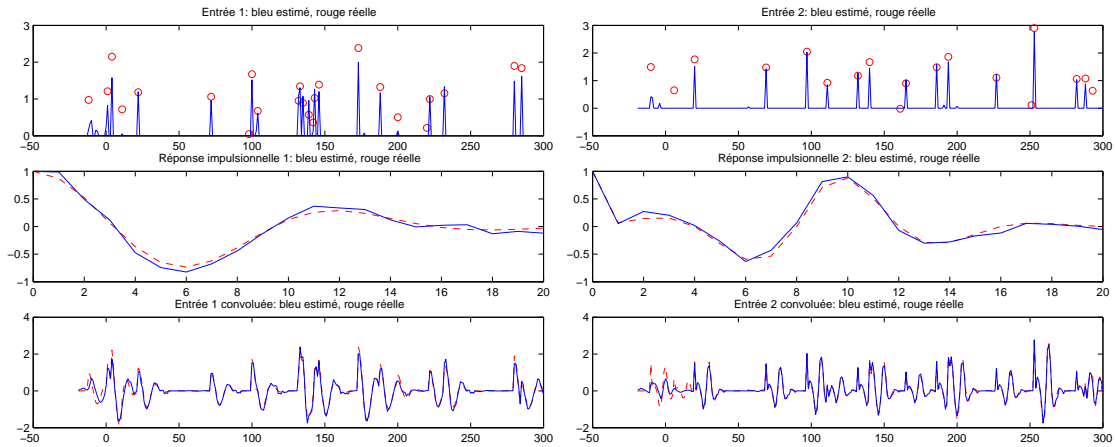


FIG. 1 – Deux entrées de Bernoulli-Gauss, une sortie, bruit 5dB

5 Simulations

Sur la figure 1, sont représentées les résultats dans le cas de 2 sources bernoulli-gaussiennes, dans le cas où les ondelettes $h^{(i)}$ sont de longueur $\ell = 20$. Sont tracées, pour chaque source i , la séquence $x^{(i)}$, l'ondelette $h^{(i)}$, et le filtrage $h^{(i)} * x^{(i)}$, dans leurs versions simulée (o ou pointillé) et reconstruite (trait plein).

	Simulé	Estimé
Bruit	$\sqrt{r} = 0.0489$	$\sqrt{r} = 0.0546$
Entrée 1	$\lambda = 0.0750$	$\lambda = 0.0638$
	$\mu_1 = 1.105$	$\mu_1 = 1.178$
	$\nu_1 = 0.346$	$\nu_1 = 0.231$
Entrée 2	$\lambda = 0.0562$	$\lambda = 0.0546$
	$\mu_1 = 1.237$	$\mu_1 = 1.233$
	$\nu_1 = 0.490$	$\nu_1 = 0.637$

6 Conclusion et perspectives

Les résultats en simulation semble démontrer la faisabilité d'une approche de type MCMC pour la séparation de sources bernoulli-gaussiennes filtrées linéairement, pour lesquelles on ne dispose que d'un seul mélange. Les résultats peuvent s'étendre au cas multi-sortie (sous-déterminé ou non) dans le cadre des mélanges convolutifs. L'extension au cas de filtres à réponse impulsionnelle infinie, voire à non minimum de phase (en utilisant la formalisation générale des modèles ARMA [5]), est envisagée. En ce qui concerne les signaux électromyographiques, il est nécessaire de compliquer le modèle, car l'hypothèse de sources indépendantes s'avère abusive ; il est en effet nécessaire de prendre en compte un temps de latence entre les instants de mise à feu de chaque source ; l'implantation implique alors une modification de l'algorithme décrit ci-dessus, qui devra réaliser une mise à jour de type Metropolis-Hastings.

Remerciements

Je tiens à remercier Nicolas BOURDAUD, pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée lors de son stage de DEA à l'IRC-CyN, en 2004.

Références

- [1] C.J. De Luca. Physiology and Mathematics of Myoelectric Signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 26(6) :313–325, juin 1979.
- [2] S. Sénécal et P.O. Amblard. Séparation de sources par méthodes de simulation. *18^e colloque GRETSI*, volume 2, pages 319–322, Toulouse, France, septembre 2001.
- [3] Q. Cheng, R. Chen, et T.H. Li. Simultaneous wavelet estimation and deconvolution of reflection seismic signals. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, 34(2) :377–384, mars 1996.
- [4] C.P. Robert. *The bayesian Choice*. Springer, 2001.
- [5] O. Shalvi et E. Weinstein. Maximum likelihood and lower bounds in system identification with non-gaussian inputs. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 40(2) :328–339, 1994.