

Séparation aveugle de signaux de type DS-CDMA à l'aide de techniques algébriques

Joséphine CASTAING, Lieven DE LATHAUWER

ETIS, UMR 8051 (CNRS, ENSEA, UCP)
6, avenue du Ponceau, BP 44, F 95014 Cergy-Pontoise Cedex, France
castaing@ensea.fr, delathau@ensea.fr

Résumé – Nous avons établi une nouvelle borne sur le nombre d'utilisateurs dans une cellule beaucoup moins contraignante que la borne actuelle. Nous proposons un algorithme pour résoudre le problème de l'extraction de signaux CDMA qui s'appuie sur la résolution d'un système de matrices à diagonaliser conjointement. Par ailleurs, dans le cas où les symboles d'information appartiennent à une constellation circulaire, nous avons constaté qu'il était possible de combiner la structure des données CDMA avec la propriété du module constant. Nous avons développé deux techniques à cet effet.

Abstract – We established a new, more relaxed bound on the number of users in a cell. We propose an algorithm to solve the problem of blind extraction of DS-CDMA signals. This algorithm is based on a joint diagonalisation problem. Furthermore, in the case where the transmitted symbols belong to a circular constellation, it is possible to combine the CDMA structure with the constant modulus property. We developed two algorithms with this aim.

1 Introduction

Dans la troisième génération de téléphones mobiles, on utilise la solution d'étalement de spectre par codage DS-CDMA (Direct Sequence Code Division Multiple Access) afin de séparer les utilisateurs. De cette manière, tous les utilisateurs communiquent en même temps et dans la même bande de fréquence. D'autre part, cette technique possède l'avantage d'être robuste à un éventuel éblouissement. Nous nous plaçons dans le cadre particulier de l'extraction aveugle. L'objectif est d'extraire les signaux émis par les différents utilisateurs sans connaissance préalable sur ces signaux, les codes d'étalement ou les canaux. Pour cela, nous nous appuyons sur la structure algébrique très particulière des signaux reçus. Cette méthode a l'avantage de fonctionner sans exploiter les propriétés statistiques des signaux, c'est-à-dire par exemple dans une situation où les signaux émis sont courts, s'ils ne sont pas indépendants, ou encore si les canaux varient rapidement dans le temps.

2 Formulation du problème

Nous supposons que R utilisateurs émettent des séquences d'information de longueur K . Ces signaux sont étalés à l'aide de codes d'étalement de facteur d'étalement J . Le signal émis par un utilisateur r à l'instant $kJ + j$ s'écrit comme le produit du k ème symbole d'information s_{kr} et du j ème symbole de sa séquence d'étalement h_{jr} :

$$x_{kj,r} = s_{kr}h_{jr}. \quad (1)$$

Les signaux émis sont reçus sur un réseau de I antennes. Nous supposons que le mélange produit par le canal est linéaire et

instantané, le signal reçu par l'antenne i à l'instant $kJ + j$ s'écrit par conséquent comme une combinaison linéaire des signaux émis :

$$y_{ijk} = \sum_{r=1}^R a_{ir}x_{kj,r} = \sum_{r=1}^R a_{ir}s_{kr}h_{jr} \quad (2)$$

Ecrivons cette équation sous forme tensorielle : on peut regarder l'élément y_{ijk} comme l'élément d'indice ijk d'un tenseur \mathcal{Y} d'ordre 3 et de taille $I \times J \times K$. \mathcal{Y} s'écrit alors :

$$\mathcal{Y} = \sum_{r=1}^R A_r \circ H_r \circ S_r \quad (3)$$

Où A_r , H_r , S_r désignent les vecteurs contenant la séquence d'étalement, les coefficients du canal et les symboles d'information correspondant à l'utilisateur r . L'opérateur \circ désigne le produit externe. On appelle la décomposition (3) d'un tenseur de rang R en une somme de tenseurs de rang 1 (c'est-à-dire s'écrivant comme un produit externe de vecteurs) décomposition PARAFAC (Parallel Factor Analysis) ou encore CANDECOP (Canonical Decomposition) [1, 2, 4]. Son utilisation pour résoudre le problème de l'extraction de données CDMA a été décrite dans [4], [3]. Les auteurs ont par ailleurs montré que cette décomposition était unique (à une matrice diagonale et une matrice de permutation près) tant que l'équation suivante était vérifiée :

$$k(\mathbf{A}) + k(\mathbf{H}) + k(\mathbf{S}) \geq 2(R + 1). \quad (4)$$

Où \mathbf{A} (resp. \mathbf{H} , resp. \mathbf{S}) désigne la matrice contenant les vecteurs A_r , pour $r \in [1, R]$ (resp. H_r , resp. S_r) et où $k(\mathbf{A})$ désigne le "rang de Kruskal" de la matrice \mathbf{A} défini comme le nombre maximal tel que toute sous-matrice de \mathbf{A} de k colonnes ait des colonnes linéairement indépendantes.

Nous avons donné une preuve constructive qu'il était possible d'extraire les signaux pour une condition moins sévère sur le nombre d'utilisateurs. Dans le cas où le nombre d'antennes et le facteur d'étalement sont inférieurs au nombre d'utilisateurs, lui même inférieur au nombre d'échantillons ($I, J \leq R \leq K$), la borne de Kruskal sur le nombre d'utilisateurs dépend linéairement du nombre d'antennes et du facteur d'étalement, nous verrons que la nouvelle borne dépend de manière quadratique de ces deux paramètres.

Pour un développement plus étendu, il est possible de se référer à [8, 10]. Ordonnons dans un premier temps les colonnes du tenseur \mathcal{Y} afin d'obtenir une expression des observations sous forme matricielle. Pour cela on extrait tout d'abord la tranche d'indice r de \mathcal{Y} dans sa troisième dimension, on range les colonnes de cette matrice les unes derrière les autres, puis on place le vecteur obtenu dans la colonne d'indice r dans la matrice \mathbf{Y} . Cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{H}) \mathbf{S}^T, \quad (5)$$

où \odot désigne le produit de Khatri-Rao encore appelé produit de Kronecker par colonnes.

Nous savons qu'il existe une autre décomposition de \mathbf{Y} , sous la forme du produit d'une matrice unitaire, d'une matrice diagonale positive et de la transposée conjuguée d'une matrice unitaire (décomposition en valeurs singulières ou svd) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^H. \quad (6)$$

Nous pouvons déduire des équations (5) et (6) qu'il existe une matrice \mathbf{F} non singulière et a priori inconnue qui vérifie :

$$\begin{cases} \mathbf{A} \odot \mathbf{H} &= \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{F} \\ \mathbf{S}^T &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{V}^H \end{cases}, \quad (7)$$

Il suffit par conséquent d'estimer la matrice \mathbf{F} pour retrouver les matrices \mathbf{A} , \mathbf{H} et \mathbf{S} recherchées. En effet, on obtient la matrice \mathbf{S} à partir de l'équation (7) de manière directe par $\mathbf{S} = \mathbf{V}^* \mathbf{F}^{-T}$. D'autre part, définissons l'opérateur $vec()$ qui transforme une matrice en un vecteur de la manière suivante : soit $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]$ une matrice de taille $M \times N$, alors $vec(\mathbf{X}) = [X_1^T, X_2^T, \dots, X_N^T]^T$. $Unvec(.)$ désigne l'opérateur inverse de $vec(.)$.

On range chaque colonne de $\mathbf{A} \odot \mathbf{H}$ dans une matrice \mathbf{N}_i de taille $R \times R$:

$$\mathbf{N}_i = unvec(A_i \otimes H_i) = H_i A_i^T$$

Cette matrice est de rang un. A un facteur d'échelle près, H_i est le vecteur singulier de gauche de \mathbf{N}_i correspondant à la plus grande valeur singulière, et A_i est le conjugué du vecteur singulier de droite correspondant à la plus grande valeur singulière.

Il s'agit maintenant d'évaluer la matrice \mathbf{F} . Nous allons pour cela utiliser la première égalité du système (7) et exploiter la structure particulière de la matrice $\mathbf{A} \odot \mathbf{H}$.

Soit \mathbf{E}_r la matrice de taille $I \times J$ obtenue en extrayant la r ème colonne de la matrice $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \mathbf{D}$ et en la réordonnant sous forme d'une matrice :

$$\mathbf{E}_r = unvec(\tilde{\mathbf{U}}_r) \quad (8)$$

On utilise l'équation (7) pour exprimer \mathbf{E}_r en fonction de \mathbf{A} , \mathbf{H} et \mathbf{F} .

$$\mathbf{E}_r = unvec(((\mathbf{A} \odot \mathbf{H}) \mathbf{F}^{-1})_r) \quad (9)$$

$$= \sum_{k=1}^R (H_k A_k^T) (\mathbf{F}^{-1})_{kr}. \quad (10)$$

Dans la suite, nous allons utiliser le théorème suivant.

Théorème 1

Soit la fonction $\Phi : (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbb{C}^{I \times J} \times \mathbb{C}^{I \times J} \mapsto \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbb{C}^{I \times J \times I \times J}$ définie par :

$(\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))_{ijkl} = x_{ij} y_{kl} + y_{ij} x_{kl} - x_{il} y_{kj} - y_{il} x_{kj}$ pour tout $(i, j, k, l) \in \mathbb{N}_I \times \mathbb{N}_J \times \mathbb{N}_I \times \mathbb{N}_J$.

Soit $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{I \times J}$, alors $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ si et seulement si le rang de \mathbf{X} est au plus un.

Preuve

Le cas $\mathbf{X} = 0$ est évident.

Soit \mathbf{X} une matrice de rang un. Il existe deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} tels que $x_{ij} = u_i v_j$. Alors $(\Phi_{xx})_{ijkl} = 2(u_i v_j u_k v_l - u_i v_l u_k v_j) = 0$.

Soit maintenant \mathbf{X} une matrice vérifiant $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$. La décomposition en valeurs singulières de \mathbf{X} est donnée par $\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} x_{ij} x_{kl} - x_{il} x_{kj} &= \sum_{r,s} \sigma_r \sigma_s u_{ir} u_{ks} (v_{jr} v_{ls} - v_{js} v_{lr})^* \\ &= \sum_{r \neq s} \sigma_r \sigma_s u_{ir} u_{ks} (v_{jr} v_{ls} - v_{js} v_{lr})^*. \end{aligned}$$

Les matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} sont unitaires, donc les tenseurs dont les éléments sont les $u_{ir} u_{ks} (v_{jr} v_{ls})^*$ et $u_{ir} u_{ks} (v_{js} v_{lr})^*$, $r \neq s$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, $\sigma_r \sigma_s = 0$ si $r \neq s$ et \mathbf{X} et $\mathbf{\Sigma}$ sont de rang un.

La fonction Φ permet de construire un ensemble de R^2 tenseurs Φ_{rs} définis par :

$$\begin{aligned} \Phi_{rs} &= \Phi(\mathbf{E}_r, \mathbf{E}_s) \\ &= \Phi \left(\sum_{p=1}^R H_p A_p^T (\mathbf{F}^{-1})_{pr}, \sum_{q=1}^R H_q A_q^T (\mathbf{F}^{-1})_{qs} \right). \end{aligned}$$

En vertu de la bilinéarité de Φ , nous pouvons écrire :

$$\Phi_{rs} = \sum_{p,q=1}^R (\mathbf{F}^{-1})_{pr} (\mathbf{F}^{-1})_{qs} \Phi(H_p A_p^T, H_q A_q^T). \quad (11)$$

Soit \mathbf{B} une matrice symétrique de taille $R \times R$ telle que :

$$\sum_{r,s=1}^R \Phi_{rs} \mathbf{B}_{rs} = 0. \quad (12)$$

En remplaçant Φ_{rs} par son expression, nous obtenons :

$$\sum_{r,s=1}^R \sum_{p,q=1}^R (\mathbf{F}^{-1})_{pr} (\mathbf{F}^{-1})_{qs} \Phi(H_p A_p^T, H_q A_q^T) \mathbf{B}_{rs} = 0.$$

D'après le théorème 1, $\Phi(H_p A_p^T, H_p A_p^T) = 0$ pour tout p in $[1, \dots, R]$, donc :

$$\sum_{r,s=1}^R \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \neq q}}^R (\mathbf{F}^{-1})_{pr} (\mathbf{F}^{-1})_{qs} \mathbf{B}_{rs} \Phi(H_p A_p^T, H_q A_q^T) = 0.$$

D'autre part, Φ and \mathbf{B} étant symétriques, nous pouvons écrire :

$$\sum_{r,s=1}^R \sum_{\substack{p,q=1 \\ p < q}}^R (\mathbf{F}^{-1})_{pr} (\mathbf{F}^{-1})_{qs} \mathbf{B}_{rs} \Phi(H_p A_p^T, H_q A_q^T) = 0. \quad (13)$$

Supposons maintenant que les tenseurs $(\Phi(H_p A_p^T, H_q A_q^T))_{p < q}$ soient linéairement indépendants. Alors nous pouvons déduire de l'équation (13) le résultat suivant :

$$\sum_{r,s=1}^R (\mathbf{F}^{-1})_{pr} (\mathbf{F}^{-1})_{qs} \mathbf{B}_{rs} = \lambda_{pq} \delta_{pq}, \quad (14)$$

où δ désigne le symbole de Kronecker ($\delta_{pq} = 1$ si $p = q$, $\delta_{pq} = 0$ sinon).

L'équation (14) peut être écrite sous forme matricielle :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}^T, \quad (15)$$

Dans cette expression, $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les λ_{pp} , $p \in [1, R]$.

Par ailleurs, toute matrice \mathbf{B} s'écrivant sous la forme $\mathbf{F} \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}^T$ avec $\mathbf{\Lambda}$ une matrice diagonale quelconque vérifie l'équation (12). Le noyau de $\mathbf{P} = [\text{vec}(\Phi_{11}), \text{vec}(\Phi_{12}), \dots, \text{vec}(\Phi_{RR})]$ contient R matrices.

La matrice \mathbf{F} peut alors être évaluée à l'aide d'une diagonalisation simultanée du système

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{F} \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{F}^T, \forall r \in [1, R], \quad (16)$$

dans lequel les matrices $\mathbf{\Lambda}_r$, $r \in [1, \dots, R]$ sont des matrices diagonales inconnues a priori.

S'il est possible d'évaluer \mathbf{F} à partir de deux équations de ce système (en effet \mathbf{F} est la matrice des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j^{-1}$, $i \neq j$), il est bien plus judicieux de choisir de conserver l'ensemble des équations et de diagonaliser conjointement toutes les matrices \mathbf{B}_r , $r \in [1, R]$. Il existe différentes manières de procéder, nous parlerons de l'algorithme des moindres carrés alternés et de l'itération de QZ étendue [7]. Cette approche est une généralisation de l'algorithme de Cardoso pour l'analyse en composantes indépendantes [10].

D'autre part, on montre que l'unicité de la matrice \mathbf{F} est assurée si le nombre d'utilisateurs R vérifie :

$$R(R-1) \leq \frac{1}{2}(I^2 - I)(J^2 - J). \quad (17)$$

Cela signifie que, si le nombre d'utilisateurs respecte cette condition, il est toujours possible d'extraire les signaux, et cela même si la borne de Kruskal (4) est dépassée.

3 Contrainte du module constant

Nous avons pu voir dans le paragraphe précédent qu'il était possible d'estimer la matrice \mathbf{F} à partir de la première équation du système (7). Une autre solution consiste à choisir d'exploiter la seconde équation. En effet, cette expression est celle d'un

problème de séparation aveugle de sources dans lequel les observations seraient contenues dans la matrice \mathbf{V}^H , et où \mathbf{F} serait la matrice de mélange. Si l'on suppose que les sources sont de module constant, un tel problème peut être résolu à l'aide de l'algorithme analytique du module constant (ACMA) décrit par Van der Veen et Paulraj dans [7]. Cet algorithme a été préféré à d'autres car il possède la particularité de mener à un problème de diagonalisation simultanée :

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{F}^{-H} \mathbf{\Omega}_r \mathbf{F}^{-1}, \forall r \in [1, R], \quad (18)$$

dans lequel les matrices $(\mathbf{M}_r)_{r \in [1, R]}$ sont obtenues à partir des données et où les matrices $(\mathbf{\Omega}_r)_{r \in [1, R]}$ sont des matrices diagonales.

Ce système est très similaire au système (16), nous proposons donc de résoudre les deux problèmes de manière conjointe :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_r &= \mathbf{F} \mathbf{\Lambda}_r \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{M}_r &= \tilde{\mathbf{F}}^{-*} \mathbf{\Omega}_r \mathbf{F}^{-1}, \forall r \in [1, R]. \end{cases} \quad (19)$$

Nous nous inspirons pour cela de l'algorithme des moindres carrés alternés ou encore de l'itération de QZ [4, 7].

4 Simulations

Nous illustrons dans cette section les performances de l'algorithme développé. Les simulations ont été réalisées pour $I=5$ antennes, un facteur d'étalement $J=4$, $K=200$ symboles QPSK, et $R=7$ utilisateurs. Dans ce cas, la borne de Kruskal est dépassée.

Sur la figure (1) nous avons représenté le Taux d'Erreurs Symbole médian en fonction du Rapport Signal sur Bruit pour l'égaliseur non aveugle MMSE, pour l'algorithme consistant à appliquer un algorithme ALS directement aux données (DALS) et pour notre algorithme utilisant une diagonalisation simultanée par itération de QZ étendue (SD-QZ). Les deux derniers algorithmes donnent des résultats équivalents.

Sur la figure (2), nous avons représenté le Taux d'Erreurs Symbole moyen. Pour un RSB supérieur à 10dB, l'algorithme DALS ne converge pas vers le minimum global dans environ 10 % des cas, ce qui explique la différence entre la courbe médiane et la courbe moyenne.

La figure (3) représente le coût de calcul nécessaire pour l'algorithme DALS et l'algorithme SD-QZ. Afin de converger avec de plus grandes chances vers l'optimum, l'algorithme DALS est initialisé à l'aide de 10 valeurs, ce qui augmente son coût de calcul. Sur la figure, on a représenté le temps de calcul nécessaire pour l'initialisation donnant la meilleure performance. D'autre part, on dispose pour l'algorithme SD-QZ d'une valeur initiale qui permet de se rapprocher rapidement du résultat.

5 Conclusion

Nous avons montré qu'il était possible d'extraire les séquences d'information d'un mélange de signaux étalés à l'aide d'un code DS-CDMA en s'appuyant sur la structure algébrique de ces signaux. L'algorithme proposé à cette fin mène à un problème de diagonalisation simultanée que l'on peut résoudre de différentes manières. Afin d'améliorer les performances, on

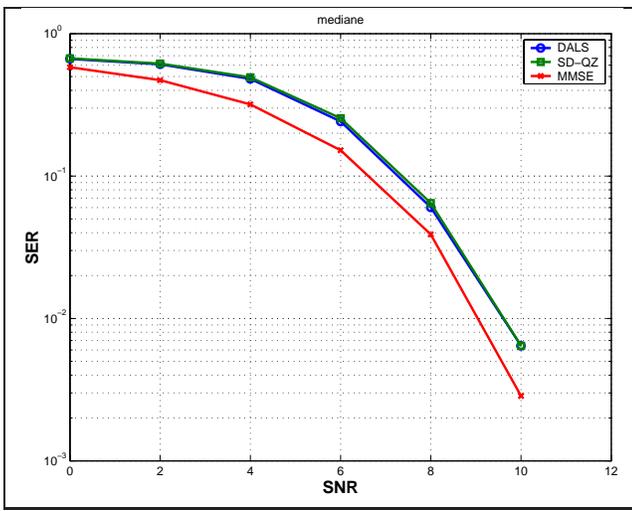


FIG. 1 – SER versus SNR pour $I=4, J=4, K=200, R=7$

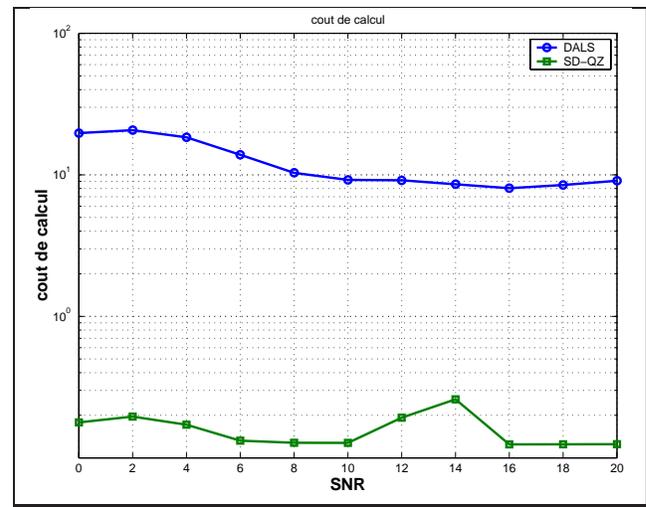


FIG. 3 – temps de calcul versus SNR pour $I=4, J=4, K=200, R=7$

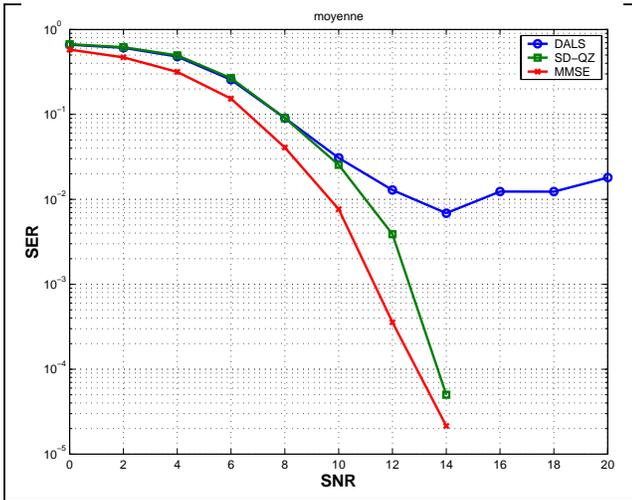


FIG. 2 – SER versus SNR pour $I=4, J=4, K=200, R=7$

peut par ailleurs combiner le système d'équations obtenu par cet algorithme avec le système d'équations obtenu en imposant la constance du module des sources. Nous avons d'autre part établi une nouvelle condition sur le nombre d'utilisateurs beaucoup moins contraignante que la condition de Kruskal.

Références

- [1] L. De Lathauwer, B. De Moor and J. Vandewalle, "Computation of the Canonical Decomposition by Means of a Simultaneous Generalized Schur Decomposition," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, Vol. 26, pp. 295–327, 2004.
- [2] R.A. Harshman and M.E. Lundy, "The PARAFAC Model for Three-Way Factor Analysis and Multidimensional Scaling," in : H.G. Law, C.W. Snyder, J.A. Hattie and R.P. McDonald (Eds.), *Research Methods for Multimode Data Analysis*, pp. 122-215. Address :Praeger, N.Y., 1984.
- [3] J.B. Kruskal, "Three-way Arrays : Rank and Uniqueness of Trilinear Decompositions, with Application to Arith-

metic Complexity and Statistics," *Lin. Alg. Appl.*, Vol. 18, pp. 95–138, 1977.

- [4] N. Sidiropoulos, G. Giannakis and R. Bro, "Blind PARAFAC Receivers for DS-CDMA systems," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 48, pp. 810–823, Mar. 2000.
- [5] N. Sidiropoulos, R. Bro and G. Giannakis, "Parallel Factor Analysis in Sensor Array Processing," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 48 (8), pp. 2377–2388, Aug. 2000.
- [6] N. Sidiropoulos and X. Liu, "Identifiability Results for Blind Beamforming in Incoherent Multipath with Small Delay Spread," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.49 (1), pp. 228–236, Jan. 2001.
- [7] A.J. van der Veen and A. Paulraj, "An Analytical Constant Modulus Algorithm," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 44 (5), pp. 1136–1155, May 1996.
- [8] L. De Lathauwer "A link between the canonical decomposition in multilinear algebra and simultaneous matrix diagonalization", *Internal Report*, ETIS Cergy France, 2004.
- [9] J-F. Cardoso, A. Souloumiac, "Blind Beamforming for Non Gaussian Signals," *IEEE-Proceedings-F*, vol.140, no6, pp. 362–370, dec. 1993.
- [10] J-F. Cardoso, "Super-symmetric decomposition of the fourth-order cumulant tensor. Blind identification of more sources than sensors," *Proc. ICASSP*, pp. 3109–3112, 1991.