

# Analyse de la convergence d'un système multi-antennes précodé itératif

Jérôme Le Masson et Charlotte Langlais  
Département Électronique, ENST-Bretagne  
Technopôle Brest-Iroise, CS 83818, 29238 Brest Cedex 3

jerome.lemasson@enst-bretagne.fr, charlotte.langlais@enst-bretagne.fr

**Résumé** – Dans ce papier, nous proposons une analyse de la convergence d'un système multi-antennes précodé avec un traitement itératif conjoint en réception. Cette analyse est basée sur un diagramme EXIT et des simulations de type Monte Carlo. Le précodage linéaire utilise une matrice de Hadamard et le système multi-antennes met en œuvre un multiplexage spatial à plusieurs antennes d'émission et de réception. On observe que le schéma d'émission/réception mis en place permet d'atteindre un gain en diversité potentiel égal au produit de la taille de la matrice de précodage par le nombre d'antennes de réception. L'analyse du diagramme EXIT met en évidence l'influence des paramètres système sur la convergence et les performances asymptotiques. Les résultats sont présentés pour une modulation de type MAQ-16 offrant ainsi une efficacité spectrale élevée.

**Abstract** – In this paper, we propose to study the convergence of a linearly precoded MIMO system with an iterative decoding. This study is based on an EXIT chart and Monte Carlo simulations. The precoding is performed by an Hadamard matrix and the MIMO system carries out a spatial multiplexing. The potential diversity gain for such a system is equal to the number of receive antennas times the size of the precoder. The EXIT chart shows the influence of the system parameters over the convergence and the asymptotical performance. Results are presented for a 16-QAM that allows an high spectral efficiency.

## 1 Introduction

L'objectif des nouveaux systèmes de communications sans fil n'est plus de combattre les évanouissements intrinsèques au canal de propagation mais plutôt de tirer parti de la diversité apportée par ces évanouissements. Les techniques de précodage linéaire, en particulier celle proposée dans [1], permettent d'exploiter la diversité temporelle et/ou fréquentielle d'un canal à évanouissements. Avec un précodage linéaire associé à un codage de canal et un récepteur itératif, il est alors possible d'atteindre un gain en diversité égal à la taille de la matrice de précodage [2]. Le principe MIMO (*Multiple Input Multiple Output*), basé sur l'utilisation d'antennes multiples en émission et en réception, permet quant à lui de tirer parti de la diversité spatiale du canal. De plus, la capacité d'un schéma d'émission multi-antennes augmente linéairement avec le nombre d'antennes, ce qui conduit à une efficacité spectrale potentielle très importante. Cette potentialité intrinsèque peut être approchée lorsque la technique MIMO est associée à des récepteurs performants faisant appel à des traitements itératifs en réception [3]. Ainsi un système constitué d'un précodage linéaire et d'un dispositif multi-antennes est susceptible de tirer parti de la diversité spatio-temporelle tout en offrant une efficacité spectrale élevée [4].

La méthode des diagrammes EXIT (*EXtrinsic Information Transfer*) permet d'analyser la convergence des processus itératifs [5]. De plus, elle aide à mettre en évidence l'influence de certains paramètres afin d'optimiser la construction du système. Dans le contexte d'un multiplexage spatial, différentes études ont été proposées, dont [6].

Dans ce papier, nous étudions un système MIMO associé à un précodage linéaire pour une modulation d'ordre élevé.

Le récepteur utilise un algorithme itératif basé sur le traitement conjoint du précodage linéaire et du multiplexage spatial. L'égaliseur est issu de travaux sur la turbo-égalisation dans le contexte d'un canal avec IES (Interférences Entre Symboles) [7]. Il est basé sur le critère MEQM (Minimum d'Erreur Quadratique Moyenne) avec information *a priori* et constitue une version approchée de la turbo-égalisation proposée dans [8]. Des systèmes MIMO précodés itératifs sont également présentés dans [9] avec un algorithme de type turbo-BLAST et dans [10] avec un détecteur de type MAP (Maximum *A Posteriori*).

Après avoir présenté l'association du système MIMO et du précodage linéaire, nous décrivons brièvement l'égaliseur MEQM avec information *a priori* dans un contexte général puis adapté à une transmission MIMO précodée. L'égaliseur effectue alors le traitement conjoint des interférences générées par le canal MIMO et par le précodage. La contribution principale du papier réside dans l'analyse de la convergence du système proposé à l'aide d'un diagramme EXIT. Ce type de diagramme permet d'illustrer l'influence du précodage sur la capacité du système à converger ainsi que sur ses performances asymptotiques.

## 2 Chaîne de transmission

### 2.1 Système d'émission

La figure 1 présente le système MIMO précodé utilisé. Les données à transmettre sont codées puis entrelacées suivant un schéma de type BICM (*Bit Interleaved Coded Modulation*). La conversion bits/symboles forme des  $q$ -uplets puis réalise le *mapping* vers la constellation de type MAQ-2<sup>q</sup>. Les symboles complexes obtenus sont alors répartis vers les  $N_e$  an-

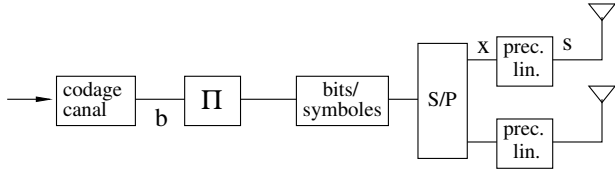


FIG. 1 – Précodage linéaire et multiplexage spatial, schéma d'émission avec  $N_e = 2$ .

tennes d'émission. Avant la transmission, chaque flux est pré-codé à l'aide d'une matrice de Hadamard de taille  $M$ . Ainsi, les données pré-codées sont étalées sur  $M$  instants de transmission distincts ce qui permet d'exploiter la diversité temporelle sur une durée de  $M$  temps symboles. Un tel schéma d'émission et ses avantages en termes de capacité sont présentés dans [11]. Dans le cas d'une transmission OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*), l'étalement peut être effectué sur les différentes sous-porteuses, exploitant ainsi la diversité fréquentielle.

## 2.2 Système de réception

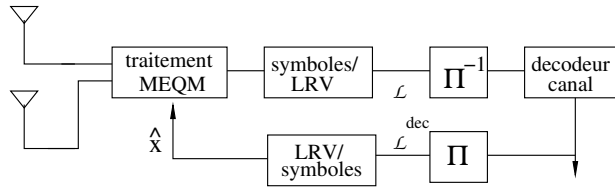


FIG. 2 – Traitement itératif conjoint en réception avec  $N_r = 2$ .

Les signaux provenant des  $N_r$  antennes de réception pendant  $M$  instants sont traités simultanément à l'aide de l'égaliseur de type MEQM décrit plus loin. Cet égaliseur utilise une information *a priori* générée par le décodeur de canal mettant ainsi en œuvre un traitement itératif. Ces informations sont échangées sous la forme de LRV (Log-Rapports de Vraisemblance) représentant la valeur et la fiabilité des informations transmises. Conformément à [12], on utilise la totalité de l'information *a posteriori* en sortie du décodeur de canal. Afin de respecter le type de données traité par chacun des deux modules, une fonction d'entrelacement et des conversions symboles-LRV sont nécessaires. Ces fonctions sont décrites dans [2].

## 2.3 Modèle de canal

Le canal de propagation considéré ici est non sélectif en fréquence et composé de sous-canaux de type Rayleigh, chacun correspondant à un couple d'antennes émission/réception. Le canal de propagation à l'instant  $t$  se représente alors sous la forme d'une matrice  $\mathbf{H}_t$  de taille  $N_e \times N_r$ . Les matrices du canal sont indépendantes à chaque instant, ce qui est alors représentatif d'un canal à évanouissements rapides ou d'un système OFDM avec entrelacement parfait. Enfin, on considère que seul le récepteur a une connaissance parfaite de  $\mathbf{H}_t$  à chaque instant.

## 3 Traitement itératif conjoint antennes-précodage

Dans cette section, nous décrivons l'égaliseur MEQM, inspiré de [7] et adapté au traitement conjoint du canal MIMO et du précodage linéaire.

### 3.1 Égaliseur MEQM avec information *a priori*

On considère tout d'abord le problème plus général du traitement du signal en sortie d'un canal à interférences par blocs. La relation qui lie l'entrée et la sortie d'un tel canal peut s'écrire

$$\mathbf{r} = \mathcal{H} \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur de symboles émis,  $\mathcal{H}$  la matrice du canal,  $\mathbf{w}$  un bruit blanc additif gaussien et  $\mathbf{r}$  le vecteur reçu.

L'égaliseur MEQM avec information *a priori* comporte une annulation d'interférences suivie d'une égalisation adaptée pour chaque itération de décodage. La sortie de l'égaliseur produit des symboles ( $\tilde{x}_k$ ) en fonction des données reçues ( $r_k$ ), de la matrice de canal  $\mathcal{H}$  et de symboles estimés ( $\hat{x}_k$ ). Les symboles ( $\hat{x}_k$ ) sont construits à partir des LRV donnés par le décodeur de canal à l'itération précédente. La sortie de l'égaliseur s'écrit

$$\tilde{x}_k = \lambda_k \mathbf{p}_k^H (\mathbf{r} - \mathcal{H} \hat{\mathbf{x}} + \hat{x}_k \mathbf{h}_k) \quad (2)$$

avec  $\mathbf{h}_k$  la colonne d'indice  $k$  de  $\mathcal{H}$  et  $\mathbf{p}_k$  la colonne d'indice  $k$  de la matrice d'égalisation  $\mathbf{P}$ . Le critère MEQM permet alors de déterminer la matrice  $\mathbf{P}$  et les  $\lambda_k$ . On a alors

$$\mathbf{p}_k = ((\sigma_x^2 - \sigma_{\hat{x}}^2) \mathcal{H} \mathcal{H}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{h}_k \quad (3)$$

et

$$\lambda_k = \frac{\sigma_x^2}{1 + \sigma_{\hat{x}}^2 \beta_k}, \quad \beta_k = \mathbf{p}_k^H \mathbf{h}_k \quad (4)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité. La variance des symboles estimés  $\sigma_{\hat{x}}^2$  est mesurée sur l'ensemble du bloc de données par

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \mathbb{E} \left\{ |\hat{x}_l|^2 \right\} \approx \frac{1}{N_b} \sum_{l=0}^{N_b-1} |\hat{x}_l|^2 \quad (5)$$

où  $N_b$  est la taille du bloc.  $\sigma_{\hat{x}}^2$  est mis à jour à chaque itération et les matrices d'égalisation sont alors recalculées.

Lors de la première itération, on a  $\sigma_{\hat{x}}^2 = 0$  et  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ . Le traitement se réduit à une égalisation linéaire MEQM classique.

D'autre part, si on suppose une estimation parfaite des symboles ( $\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_x^2$  et  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ ), l'égaliseur correspond alors un annuleur d'interférences incluant le filtre adapté au canal. On obtient alors en sortie de l'égaliseur

$$\tilde{x}_k \propto \mathbf{h}_k^H \mathbf{h}_k x_k + \mathbf{h}_k^H \mathbf{w} \quad (6)$$

Si  $L$  est la taille des  $\mathbf{h}_k$ , l'équation (6) correspond à la sortie d'un récepteur MRC (*Maximum Ratio Combining*) exploitant une diversité sur  $L$  canaux distincts. On en déduit donc que le gain en diversité maximal atteignable par ce type de système est égal à  $L$ .

Enfin, il est possible de réduire la complexité de décodage en utilisant uniquement les deux versions extrêmes de l'égaliseur : l'égaliseur MEQM linéaire pour la première itération et l'annuleur d'interférences avec filtre adapté pour les itérations suivantes. Cette version sous-optimale ne requiert des inversions de matrices que lors de la première itération de décodage.

Elle conduit cependant à une convergence plus tardive du processus itératif quand le niveau d'interférences est élevé. Ainsi, cette version est moins efficace sur le système multi-antennes précodé (cf. 4.2). Dans le contexte MIMO, ce type de récepteur, dérivé dans [3], offre de très bonnes performances pour seulement quelques itérations de décodage.

### 3.2 Adaptation au système MIMO précodé

L'égaliseur précédemment décrit peut être adapté pour traiter conjointement le précodage linéaire et le multiplexage spatial sur le canal MIMO. Pour cela, les effets conjoints du précodage et du système multi-antennes sont inclus dans  $\mathcal{H}$ . Ainsi, le précodage de taille  $M$  associé à un système à  $N_e$  antennes d'émission et  $N_r$  antennes de réception peut être représenté par une matrice  $\mathcal{H}$  de taille  $(M.N_r) \times (M.N_e)$ . On construit  $\mathcal{H}$  conformément au schéma présenté en figure 1. Soit  $\mathbf{F} = \text{diag}(\mathbf{H}_0, \dots, \mathbf{H}_{M-1})$  la matrice diagonale par blocs constituée des matrices de canal aux instants d'émission  $0, \dots, M-1$ . Soit  $\mathbf{G} = (g_{i,j})$  la matrice construite à partir de la matrice de précodage  $\mathbf{D} = (d_{i,j})$  telle que

$$g_{i,j} = \begin{cases} d_{p,s} & \text{si } q = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} p = i \text{ div } N_e & r = i \text{ mod } N_e \\ q = j \text{ div } M & s = j \text{ mod } M \end{cases} \quad (7)$$

$\mathcal{H}$  peut alors s'écrire comme le produit  $\mathbf{FG}$ . Elle vérifie  $\mathcal{H} \mathcal{H}^H = \mathbf{F} \mathbf{F}^H$  car  $\mathbf{D}$  est unitaire. Ainsi, la matrice à inverser

$$(\sigma_x^2 - \sigma_x^2) \mathcal{H} \mathcal{H}^H + \sigma_w^2 \mathbf{I} \quad (8)$$

est diagonale par blocs ce qui permet de conserver une complexité raisonnable du traitement en réception.

La complexité de l'égaliseur est indépendante de la modulation et celui-ci peut donc être mis en œuvre pour des transmissions comportant un nombre d'antennes raisonnable et une matrice de précodage de grande taille.

## 4 Analyse de la convergence

Dans cette partie, nous analysons le récepteur itératif décrit précédemment à l'aide d'un diagramme EXIT et de simulations de type Monte Carlo.

Le codage de canal utilisé est un code convolutif récursif systématique circulaire (CRSC) de longueur de contrainte  $K = 7$  et de rendement  $1/2$ . Les blocs codés sont de grande taille (4096 octets), et on utilise l'algorithme de décodage Max-Log-MAP. La modulation utilisée est une MAQ-16 avec un *mapping* de Gray. On compare un système MIMO  $4 \times 4$  seul avec un système MIMO précodé utilisant le même nombre d'antennes et une matrice de Hadamard de taille  $M = 8$ . L'efficacité spectrale des deux systèmes est donc de 8 bits/s/Hz. Les courbes asymptotiques de diversité sont obtenues en simulant un système où  $L$  répliques des symboles sont transmises sur des canaux de Rayleigh indépendants ; le récepteur comporte un traitement MRC et un codage de canal identique au système étudié. Le gain en diversité est alors égal à  $L$  (1, 4 ou 32).

### 4.1 Diagrammes EXIT

La méthode des diagrammes EXIT, proposée par ten Brink dans [5], permet de visualiser graphiquement la convergence des systèmes itératifs.

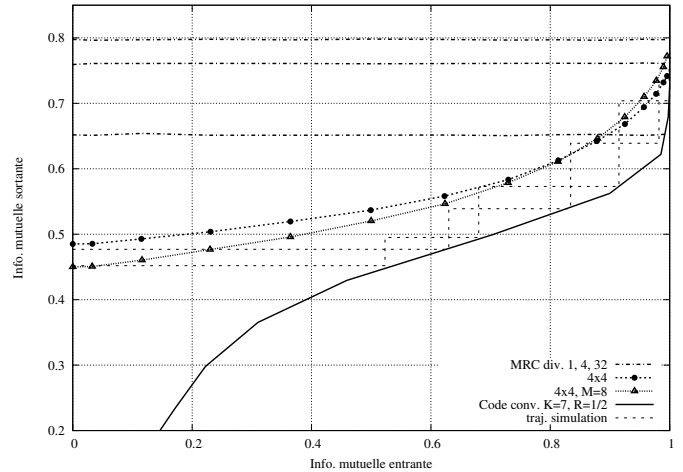


FIG. 3 – Comparaison des systèmes multi-antennes avec et sans précodage linéaire sur canal de Rayleigh,  $E_b/N_0 = 7$  dB.

Le diagramme est constitué des courbes de mesure de l'information mutuelle sortante en fonction de l'information mutuelle entrante pour chacun des composants du système itératif (ici, le décodeur de canal et l'égaliseur MEQM).

La figure 3 présente le diagramme EXIT de fonctionnement du récepteur itératif pour le système MIMO avec et sans précodage linéaire. Les courbes obtenues sont des moyennes effectuées sur un grand nombre de réalisations du canal.

Sur la partie gauche du diagramme, la courbe du système précodé se trouve au dessous de celle du système MIMO seul. Cela indique donc que l'insertion du précodage linéaire retarde la convergence pour ce type de traitement. À l'inverse, lorsque l'information mutuelle entrante tend vers 1, les courbes des deux systèmes étudiés se croisent. On en déduit que le précodage linéaire améliore les performances asymptotiques du système. Ceci est la conséquence de l'exploitation de la diversité temporelle du canal par le précodage linéaire. Les simulations confirment ce résultat.

Par ailleurs, des mesures de l'information mutuelle au cours d'une simulation de transmission sont effectuées. Les trajectoires obtenues (en pointillé sur la figure 3) ne coïncident pas exactement avec les courbes. L'explication de ce phénomène, donnée dans [6], ne remet pas en cause l'interprétation du diagramme faite ici.

### 4.2 Résultats de simulation

Les figures 4 et 5 donnent les résultats de simulation pour les systèmes MIMO sans et avec précodage linéaire. Les simulations sont effectuées avec l'égaliseur MEQM ainsi que sa version sous-optimale. On observe une convergence vers la courbe de gain en diversité 4 pour le système MIMO non précodé et vers la courbe de gain en diversité 32 pour le système MIMO précodé. Cela confirme l'effet multiplicatif de la diversité spatiale et temporelle. Le gain en diversité passe ainsi de 4 à 32 mais ne permet de gagner que 0,5 dB environ pour un TEB de  $10^{-5}$ . Enfin, pour ce système, la version sous-optimale de l'égaliseur ne permet pas de tirer efficacement parti du précodage linéaire, la convergence ayant lieu tardivement dans ce cas.

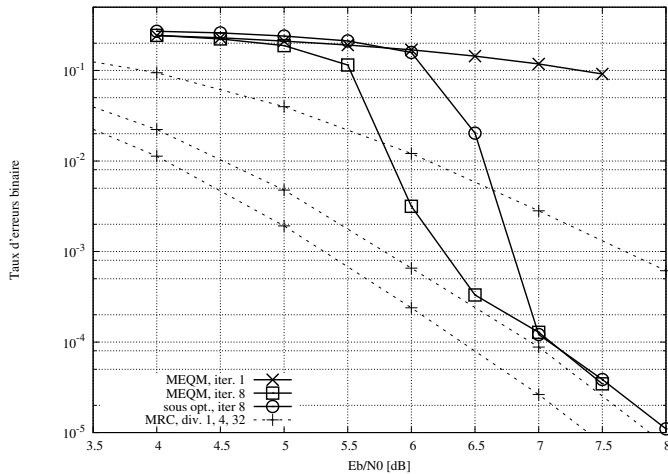


FIG. 4 – TEB du système multi-antennes  $4 \times 4$  sans précodage linéaire sur canal de Rayleigh.

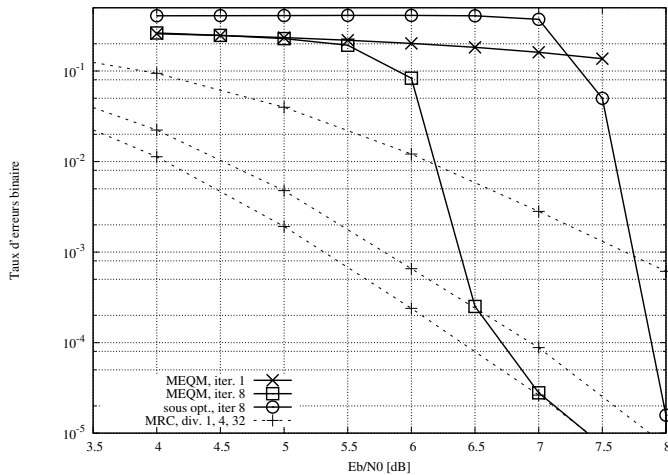


FIG. 5 – TEB du système multi-antennes  $4 \times 4$  avec précodage linéaire  $M = 8$  sur canal de Rayleigh.

## 5 Conclusion

Nous avons comparé deux systèmes multi-antennes dont l'un comporte un précodage linéaire exploitant la diversité temporelle d'un canal à évanouissement. On peut montrer, à l'aide d'un diagramme EXIT, que l'ajout du précodage linéaire provoque une convergence plus tardive du processus itératif. D'autre part, la comparaison avec un récepteur MRC exploitant la diversité sur des canaux de Rayleigh indépendants permet d'établir que les performances asymptotiques du système correspondent à un gain en diversité égal au produit du nombre d'antennes de réception par la taille du précodage. Ainsi, le schéma d'émission MIMO  $4 \times 4$  avec un précodage de taille 8 avec un traitement conjoint itératif en réception permet d'atteindre les performances d'une transmission MAQ-16 codée avec un gain en diversité de 32 (8 itérations,  $E_b/N_0 \geq 7$  dB) tout en offrant une efficacité spectrale égale à 8 bits/s/Hz.

On peut souligner que le canal utilisé ici est un modèle idéal à évanouissements rapides et que les atténuations sont parfaitement connues du récepteur. De plus, le schéma de transmission utilisé ne permet pas au précodage linéaire d'exploiter la diversité de transmission. La structure pourrait être adaptée dans le

cas de canaux statiques ou quand les variations dans le temps sont faibles. Dans le cas de l'OFDM, la question se pose alors en termes de diversité fréquentielle.

## Références

- [1] X. Ma and G. B. Giannakis, "Complex field coded MIMO systems : performance, rate, and trade-offs," *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, vol. 2, pp. 693–717, 2002.
- [2] J. Le Masson, C. Langlais, and C. Berrou, "Linear precoding with low complexity MMSE turbo-equalization and application to the wireless LAN system," in *International Conference on Communications, ICC'05*, May 2005.
- [3] M. Sellathurai and S. Haykin, "Turbo-BLAST for wireless communications : theory and experiments," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 10, pp. 2538–2546, 2002.
- [4] X. Ma and G. B. Giannakis, "Full-diversity full-rate complex-field space-time coding," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 11, pp. 2917–2930, Nov. 2003.
- [5] S. ten Brink, "Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 10, pp. 1727–1737, Oct. 2001.
- [6] C. Hermosilla and L. Szczecinski, "Exit charts for turbo receivers in MIMO systems," in *Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications*, vol. 1, July 2003, pp. 209–212.
- [7] C. Laot, R. Le Bidan, and D. Leroux, "Low complexity MMSE turbo-equalization : a possible solution for EDGE," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 3, pp. 965–974, May 2005.
- [8] M. Tüchler, A. C. Singer, and R. Koetter, "Minimum mean squared error equalization using a priori information," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 50, no. 3, pp. 673–683, March 2002.
- [9] P.-J. Bouvet, M. Héland, and V. Le Nir, "Low complexity iterative receiver for linear precoded MIMO systems," in *IEEE Eighth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, Aug. 2004, pp. 17–21.
- [10] N. Gresset, J. Boutros, and L. Brunel, "Linear precoding under iterative processing for multiple antennas channels," in *First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing*, 2004, pp. 563–566.
- [11] J. Sykora and M. Knize, "Linear diversity precoding design criterion for block-fading delay limited MIMO channel," in *Global Telecommunications Conference, GLOBECOM'04*, vol. 6, Nov. 2004, pp. 3711–3715.
- [12] F. Vogelbruch and S. Haar, "Improved soft ISI cancellation for turbo equalization using full soft output channel decoder's information," in *Global Telecommunications Conference, GLOBECOM'03*, vol. 3, Dec. 2003, pp. 1736–1740.