

# Compensation de déformations en tomographie dynamique

Laurent DESBAT<sup>1</sup>, Sébastien ROUX<sup>1,2</sup>, Pierre GRANGEAT<sup>2</sup>

<sup>1</sup>TIMC-IMAG

In3S, Faculté de Médecine, UJF, 38706, France

<sup>2</sup>LETI

CEA-DRT, 17 av. des Martyrs, 38000 Grenoble France

Laurent.Desbat@imag.fr, GRANGEAT@chartreuse.cea.fr

**Résumé** – L’objet de cette étude est la reconstruction tomographique d’objets ou d’organes qui se déforment au cours de l’acquisition des projections dans un scanner. Notre approche est celle de la compensation analytique des déformations lors de la reconstruction par adaptation des algorithmes de type FBP rapides et modernes (contexte de la reconstruction de ROI, Région d’Intérêt). Dans la thèse de Sébastien Roux, des compensations analytiques de déformations affines ont été établies. Nous proposons ici d’étendre ces résultats à des classes de déformations beaucoup plus vastes qui ne conservent que les droites de mesure (et pas nécessairement toutes les droites du plan).

**Abstract** – The framework of this paper is dynamic tomography. The measured object or organs are no-longer supposed to be static in the scanner during the acquisition but are supposed to move or to be deformed. Our approach is the analytic deformation compensation during the reconstruction by the adaptation of fast and modern FBP algorithms (adaptation of ROI [Region of Interest] FBP methods). In Roux’s PhD thesis, analytic compensations of affine deformations have been established. We propose here to extend this work on much wider deformation classes. We consider deformations preserving the integration lines of each projection acquisition (and not necessarily all the lines in the plane).

## 1 Introduction et notations

Ce travail est une contribution à la compensation des mouvements en tomographie. Ces dernières années de nombreux travaux ont été effectués sur ce sujet, principalement motivés par l’imagerie cardiaque. En effet, la reconstruction d’organes en mouvement rapide souffre de nombreux artefacts. Des méthodes de reconstruction synchronisée par l’ECG ont été proposées [3, 2]. L’ajustement de paramètres d’acquisition à la période cardiaque ainsi que l’optimisation de schémas d’échantillonnage ont aussi été proposés pour l’amélioration des images reconstruites [6].

Notre travail suit l’approche de Crawford et al [1] et Roux et al [7]. L’idée est d’introduire un modèle de déformation  $\vec{\Gamma}_t$  (supposé connu) dépendant du temps ( $t$ ) dans la reconstruction.  $\vec{\Gamma}_t$  est une bijection sur l’espace  $\mathbb{R}^2$  en  $2D+t$ . Soit  $f_t$  la fonction d’atténuation au temps  $t$ , nous supposons que  $f_t(\vec{x}) = f(\vec{\Gamma}_t(\vec{x}))$ , où  $f$  est la fonction d’atténuation de référence (par exemple à  $t = 0$ ). Ainsi  $\vec{\Gamma}_t(\vec{x})$  transforme simplement  $\vec{x}$  au temps  $t$  à sa position au temps de référence ( $t = 0$ ). Nous supposons dans toute la suite que  $\vec{\Gamma}_t$  est une déformation suffisamment régulière ainsi que son inverse.

Dans [7] la compensation de déformations est incorporée dans l’algorithme de reconstruction analytique. La méthode est exacte pour des déformations affines  $\vec{\Gamma}_t$ , dépendantes du temps d’acquisition, en tomographie  $2D+t$  parallèle et fan-beam (une généralisation en  $3D+t$  est donnée dans [5]). La méthode de reconstruction  $2D+t$  fan-beam avec compensation des déformations affines (dépendantes

du temps) de [7] est basée sur l’adaptation de celle Noo et al [4]. Elle repose sur l’idée majeure que l’espace des droites est invariant par transformation affine.

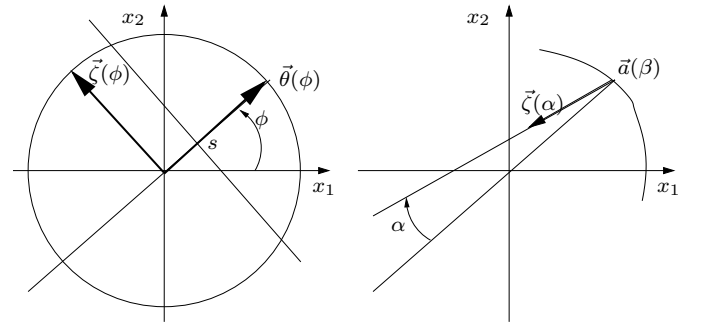


FIG. 1: paramètres de la géométrie parallèle (gauche) et fan-beam (droite)

Pour conserver les “bonnes propriétés” des formules d’inversion FBP en tomographie, il semble suffisant de ne préserver seulement la propriété suivante : les droites d’acquisitions au temps  $t$  sont transformées en droites au temps de référence  $t = 0$  par la déformation  $\vec{\Gamma}_t$ . C’est l’idée de base de ce travail. Dans la suite nous donnons nos principaux résultats obtenus pour des déformations qui préservent les droites parallèles d’acquisition (i.e., qui transforment les droites parallèles d’acquisition en droites parallèles à  $t = 0$ ), et celles qui préservent la géométrie des droites en éventail (fan-beam). Ces déformations contiennent, bien entendu, les transformations affines. Nous proposons une méthode de compensation analytique d’une sous classe de

ces déformations. Ce travail constitue une généralisation de [7] (la classe des déformations que nous savons compenser au temps  $t$  est de dimension infinie et contient la classe des déformations affines).

## 1.1 Géométrie parallèle

Nous considérons la transformée de Radon 2D d'une fonction  $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^2)$  (géométrie parallèle)

$$g_{\mathcal{P}}(\phi, s) = \mathcal{P}f(\phi, s) = \int_{\mathbb{R}} f\left(s\vec{\theta}(\phi) + l\vec{\zeta}(\phi)\right) dl,$$

où  $\phi \in [0; 2\pi[$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{\zeta}(\phi) = (-\sin \phi, \cos \phi)^t \in S^1$ , et  $\vec{\theta}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)^t \in S^1$  ( $S^1$  est le cercle unité), voir la figure 1. La fonction  $\mathcal{P}_{\phi}f$  telle que  $\mathcal{P}_{\phi}f(s) = \mathcal{P}f(\phi, s)$  est appelée projection parallèle à angle  $\phi$ . En rotation uniforme, la phase  $\phi$  est, à un changement d'échelle près, le temps  $t$ .

## 1.2 Géométrie fan-beam

La transformée en rayon divergent (ou fan-beam) de  $f$  est :

$$g_{\mathcal{D}}(\beta, \alpha) = \mathcal{D}f(\beta, \alpha) = \int_0^{+\infty} f\left(\vec{a}(\beta) + l\vec{\zeta}(\alpha)\right) dl,$$

où  $\vec{a}(\beta)$  est la position de la source,  $\beta$  est le paramètre de la trajectoire de la source (en pratique, c'est le temps  $t$ ),  $\vec{\zeta}(\alpha) \in S^1$  est la direction unitaire de la droite d'intégration passant par la source et le détecteur repéré classiquement par l'angle  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2[$ , voir la figure 1.

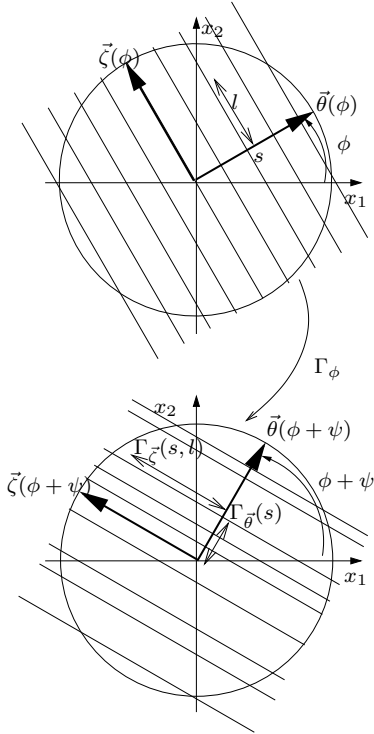


FIG. 2: déformations  $\vec{\Gamma}_{\phi}$  en géométrie parallèle

# 2 Déformations

## 2.1 Géométrie parallèle

Pour la géométrie parallèle, nous considérons les déformations  $\vec{\Gamma}_{\phi}$  qui transforment un faisceau de droites parallèles  $\vec{x} \cdot \theta(\phi) = s$  ( $\phi$  est fixé et  $s \in \mathbb{R}$  varie) en un faisceau de droites parallèles  $\vec{\Gamma}_{\phi}(\vec{x}) \cdot \vec{\theta}(\phi + \psi(\phi)) = \Gamma_{\vec{\zeta}}(s)$ . Elles sont de la formes :

$$\vec{\Gamma}_{\phi}(\vec{x}) = R_{\psi(\phi)} \left( \Gamma_{\vec{\theta}}(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi))\vec{\theta}(\phi) + \Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x})\vec{\zeta} \right) \quad (1)$$

où  $R_{\psi}$  est une rotation d'angle  $\psi$ ,  $\Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x})$  est une fonction réelle de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Gamma_{\vec{\theta}}$  est monotone et  $\psi$  est suffisamment régulière, voir la figure 2.

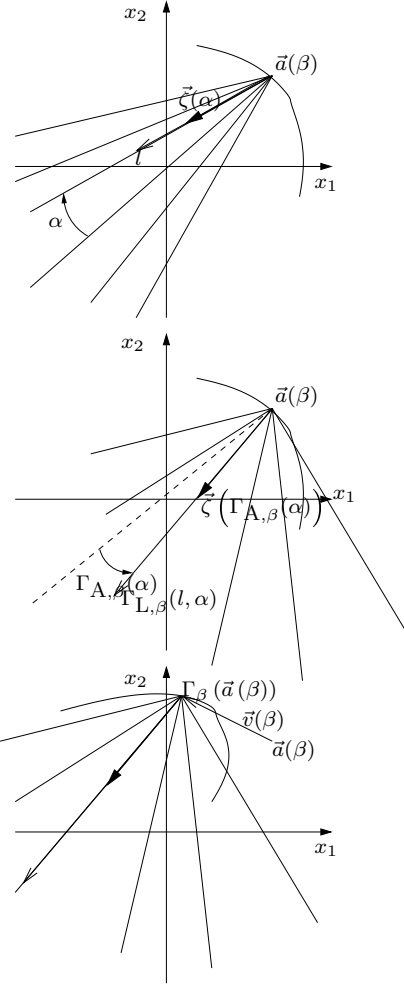


FIG. 3: déformation  $\vec{\Gamma}_{\beta}$  en géométrie fan-beam

## 2.2 Géométrie fan-beam

Pour la géométrie fan-beam, nous considérons les déformations  $\vec{\Gamma}_{\beta}$  qui transforment un faisceau en éventail (fan) en un fan. Elles peuvent se décomposer en une translation de la source et une déformation du fan à source fixée :

$$\vec{\Gamma}_{\beta}(\vec{x}) = \vec{T}_{\vec{v}(\beta)} \left( \vec{a}(\beta) + \Gamma_{L,\beta}(l, \alpha)\vec{\zeta} \left( \Gamma_{A,\beta}(\alpha) \right) \right) \quad (2)$$

où  $\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}$  est la translation de vecteur  $\vec{v}(\beta)$  et ici  $\vec{v}(\beta) = \vec{\Gamma}_{\beta}(\vec{a}(\beta)) - \vec{a}(\beta)$ . On choisira  $\Gamma_{A,\beta}$  monotone en  $\alpha$  et  $\Gamma_{L,\beta}(l, \alpha)$

monotone en  $l$  à  $\alpha$  fixé telle que  $\Gamma_{\mathbf{L},\beta}(0, \alpha) = 0$ , voir la figure 3.

### 2.3 Déformations affines

Il est simple de montrer que les déformations affines  $\Gamma_t(\vec{x}) = A_t \vec{x} + \vec{b}_t$  (où  $A_t$  est une matrice  $2 \times 2$ ), peuvent se mettre sous la forme (1) ( $t = \phi$ ) ou (2) ( $t = \beta$ ). Les classes que nous considérons dans ce travail les contiennent et sont infiniment plus vastes.

## 3 Résultats

Dans [7] la fonction  $f$  (et donc  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ ) est reconstruite par une méthodes analytique FBP à partir de la transformée parallèle ou divergente  $\mathcal{T}f_{\vec{\Gamma}_t}$  de  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ , plus précisément à partir de  $\mathcal{P}f_{\vec{\Gamma}_\phi}(\phi, s)$  ( $\mathcal{T} = \mathcal{P}$  et  $t = \phi$ ) ou  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta, \alpha)$  ( $\mathcal{T} = \mathcal{D}$  et  $t = \beta$ ), lorsque  $\vec{\Gamma}_t$  est affine.

Nous montrons ici que les déformations  $\vec{\Gamma}_t$  appartenant à une sous classe des déformations de la forme (1) ou (2) peuvent s'écrire sous la forme:  $\vec{\Gamma}_t = \vec{A}_t \circ \vec{\Delta}_t$ , où  $\vec{A}_t$  est affine et  $\vec{\Delta}_t$  est telle que  $\mathcal{T}_t f_{\vec{\Delta}_t}$  peut-être directement déduit de  $\mathcal{T}_t f$ . Plus précisément, nous restreignons les déformations dans la direction  $\zeta$  dans (1) ou (2) à être affine, voir respectivement (3) et (6). Ces déformations peuvent donc être analytiquement compensées dans un algorithme FBP. En effet, à partir des deux résultats suivants (4) et (7), on peut compenser la déformation  $\vec{\Delta}_t$  directement sur les données à  $t$  fixé, alors que la partie affine  $\vec{A}_t$  est compensée par [7].

### 3.1 Géométrie parallèle

Si

$$\begin{aligned} \vec{\Delta}_\phi(\vec{x}) &= \Delta_{\vec{\theta}}(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) \vec{\theta}(\phi) \\ &+ \left( b(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) + c(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) (\vec{x} \cdot \vec{\zeta}(\phi)) \right) \vec{\zeta}(\phi) \end{aligned} \quad (3)$$

où  $c$  est une fonction réelle strictement positive alors

$$\mathcal{P}_\phi f_{\vec{\Delta}_\phi}(s) = \frac{1}{c(s)} \mathcal{P}_\phi f(\Delta_{\vec{\theta}}(s)) \quad (4)$$

Donc si dans (1)  $\Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x})$  est de la forme  $\Gamma_{\vec{\zeta}}(\vec{x}) = b(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) + c(\vec{x} \cdot \vec{\theta}(\phi)) \vec{x} \cdot \vec{\zeta}(\phi)$ , comme  $\vec{\Gamma}_\phi = R_{\psi(\phi)} \circ \vec{\Delta}_\phi$  nous avons  $\mathcal{P}f_{\vec{\Gamma}_\phi}(\phi, s) = \mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)} \circ \vec{\Delta}_\phi}(\phi, s) = \frac{1}{c(s)} \mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)}}(\phi, \Delta_{\vec{\theta}}(s))$ . Donc  $\mathcal{P}_\phi f_{R_{\psi(\phi)}}$  peut être calculée directement de  $\mathcal{P}_\phi f_{\vec{\Gamma}_\phi}$ :

$$\mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)}}(\phi, s) = c(\Delta_{\vec{\theta}}^{-1}(s)) \mathcal{P}f_{\vec{\Gamma}_\phi}(\phi, \Delta_{\vec{\theta}}^{-1}(s)), \quad (5)$$

puis  $f$  peut être reconstruite de  $\mathcal{P}f_{R_{\psi(\phi)}}$  avec l'algorithme FBP donné dans [7].

### 3.2 Géométrie fan-beam

De même si

$$\vec{\Delta}_\beta(\vec{x}) = \vec{a}(\beta) + (b(\alpha) + c(\alpha)l) \vec{\zeta}(\Delta_{\mathbf{A},\beta}(\alpha)) \quad (6)$$

où  $c$  est une fonction réelle strictement positive alors

$$\mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Delta}_\beta}(\alpha) = \frac{1}{c(\alpha)} \mathcal{D}_\beta f(\Delta_{\mathbf{A},\beta}(\alpha)). \quad (7)$$

Donc si dans (2)  $\Gamma_{\mathbf{L},\beta}(l, \alpha)$  est de la forme  $(b(\alpha) + c(\alpha)l)$ , comme  $\vec{\Gamma}_\beta = \vec{T}_{\vec{v}(\beta)} \circ \vec{\Delta}_\beta$ , nous avons

$$\mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\alpha) = \mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)} \circ \vec{\Delta}_\beta}(\alpha) = \frac{1}{c(\alpha)} \mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}(\beta, \Delta_{\mathbf{A},\beta}(\alpha)) \quad (8)$$

Ainsi  $\mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}$  est calculée directement de  $\mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\alpha)$ :

$$\mathcal{D}_\beta f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}(\alpha) = c(\Delta_{\mathbf{A},\beta}^{-1}(\alpha)) \mathcal{D}_\beta f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\Delta_{\mathbf{A},\beta}^{-1}(\alpha)), \quad (9)$$

puis  $f$  est reconstruite de  $\mathcal{D}f_{\vec{T}_{\vec{v}(\beta)}}$  avec un algorithme FBP donné dans [7].

## 4 Expérimentations numériques

Dans la suite, nous illustrons la formule (9) dans le cas de la géométrie fan-beam. Nous considérons une géométrie d'acquisition telle que la source décrit une trajectoire circulaire de rayon  $r = 3$ . Le support de l'objet mesuré est contenu dans le disque unitaire (de rayon  $\rho = 1$ ). Nous avons simulé deux tours de scanner ( $n_T = 2$ ), c'est à dire  $\beta \in [0, 4\pi[$ ,  $\vec{a}(\beta) = r(\cos \beta, \sin \beta)$ , avec un échantillonnage angulaire de  $n_\beta = 256$  projections par tour. Chaque projection est mesurée suivant  $[-\alpha_M, \alpha_M]$  avec  $\alpha_M = \arcsin(1/r)$  et échantillonnée régulièrement suivant  $n_\alpha = 128$  mesures. Plus précisément nous avons simulé  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta_p, \alpha_j)$  avec  $\beta_p = p * 2\phi/n_\beta, p = 0, \dots, n_T n_\beta - 1$ ;  $\alpha_j = (j + 0.5)2\alpha_M/n_\alpha, j = 0, \dots, n_\alpha - 1$ .

Notre fantôme numérique  $f$  est l'image  $256 \times 256$  pixelisée de l'indicatrice d'un cercle de rayon 0,1 et de centre (0,3;0,3), voir figure 4.

Nous considérons d'abord une déformation  $\vec{\Gamma}_3$  de la forme (2) avec  $\vec{v}(\beta) = \vec{0}$  (translation nulle  $\forall \beta$ , donc la trajectoire circulaire est conservée par la transformation),

$$\Gamma_{3\mathbf{A},\beta}(\alpha) = \alpha^3/\alpha_M^2, \Gamma_{3\mathbf{L},\beta}(l, \alpha) = l$$

donc  $\Gamma_{3\mathbf{A},\beta}$  est indépendante de  $\beta$ , et  $\Gamma_{3\mathbf{L},\beta}(l, \alpha)$  est l'identité en  $l$  indépendamment de  $\beta$  et  $\alpha$ .

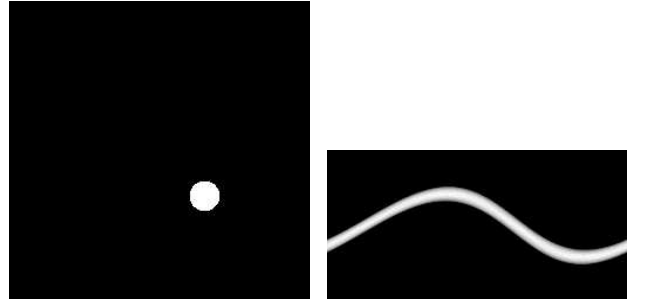


FIG. 4: fantôme statique (gauche) et sinogramme associé (droite)

Dans la figure 4 nous représentons l'image de notre fantôme numérique statique et le sinogramme  $256 \times 128$  produit sur un tour, c'est à dire l'image de  $\mathcal{D}f(\beta_p, \alpha_j)$ ,  $p = 0, \dots, n_\beta - 1, j = 0, \dots, n_\alpha - 1$ .

Dans la figure 5 nous représentons les déformations du fantôme à différents  $\beta$ , c'est à dire l'image de  $f_{\vec{\Gamma}_\beta}$ , ainsi que le sinogramme du fantôme dynamique  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta_p, \alpha_j)$  produit sur un tour.

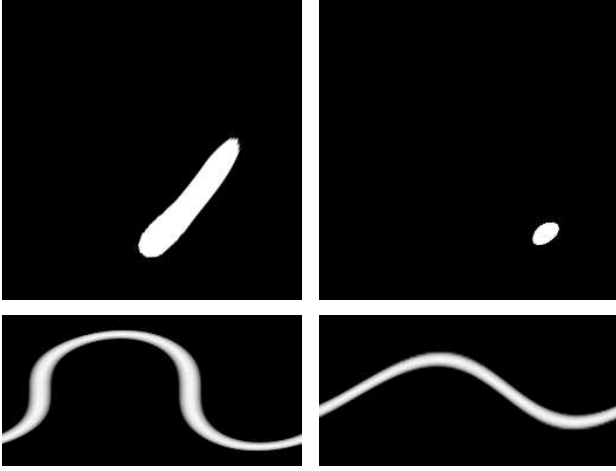


FIG. 5: Déformations  $\Gamma_3$  du fantôme dynamique visualisées à deux différents  $\beta_p$  ( $p = 37$  et  $p = 100$ ); Deuxième ligne à gauche : sinogramme associé ( $\beta_p, p = 0, \dots, n_\beta - 1$ ); à droite : sinogramme du fantôme dynamique compensé suivant (9) qu'on peut comparer à celui de la figure 4

Nous représentons en bas à droite, le sinogramme obtenu par compensation de la déformation par la formule (9) (formule de “rebinning” implémentée par simple interpolation linéaire). Nous constatons visuellement que la déformation est corrigée dans les données en comparant avec le sinogramme du fantôme statique donné dans la figure 4.

Nous considérons maintenant une déformation  $\vec{\Gamma}_m$  de la forme (2) identique à  $\vec{\Gamma}_3$  sauf pour

$$\Gamma_{m\mathbf{A},\beta}(\alpha) = \left(1 - \frac{\beta}{4\pi}\right) \frac{\alpha^3}{\alpha_M^2} + \frac{\beta}{4\pi} \text{lin}(\alpha),$$

où  $\text{lin}(\alpha)$  est antisymétrique, linéaire par morceau et définie par  $\text{lin}(0, 5\alpha_M) = 0, 6\alpha_M$  et  $\text{lin}(\alpha_M) = \alpha_M$ .

Donc  $\Gamma_{m\mathbf{A},\beta}$  est ici dépendante de  $\beta$ , à travers le mélange linéaire en  $\beta$  qui fait passer sur l'intervalle  $\beta \in [0, 4\pi]$  d'une “déformation en  $\alpha^3$ ” à une déformation linéaire par morceaux en  $\alpha$ .

Dans la figure 6 nous représentons les déformations du fantôme pour deux valeurs  $\beta_p$ ,  $p = 293$  et  $p = 356$  (exactement un tour de plus par rapport à la figure 5; on constate une différence car la déformation en  $\alpha$ ,  $\Gamma_{m\mathbf{A},\beta}$  est alors majoritairement marquée par  $\text{lin}(\alpha)$ ). Nous représentons aussi le sinogramme du fantôme dynamique  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_\beta}(\beta_p, \alpha_j)$  cette fois sur deux tours (sous la forme de deux sinogrammes de longueur  $2\pi$ , c. à d. un par tour).

Nous représentons à droite, les sinogrammes obtenus par compensation de la déformation par la formule (9). Nous constatons visuellement que la déformation est corrigée dans les données en comparant avec le sinogramme du fantôme statique donné dans la figure 4.

## Remerciements

Ce travail a bénéficié en partie de soutien de l'ACI GRID, pro-

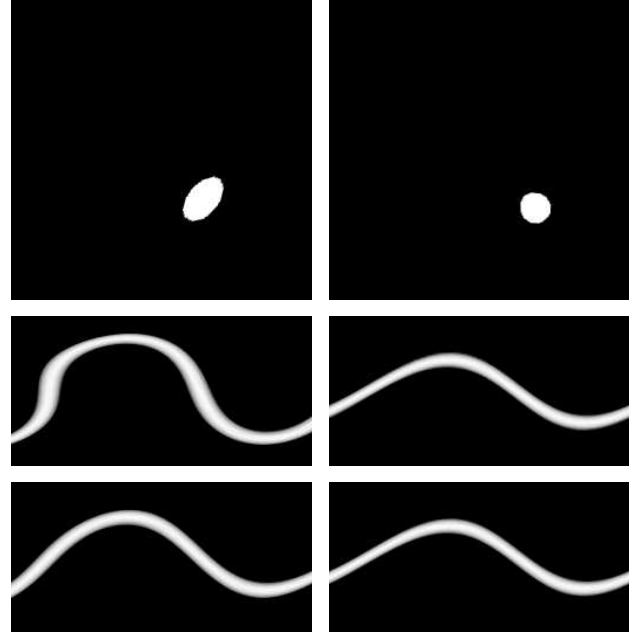


FIG. 6: Déformations  $\Gamma_m$  du fantôme dynamique visualisées à deux différents  $\beta_p$  ( $p = 293$  et  $p = 356$ ); La deuxième ligne, respectivement la troisième, correspond au premier tour, respectivement au second. Deuxième et troisième ligne à gauche : sinogramme associé au fantôme dynamique; à droite : sinogramme du fantôme dynamique compensé suivant (9) qu'on peut comparer à celui de la figure 4

jet CIMENT GRID, de la Région Rhône Alpes, projet RAG-TIME, et bénéficie du projet CIMENT.

## Références

- [1] C.R. Crawford, K.F. King, C.J. Ritchie, and J.D. Godwin. Respiratory compensation in projection imaging using a magnification and displacement model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15:327–332, 1996.
- [2] T. Flohr and B. Ohnesorge. Heart rate adaptive optimization of spatial and temporal resolution for electrocardiogram-gated multislice spiral CT of the heart. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 25(6):907–923, 2001.
- [3] M. Kachelriess and W. A. Kalender. Electrocardiogram-correlated image reconstruction from subsecond spiral computed tomography scans of the heart. *Medical Physics*, 25(12):2417–2431, December 1998.
- [4] F. Noo, M. Defrise, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short-scan. *Phys. Med. Biol.*, 47:2525–2546, July 2002.
- [5] S. Roux. *Modèles dynamiques en tomographie. Application à l'imagerie cardiaque*. Phd thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, France, 2004.
- [6] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Efficient acquisition for periodic dynamic CT. *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 50(5):1672–77, October 2003.
- [7] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Exact reconstruction in 2D dynamic CT: compensation of time-dependent affine deformations. *Phys. Med. Biol.*, 49(11):2169–82, June 2004.