

Probabilité de décrochement d'un estimateur autodidacte du résidu de porteuse

Philippe CIBLAT¹, Mounir GHOGHO²

¹Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST)
46 rue Barrault, 75013 Paris, France
Tél : +33 1 45 81 77 28 - Fax : +33 1 45 89 00 20

²Université de Leeds, Ecole de Génie électrique
LS2 9JT, Leeds, Royaume-Uni
Tél : +44 113 343 2009 - Fax : +44 113 343 2032
philippe.ciblat@enst.fr, m.ghogho@leeds.ac.uk

Résumé – Dans le contexte des communications numériques, nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation autodidacte du résidu de fréquence porteuse par le biais d'un estimateur de type NLLS (Non-Linear Least Square). À faible Rapport Signal-à-Bruit ou à faible nombre d'échantillons, cet estimateur peut ne pas converger, autrement dit, peut « décrocher ». Nous nous sommes donc concentrés à évaluer théoriquement la probabilité d'apparition de ce décrochement. Estimer un résidu de porteuse de manière autodidacte via un estimateur NLS revient à vouloir estimer une harmonique perturbée par un bruit multiplicatif et additif. Or, dans la littérature existante, des expressions analytiques de la probabilité d'apparition du décrochement sont disponibles uniquement dans le contexte de l'estimation d'une harmonique seulement perturbée par un bruit additif. Le résultat nouveau de ce papier réside dans l'obtention d'une expression analytique de la probabilité de décrochement. Cette expression ne dépend que de la constellation des symboles émis et permet ainsi d'observer les évolutions du phénomène de décrochement en fonction de l'efficacité spectrale du système de communication.

Abstract – We address the problem of blind carrier frequency-offset (CFO) estimation in QAM, PSK and PAM communications systems. We study the performance of a standard CFO estimate which consists of first raising the received signal to the M th power, where M is an integer depending on the type and size of the symbol constellations, and then applying the nonlinear least squares (NLLS) estimation approach. At low SNR, the NLLS method fails to provide an accurate CFO estimate because of the presence of outliers. In this paper, we derive a closed-form expression for the outlier probability. This enables us to predict the estimation performance, namely the Mean Square Error (MSE), well for all SNR values. For a given SNR, the new results also give insight into the minimum number of samples required in the CFO estimation procedure in order to ensure that the MSE on estimation is not significantly affected by the outliers.

1 Introduction

Dans le contexte des communications numériques, on émet une suite de données appartenant à une constellation de type modulation en amplitude (MDA) ou en phase (MDP) ou en quadrature (MAQ). A la réception, ces données sont perturbées par un bruit gaussien, un canal de propagation et un décalage probable de la phase et de la fréquence. Le décalage en fréquence, appelé résidu de porteuse, est soit dû à l'effet Doppler soit à une désynchronisation entre les oscillateurs locaux de l'émetteur et du récepteur. Par souci de simplicité, nous supposons que le canal de propagation se réduit à un trajet direct. Par conséquent, le signal reçu $y(n)$ à temps discret (après passage dans le filtre adapté et échantillonnage à la cadence des données) se modélise de la manière suivante :

$$y(n) = s(n)e^{2i\pi(\phi_0 + \phi_1 n)} + b(n), \quad N = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

avec $s(n)$ la suite des données i.i.d. inconnue du récepteur et associée à une constellation MDA ou MDP ou MAQ. Le processus $b(n)$ représente le bruit additif gaussien considéré centré, circulaire, blanc et de variance $\sigma^2 = \mathbb{E}[|b(n)|^2]$. Enfin N désigne le nombre d'échantillons disponibles. La phase et le résidu de porteuse, notés respectivement ϕ_0 et ϕ_1 , sont incon-

nus. Dans ce papier, nous nous focalisons sur le problème de l'estimation de ϕ_1 .

Pour estimer de manière autodidacte la fréquence ϕ_1 , il est intéressant d'utiliser les propriétés de non-circularité des constellations numériques [8, 1, 3, 2, 9, 10]. En effet, chaque constellation usuelle de symboles admet une symétrie de rotation d'angle $2\pi/M$ avec M un entier propre à chaque constellation. Par exemple $M = 2$ pour une MDA, $M = 4$ pour une MAQ et $M = P$ pour une MDP à P états [6]. Ceci implique que

$$\mathcal{S} := \mathbb{E}[s(n)^M] \neq 0$$

Afin de profiter de cette propriété, il convient d'introduire le signal $y(n)^M$ qui se décompose ainsi

$$y(n)^M = \mathcal{S}e^{2i\pi M(\phi_0 + \phi_1 n)} + e(n) \quad (2)$$

avec

$$e(n) = (s(n)^M - \mathcal{S})e^{2i\pi M(\phi_0 + \phi_1 n)} + \sum_{m=0}^{M-1} C_M^m s(n)^m b(n)^{M-m} e^{2i\pi m(\phi_0 + \phi_1 n)}. \quad (3)$$

et $C_M^m = \frac{M!}{m!(M-m)!}$. Le processus $e(n)$ est par construction centré et donc assimilable à du bruit. De plus sa covariance est

sa pseudo-covariance valent respectivement

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \mathbb{E}[|e(n)|^2] = (\mathbb{E}[|s(n)|^{2M}] - |\mathcal{S}|^2) \\ &+ \sum_{m=0}^{M-1} (C_M^m)^2 \mathbb{E}[|s(n)|^{2m}] \mathbb{E}[|b(n)|^{2(M-m)}],\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \mathbb{E}[e(n)^2] = (\mathbb{E}[s(n)^{2M}] - \mathcal{S}^2) e^{2i\pi 2M\phi_0}. \quad (4)$$

Ainsi l'élévation à la puissance M du signal reçu permet de transformer le modèle initial (1) représentant une harmonique ϕ_1 perturbée par un bruit additif $b(n)$ et multiplicatif $s(n)$ en un modèle (2) représentant une harmonique $M\phi_1$ uniquement perturbée par un bruit additif $e(n)$ [8, 10, 2]. Etant donné l'Eq. (3), $e(n)$ n'est pas gaussien. Néanmoins il reste courant pour estimer ϕ_1 de mettre en œuvre le périodogramme [8, 10, 2]. C'est pourquoi, nous considérons l'estimateur NLLS (Non-Linear Least Square) $\hat{\phi}_{1,N}$ suivant

$$\hat{\phi}_{1,N} = \frac{1}{M} \arg \max_{\phi \in [-1/2, 1/2]} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)^M e^{-2i\pi\phi n} \right|^2. \quad (5)$$

Afin que l'estimateur soit consistant, ϕ_1 est supposé compris entre $-1/2M$ et $1/2M$. Bien que la fonction à maximiser ne soit pas convexe, il est possible d'obtenir le maximum de cette fonction en procédant de la manière suivante [4] :

- une étape dite *grossière* permettant de détecter le pic autour de la fréquence $M\phi_1$. Cette étape est réalisée via une Transformée de Fourier discrète (FFT) de taille N .
- une étape dite *fine* examinant la fonction de coût autour du pic détecté par l'étape précédente. Un algorithme du gradient permet de mettre en place cette étape.

A faible Rapport Signal-à-Bruit (RSB) ou à faible nombre d'échantillons, l'étape grossière peut conduire à la détection d'un pic se situant loin du point-cible $M\phi_1$. L'étape fine, alors mal initialisée, fournit des estimateurs aberrants. Ce phénomène porte le nom d'« effet de décrochement » [4].

La vraie Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de l'estimateur NLLS s'écrit alors

$$\text{EQM} = \frac{p}{12} + (1-p)\text{EQM}_{\text{s.d.}}$$

où p est la probabilité d'échec de l'étape grossière et est appelée « probabilité de décrochement » et où $\text{EQM}_{\text{s.d.}}$ est l'EQM quand l'effet de décrochement n'est pas pris en compte [4].

Une expression analytique pour $\text{EQM}_{\text{s.d.}}$ a été développée dans [3] et [10] pour des modulations MAQ, dans [9] pour des modulations MDP, et dans [2] pour des modulations MDA. Cependant, aucun calcul concernant la probabilité de décrochement p n'est disponible dans la littérature. L'objectif de ce papier est donc d'obtenir une expression analytique de la probabilité d'apparition de cet effet de décrochement.

Les travaux antérieurs consacrés au calcul de probabilité de décrochement se sont uniquement préoccupés de l'estimation d'une harmonique perturbée par un bruit gaussien (à valeurs complexes) et circulaire [4]. Comme déjà mentionné, le bruit additif $e(n)$ n'est pas gaussien (cf. Eq. (3)). Néanmoins, pour mener à bien le calcul analytique de la probabilité de décrochement, nous imposons à $e(n)$ de suivre une loi gaussienne. Cette modélisation est également motivée par le fait que les performances de l'estimation d'un signal déterministe en présence d'un bruit blanc sont les plus mauvaises quand le bruit suit une

loi gaussienne [7]. Donc l'hypothèse gaussienne conduira à une borne supérieure du terme $\text{EQM}_{\text{s.d.}}$. Bien que ce résultat ne tienne pas compte de l'effet de décrochement, les simulations montrent que l'EQM totale est encore la plus mauvaise quand le bruit $e(n)$ est considéré gaussien. Cependant, nos simulations montrent que cette borne supérieure est pertinente dans la plupart des scénarios pratiques. Même après avoir imposé l'hypothèse gaussienne sur $e(n)$, les résultats présentés dans [4] ne sont pas applicables car $e(n)$ n'est toujours pas circulaire (cf. Eq. (4)). En conséquence, les expressions disponibles dans la littérature ne peuvent être utilisées dans notre problème. Il convient donc dans la section suivante de fournir une expression analytique nouvelle pour la probabilité de décrochement quand le bruit $e(n)$ est modélisé par un processus blanc gaussien à moyenne nulle et non-circulaire.

2 Probabilité de décrochement

La Transformée de Fourier discrète de taille N , notée $Y(k)$, est appliquée au signal $y(n)^M$. Par conséquent, on a

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n)^M e^{-2i\pi kn/N}.$$

Par souci de simplicité, nous supposons que la fréquence $M\phi_1$ est une fréquence de Fourier k_0/N avec k_0 un entier compris entre $-N/2 + 1$ et $N/2$. Nous supposons également que N est un entier pair.

En remplaçant $y(n)^M$ par l'expression (2), on trouve, pour $-N/2 + 1 \leq k \leq N/2$, que

$$|Y(k)| = \begin{cases} |\mathcal{S}e^{2i\pi M\phi_0} + E(k_0)| & \text{si } k = k_0 \\ |E(k)| & \text{si } k \neq k_0 \end{cases},$$

avec

$$E(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e(n) e^{-2i\pi kn/N}.$$

Sans perte de généralité, nous considérons que $k_0 = 0$.

Dans la suite, nous avons besoin de la loi de probabilité du vecteur aléatoire $\mathbf{E} = [E(-N/2 + 1), \dots, E(N/2)]$. Comme $e(n)$ est supposé être un processus i.i.d. gaussien, \mathbf{E} peut être modélisé par un vecteur gaussien. Par ailleurs \mathbf{E} est de moyenne nulle, de fonction de corrélation $\sigma_E^2(k, k') = \mathbb{E}[E(k)\overline{E(k')}]$ et de fonction de pseudo-corrélation $\tilde{\sigma}_E^2(k, k') = \mathbb{E}[E(k)E(k')]$. On obtient que

$$\sigma_E^2(k, k') = \frac{\sigma_e^2}{N} \delta_{k,k'} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_E^2(k, k') = \frac{\tilde{\sigma}_e^2}{N} \delta_{k+k',0} \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= (\mathbb{E}[|s(n)|^{2M}] - |\mathcal{S}|^2) \\ &+ \sum_{m=0}^{M-1} (C_M^m)^2 \mathbb{E}[|s(n)|^{2m}] \mathbb{E}[|b(n)|^{2(M-m)}]\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\sigma}_e^2 = (\mathbb{E}[s(n)^{2M}] - \mathcal{S}^2) e^{2i\pi 2M\phi_0}.$$

L'effet de décrochement est associé à un échec de l'étape grossière qui se produit lorsque la FFT présente son pic maximal ailleurs qu'au point $k = k_0 = 0$. Comme $E(k)$, pour k non-nul, est indépendant de $E(0)$ (cf. Eq. (6)), la probabilité

d'apparition de l'effet de décrochement, notée p , peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 1 - p &= \text{Prob}(\forall k \neq 0, |Y(k)| < |Y(0)|) \\ &= \int p_1(x)p_2(x)dx. \end{aligned}$$

où $p_1(x) = \text{Prob}(\forall k \neq 0, |Y(k)| < x)$ et où $p_2(x) = p_{|Y(0)|}(x)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire $|Y(0)|$.

Comme les variables $|E(k)|$ sont i.i.d. lorsque leurs indices ne sont pas opposés, on a

$$p_1(x) = \text{Prob}(|E(N/2)| < x) \times (\text{Prob}(\forall k \neq 0, N/2, |E(k)| < x, |E(-k)| < x))^{N/2-1}.$$

Soient $q_1(x) = \text{Prob}(|E(N/2)| < x)$ et $r_1(x) = \text{Prob}(|E(k)| < x, |E(-k)| < x)$.

En passant par les coordonnées polaires, on obtient que

$$q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{u}|\sigma_e^2|} R(|r|, u\sigma_e^2 N x^2) \quad (7)$$

avec

$$R(a, y) = \int_0^y e^{-z} I_0(az) dz,$$

$r = \tilde{\sigma}_e^2/\sigma_e^2$, $u = 1/(\sigma_e^4 - |\tilde{\sigma}_e^2|^2)$ et $I_0(z)$ désignant la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

En procédant de la même manière, c'est-à-dire, en passant par les coordonnées polaires, on obtient que

$$r_1(x) = \int_0^x \int_0^x 4\rho_1\rho_2 e^{-u\sigma_e^2 N(\rho_1^2 + \rho_2^2)} I_0(2u|\tilde{\sigma}_e^2| N \rho_1 \rho_2) d\rho_1 d\rho_2.$$

Grâce à l'Eq. (6) de [5], on a la forme simplifiée suivante

$$r_1(x) = (1 - e^{-N \frac{x^2}{\sigma_e^2}}) + e^{-N \frac{x^2}{\sigma_e^2}} \left[Q \left(\sqrt{2uN} \frac{\tilde{\sigma}_e^2}{\sigma_e} x, \sqrt{2uN} \sigma_e x \right) - Q \left(\sqrt{2uN} \sigma_e x, \sqrt{2uN} \frac{\tilde{\sigma}_e^2}{\sigma_e} x \right) \right] \quad (8)$$

$$- Q \left(\sqrt{2uN} \sigma_e x, \sqrt{2uN} \frac{\tilde{\sigma}_e^2}{\sigma_e} x \right) \quad (9)$$

avec $Q(\alpha, \beta) = \int_\beta^\infty z e^{-(z^2 + \alpha^2)/2} I_0(\alpha z) dz$ la fonction Marcum.

Le calcul de $p_2(x)$ se conduit encore en passant par les coordonnées polaires, il advient que

$$p_2(x) = 2\sqrt{u} N x e^{-(u\sigma_e^2 N x^2 + u w N)} \times P(\tilde{\sigma}_e^2 x^2/N, 2v(\tilde{\sigma}_e^2 - \sigma_e^2)x/N; N^2 u) \quad (10)$$

avec

$$P(a, b; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z \Re[ae^{-2i\theta} - be^{i\theta}]} d\theta, \\ v = \mathcal{S} e^{2i\pi M \phi_0}$$

et

$$w = |v|^2 \sigma_e^2 - \Re[\tilde{\sigma}_e^2 \bar{v}^2].$$

En réunissant les Eqs. (7), (8) et (10), et en appliquant le changement de variable d'intégration $y^2 = u\sigma_e^2 N x^2$, on obtient la formule finale suivante

$$p = 1 - \frac{2}{u\sigma_e^4} e^{-uwN} \times \int_0^\infty y e^{-y^2} R(|r|, y^2) \left[(1 - e^{-\frac{y^2}{u\sigma_e^4}}) + e^{-\frac{y^2}{u\sigma_e^4}} \left[Q \left(\sqrt{2r} y, \sqrt{2} y \right) - Q \left(\sqrt{2} y, \sqrt{2r} y \right) \right] \right]^{N/2-1} \times P(r y^2 / u N^2, 2v|\tilde{\sigma}_e^2 - \sigma_e^2| y / (|\sigma_e| \sqrt{u N N}); N^2 u) dy$$

On remarque que cette équation est différente de celle donnée dans [4]. On retrouve l'expression de [4] lorsque $\tilde{\sigma}_e^2 = 0$, c'est-à-dire, lorsque $E(k)$ représente un processus i.i.d circulaire. La contrainte $\tilde{\sigma}_e^2 = 0$ est vérifiée uniquement quand une constellation MDP est employée. On notera que pour les constellations MAQ, $E(k)$ n'est ni i.i.d. ni circulaire et de ce fait l'expression fournie par [4] n'est plus valable et doit être remplacé par notre expression.

3 Simulations

Sur la figure 1, nous affichons les probabilités de décrochement théorique et empirique en fonction du Rapport Signal-à-Bruit E_b/N_0 ($E_b/N_0 = \mathbb{E}[|s(n)|^2]/(\log_2(P)\mathbb{E}[|b(n)|^2])$) pour différentes constellations MAQ et MDP où P est le nombre de bits par symbole ainsi que pour le cas où l'amplitude $s(n)$ est constante et déterministe. Dans ce dernier cas, l'expression de la probabilité de décrochement était calculée dans [4] et est utilisée ici comme une référence. Il faut noter que, dans ce cas, le signal transmis ne transporte pas d'information, et donc le Rapport Signal-à-Bruit ne peut être défini comme ci-dessus. Nous fixons alors $\text{RSB} = |s|^2/\mathbb{E}[|b(n)|^2]$. La probabilité de décrochement empirique est obtenue en moyennant sur 10.000 réalisations. Nous remarquons que les courbes théoriques et empiriques sont en correspondance pour les constellations MDP quelque soit le RSB et pour les constellations MAQ à faible RSB. A RSB élevé, nous observons un effet de pallier pour les constellations MAQ dès que la taille de la constellation dépasse strictement quatre. La prédiction théorique, dans ce dernier cas, est légèrement pessimiste (ceci est certainement dû à l'hypothèse gaussienne réalisée sur $e(n)$). Cet effet de pallier est provoqué par l'auto-bruit induit par les constellations MAQ, qui est lui-même engendré par la non-nullité de σ_e^2 et $\tilde{\sigma}_e^2$ dans le cas non-bruité.

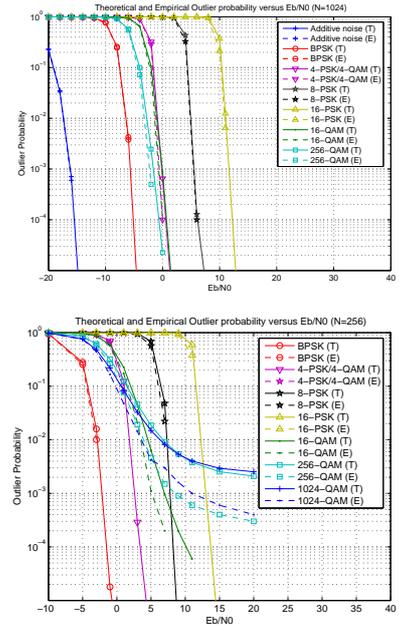


FIG. 1 – Probabilité de décrochement théorique et empirique en fonction de E_b/N_0 (haut : $N = 1024$; bas $N = 256$)

Sur la Figure 2, la probabilité de décrochement est tracée en fonction de N . Nous remarquons que les courbes théoriques et empiriques sont proches. Nous observons également que la probabilité de décrochement est indépendante du nombre d'états de la constellation MAQ considérée (dès que ce nombre est strictement supérieur à quatre). Ceci est dû au fait que pour les constellations MAQ, $M = 4$ quel que soit la taille de cette constellation. En revanche, pour les constellations MDP, M est égal à la taille de la constellation. Par conséquent, les performances se dégradent quand M augmente.

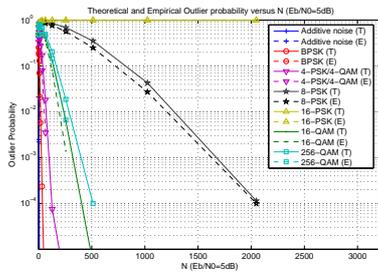


FIG. 2 – Probabilité de décrochement théorique et empirique en fonction de N ($E_b/N_0 = 5\text{dB}$)

Les Figures 3 et 4 présentent l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) en fonction de E_b/N_0 et N respectivement. Le nombre de réalisations de Monte-Carlo est fixé à 1.000.000. Pour obtenir l'EQM qui prend en compte l'effet de décrochement, nous avons utilisé l'approche décrite dans [4], et que nous avons rappelée dans la section d'Introduction. L'expression pour l'EQM négligeant l'effet de décrochement est disponible dans [3] et est donnée par $\text{EQM}_{\text{s.d.}} = \frac{3}{32\pi^2} \frac{\sigma_e^2 - \Re\{\sigma_e^2\}}{|S|^2 N^3}$.

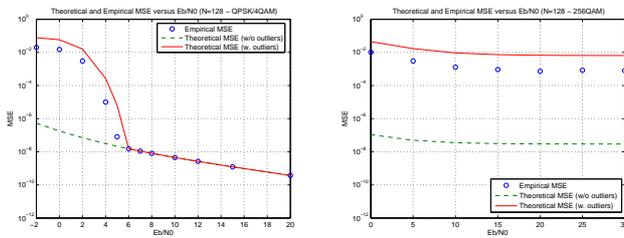


FIG. 3 – EQM théorique et empirique en fonction de E_b/N_0 (gauche MAQ-4 ; droite MAQ-256)

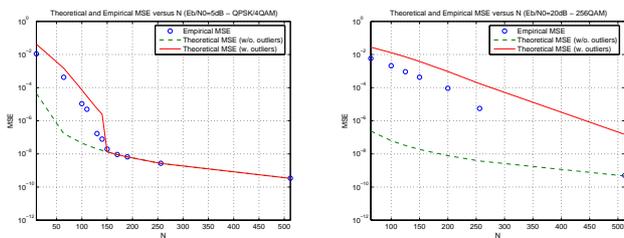


FIG. 4 – EQM théorique et empirique en fonction de N (gauche MAQ-4 ; droite MAQ-256)

Nous observons que l'EQM théorique est maintenant en accord avec l'EQM empirique. D'après la Figure 3, pour la constel-

lation MAQ-4, le seuil RSB_s (c'est-à-dire, le RSB en dessous duquel l'estimateur NLLS est inopérant) est d'environ 6 dB quand $N = 128$. Pour une constellation MAQ-256 et $N = 128$, la probabilité de décrochement ne s'annule pas en l'absence de bruit ; ceci est dû à l'auto-bruit. Néanmoins, quand N augmente, la probabilité de décrochement décroît et l'écart entre l'EQM empirique et théorique évaluée sans prendre en compte l'effet de décrochement diminue (cf. Figure 4). Il faut noter que l'EQM empirique pour la constellation MAQ-256 et $N = 512$ est éloignée de l'EQM théorique (malgré l'effet de décrochement pris en compte). Ceci s'explique par le fait que le nombre de réalisations est « seulement » d'un million alors qu'il aurait dû être d'une centaine de millions afin d'obtenir une estimation pertinente de l'EQM !

Références

- [1] O. BESSON et P. STOICA, « Nonlinear least-squares approach to frequency estimation and detection for sinusoidal signals with arbitrary envelope », *Digital Signal Processing*, vol. 9, n° 1, p. 45–56, Janvier 1999.
- [2] P. CIBLAT, P. LOUBATON, E. SERPEDIN et G.B. GIANNAKIS, « Performance of blind carrier frequency offset estimation for non-circular transmissions through frequency-selective channels », *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 50, n° 1, p. 130–140, Janvier 2002.
- [3] M. GHOGHO, A. SWAMI et T. DURRANI, « Blind estimation of frequency offset in the presence of unknown multipath », *International Conference on Personal Wireless Communications*, p. 104–108, 2000.
- [4] D.C. RIFE et R.R. BOORSTYN, « Single-tone parameter estimation from discrete-time observations », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 20, n° 5, p. 591–598, Septembre 1974.
- [5] M.K. SIMON et M.S. ALOUINI, « A simple single integral representation of the bivariate Rayleigh distribution », *IEEE Com. Letters*, vol. 2, n° 5, p. 128–130, Mai 1998.
- [6] H. STEENDAM et M. MOENECLAEY, « Low-SNR limit of the Cramer-Rao Bound for estimating the carrier phase and frequency of a PAM, PSK, or QAM waveform », *IEEE Com. Letters*, vol. 5, n° 5, p. 218–220, Mai 2001.
- [7] A. SWAMI, « Cramer-Rao bounds for deterministic signals in additive and multiplicative noise », *EURASIP Signal Processing*, vol. 53, p. 231–244, Septembre 1996.
- [8] A.J. VITERBI et A.M. VITERBI, « Non-linear estimation of PSK-modulated carrier phase with application to burst digital transmissions », *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 29, p. 543–551, Juillet 1983.
- [9] Y. WANG, E. SERPEDIN et P. CIBLAT, « Optimal Blind Carrier Recovery for M-PSK Burst Transmissions », *IEEE Trans. on Communications*, vol. 51, n° 9, p. 1571–1581, Septembre 2003.
- [10] Y. WANG, E. SERPEDIN et P. CIBLAT, « Optimal blind nonlinear least-squares carrier phase and frequency offset estimation for general QAM modulations », *IEEE Trans. on Wireless Communications*, vol. 2, n° 5, p. 1040–1054, Septembre 2003.