

# Estimation et Reconstruction des Signaux Courts Multicomposantes Modulées Non-linéairement à la fois en Amplitude et en Fréquence

Meryem JABLOUN<sup>1</sup>, Michelle VIEIRA<sup>1</sup>, Nadine MARTIN<sup>1</sup>, François LÉONARD<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Images et des Signaux  
961 rue de la Houille Blanche, BP 46, 38 402 St Martin d'Hères, France

<sup>2</sup>Institut Hydro-Québec  
Varenes, Canada

meryem.jabloun@lis.inpg.fr, michelle.vieira@lis.inpg.fr,  
nadine.martin@lis.inpg.fr, leonard.francois@ireq.ca

**Résumé** – Dans ce papier, nous considérons des signaux, courts, non-stationnaires, modulés non linéairement en amplitude et en fréquence. Nous étendons une approche locale, développée dans le cadre des signaux monocomposante et dont l'efficacité et la robustesse ont été prouvées [3, 4]. Nous utilisons un modèle polynomial pour la fréquence et l'amplitude instantanées (FI / AI). Les paramètres du modèle sont ensuite estimés en maximisant la Vraisemblance par une technique d'optimisation stochastique : le Recuit Simulé. Basés sur la même démarche et dans le contexte des signaux multicomposantes, nous comparons deux approches différentes. Une première approche, optimale, et qui s'avère coûteuse en temps de calcul, consiste à estimer tous les paramètres du modèle à la fois. La deuxième approche, sous-optimale, reconstruit itérativement le signal composante par composante. Des simulations de Monte Carlo et une comparaison avec les Bornes de Cramer Rao illustrent les bonnes performances seront présentées. Nous obtenons une bonne estimation dans le cas où les fréquences instantanées se croisent, ce qui constitue une bonne performance compte tenu du faible nombre d'échantillons. Les deux approches sont testées ensuite sur des données réelles.

**Abstract** – In this paper, we consider nonstationary signals with nonlinear amplitude and frequency modulation on short time-windows. Motivated by published works [3, 4], where we obtain high performances for monocomponent signals, we propose to extend the approach to multicomponent signals. Both the instantaneous amplitude and frequency were modeled by polynomial functions. The maximization of the likelihood function was achieved using a stochastic optimization technique: the Simulated Annealing. We compare two different strategies. In the first one, we simultaneously estimate all model parameters. This is a highly computational strategy. The second one consists in iteratively reconstructing the signal component by component. At each iteration, the parameters of only one component are estimated. Monte Carlo simulations are presented and compared to the appropriate Cramer-Rao Bounds. It proves the efficiency of the algorithm. Moreover it underscores the performance to estimate crossing frequency trajectories which is a great challenge related to the low sample number.

## 1 Introduction

L'analyse paramétrique des signaux multicomposantes, modulés en fréquence et en amplitude, a suscité un grand intérêt depuis quelques années [1, 2, 6]. Parmi les techniques proposées, nous citons la HAF (Higher Ambiguity Function) [1, 2] et la P-HAF (Product HAF) [6]. Malgré leur simplicité, ces méthodes sous optimales présentent plusieurs inconvénients. En effet, la présence de composantes multiples entraîne l'apparition d'interférences, qui dégradent l'estimation. Elles s'avèrent aussi très sensibles au bruit et aux modulations fortement non linéaires.

Afin de surmonter ces inconvénients, nous avons développé lors de précédents travaux [3, 4] une approche locale. Il s'agissait de considérer le signal sur une suite de courts segments temporels. Sur chacun d'eux, l'Amplitude et la Fréquence Instantanées (AI/FI) sont modélisées par des polynômes. Ensuite, en vue de préserver l'optimalité, la vraisemblance relative à ce modèle est maximisée à l'aide des techniques d'optimisation stochastique tel que le Recuit Simulé (RS). Ces segments, estimés un par un, sont fusionnés afin de reconstruire le signal dans sa totalité. Cette approche a permis une meilleure adaptabilité du modèle à tout type de modulation. L'efficacité de

cette méthode a été prouvée dans le cadre d'un signal monocomposante. La précision de l'estimation, ainsi que la robustesse au bruit, étaient meilleures par rapport à celles obtenues par la HAF.

Dans ce papier, nous poursuivons cette approche dans le cadre des signaux multicomposantes et nous ne présentons qu'une étude locale. Nous proposons et comparons deux nouvelles méthodes, s'appuyant chacune sur les résultats obtenus dans [3, 4]. La première méthode estime toutes les composantes simultanément. La seconde est itérative : le signal est estimé composante par composante. Nous présentons des simulations de Monte Carlo et les comparons aux Bornes de Cramer Rao appropriées, pour illustrer l'efficacité de chacune de ces méthodes. Nous soulignerons, également, leur aptitude à gérer certains problèmes délicats tels que la présence de trajectoires de fréquence proches ou qui se croisent. Nous considérons dans la suite le signal multicomposantes  $s[n]$ , noyé dans du bruit blanc gaussien additif  $e[n]$ , centré et de variance  $\sigma^2$ , défini comme suit :

$$\begin{aligned} s[n] &= \sum_{i=1}^K A_i[n] \exp(j \Phi_i[n]) \\ y[n] &= s[n] + e[n], \text{ pour } \frac{-N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

$A_i[n]$  et  $\Phi_i[n]$  désignent respectivement l'amplitude et la phase de la  $i$ -ème composante.  $F_i[n] = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi_i[n]}{\partial n}$  représente sa fréquence instantanée. Les amplitudes sont supposées strictement positives et les phases ne présentent pas de discontinuité.  $y[n]$  est le signal bruité.  $N + 1$  désigne le nombre d'échantillons, supposé impair pour simplifier le calcul.

## 2 Modélisation

Dans [3, 4], grâce à la courte durée du segment considéré (une trentaine de points), nous supposons une base de polynômes de degré deux, définie sur  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ , suffisante pour modéliser la non linéarité de la modulation. Sept paramètres sont à estimer pour chaque composante : la phase initiale  $\theta_{i,0}$ , trois paramètres pour l'amplitude  $\{a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}\}$  et trois pour la fréquence  $\{f_{i,0}, f_{i,1}, f_{i,2}\}$ . Soit  $g_0[n], g_1[n]$  et  $g_2[n]$  la base considérée sur  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$  ayant respectivement les degrés 0, 1 et 2. Les décompositions de la FI et de la AI sont données par

$$\begin{aligned} A_i[n] &= \sum_{k=0}^2 a_{i,k} g_k[n], \\ F_i[n] &= \sum_{k=0}^2 f_{i,k} g_k[n], \\ \Phi_i[n] &= \theta_{i,0} + 2\pi \left( \sum_{k=-\frac{N}{2}}^n F_i[k] - \sum_{k=-\frac{N}{2}}^0 F_i[k] \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Le problème se résout à estimer  $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_K\}$  où  $\theta_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \theta_{i,0}, f_{i,0}, f_{i,1}, f_{i,2}\}$ . Dans [3], nous avons proposé une base orthonormale discrète afin de découpler les paramètres de l'amplitude d'un signal monocomposante. Dans la suite, nous considérons la même base.

Pour estimer  $\theta$ , nous allons maximiser la vraisemblance. Etant donnée l'hypothèse du bruit gaussien, cela revient à minimiser l'erreur des moindres carrés donnée ci-dessous :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |y[n] - \tilde{s}[n]|^2 \quad (3)$$

$\tilde{s}[n]$  est obtenu en remplaçant (2) dans (1) pour chaque  $\theta$ . Vu la nonlinéarité de l'équation (3) ( $7K$  paramètres inconnus), les techniques d'optimisation classiques, tel que la descente du gradient, convergent généralement vers des minima locaux, d'où l'usage de techniques d'optimisation stochastique.

## 3 Algorithmes

Dans [3, 4], nous avons comparé des techniques d'optimisation stochastique pour résoudre (3). Le RS est le meilleur compromis entre un faible biais et une petite variance d'estimation. Dans la suite, nous proposons d'étendre son utilisation à l'estimation des signaux multicomposantes. Nous présentons deux approches différentes et qui seront comparées.

### 3.1 Algorithme optimal

Il s'agit d'estimer les  $7K$  paramètres simultanément afin de conserver le caractère optimal de l'estimateur de Maximum de Vraisemblance. L'algorithme proposé est une version modifiée du RS, décrit dans [4]. On initialise  $\theta$  via le spectrogramme. Ensuite, on répète  $I$  fois les étapes (a), (b) et (c) décrites ci-dessous.  $I$  est un nombre déterminé expérimentalement pour

accélérer la convergence. Il peut prendre des valeurs entre 1500 et 3000.

- On génère un nombre de candidats  $\theta_C$  selon une loi gaussienne de moyenne  $\theta$  et de variance  $\delta$ .  $\delta$  peut être vue comme une agitation évitant de stagner sur un minimum local.
- Si  $\theta_C$  minimise (3), alors  $\theta = \theta_C$ , sinon  $\theta$  reste inchangé.
- Ensuite, on génère  $u$  selon une loi binomiale avec une probabilité  $\rho \in [0, 0.5]$ . Si  $u = 1$ , alors on diminue  $\delta = 0.97 \times \delta$ . Ainsi, on augmente la vitesse de convergence.
- Une fois les  $I$  itérations achevées, un test de blancheur sur le signal résiduel  $\tilde{e}[n] = y[n] - \tilde{s}[n]$  permet d'arrêter l'algorithme. Dans le cas contraire, on relance l'estimation à partir de l'étape (a).

Considérons  $r = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |\tilde{e}[n]|^2$ .  $r$  est une variable aléatoire de loi  $\chi^2$  et de degré de liberté  $2(N + 1)$ , de moyenne et de variance respectivement  $\sigma^2(N + 1)$  et  $\sigma^4(N + 1)$ . Etant donné que  $N$  est de l'ordre de 30, le critère de blancheur adopté est la vérification de la relation suivante :

$$r \in \left[ \sigma^2(N + 1) - \sigma^2 \sqrt{N + 1}, \sigma^2(N + 1) + \sigma^2 \sqrt{N + 1} \right]$$

### 3.2 Algorithme sous optimal

Il s'agit d'un algorithme itératif. En effet,  $A_i[n]$  et  $F_i[n]$  de la  $i$ -ème composante sont estimées en résolvant l'équation (3) par le recuit simulé. A chaque itération, une seule composante est reconstruite à la fois. Grâce à cette approche, on réduit le temps du calcul. Les étapes de l'algorithme se déroulent comme suit :

- $i = 1$  et  $r[n] = y[n]$ ,
- Initialiser les paramètres de la  $i$ -ème composante. Par exemple, on calcule l'amplitude, la fréquence et la phase du maximum de la transformée de Fourier du signal bruité  $r[n]$  :  $\theta_i = \{a_{FFT}, 0, 0, \theta_{FFT}, f_{FFT}, 0, 0\}$ . Les autres paramètres sont tous mis à zéro.
- Afin d'estimer  $\theta_i$ , on itère  $I$  fois les étapes (a) (b) et (c) décrites dans le paragraphe (3.1).
- Une fois  $F_i[n]$  et  $A_i[n]$  de la  $i$ -ème composante estimées, on reconstruit cette composante :  $s_i[n] = A_i[n] \cdot e^{j \Phi_i[n]}$ . Ensuite, on la soustrait du signal bruité afin d'obtenir un signal résiduel :  $r[n] = r[n] - s_i[n]$ .
- Si  $r[n]$  vérifie le test de blancheur (cf. paragraphe (3.1)), l'estimation est achevée. Dans le cas contraire,  $i = i + 1$  et on estime la composante suivante à partir de l'étape 2.

Nous notons que l'algorithme sous-optimal fournit une bonne estimation du nombre de composantes compte tenu du niveau du bruit.

## 4 Bornes de Cramer Rao

Dans [2], la Matrice d'Information de Fisher (MIF) est déterminée pour les paramètres d'une phase polynomiale. En adaptant le calcul à la définition de nos paramètres ( $\theta$ ), on obtient :

$$MIF(\theta) = \frac{2}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A}_i^H \mathbf{A}_j & \mathbf{A}_i^H \phi_j \\ \phi_i^H \mathbf{A}_j & \phi_i^H \phi_j \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \leq i \leq K \\ 1 \leq j \leq K \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\text{où } \mathbf{A}_i = [g_0(\underline{n}) \cdot e^{j\Phi_i(\underline{n})}, g_1(\underline{n}) \cdot e^{j\Phi_i(\underline{n})}, g_2(\underline{n}) \cdot e^{j\Phi_i(\underline{n})}]$$

$$\phi_i = j [\eta_{-1}(\underline{n}) \cdot s_i(\underline{n}), \eta_0(\underline{n}) \cdot s_i(\underline{n}), \eta_1(\underline{n}) \cdot s_i(\underline{n}), \eta_2(\underline{n}) \cdot s_i(\underline{n})]$$

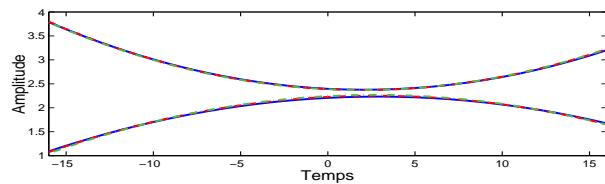
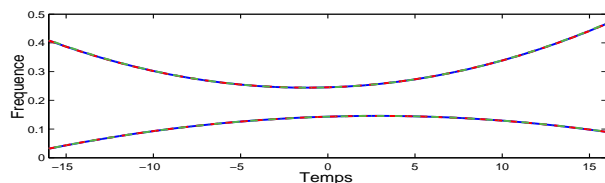
$\Phi_i(\underline{n})$  et  $s_i(\underline{n})$  sont les vecteurs temporels de la phase et du signal de la  $i$ -ème composante, calculés à chaque instant  $n$ .  $s_i(\underline{n})$  est égal à  $A_i(\underline{n}) \cdot e^{j\Phi_i(\underline{n})}$ . On note  $\underline{n} = [-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}]$ ,  $\eta_{-1}[n] = 1$  et  $\eta_i[n] = 2\pi (\sum_{k=-\frac{N}{2}}^n g_i[k] - \sum_{k=-\frac{N}{2}}^0 g_i[k])$  pour  $i = 0, 1, 2$  et  $n \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ . ( $\bullet$ ) désigne la multiplication terme à terme.

La borne de Cramer Rao de  $\theta$  est l'inverse de la matrice MIF donnée par (4). Notons que lorsque les trajectoires de fréquence deviennent très proches, la MIF tend vers une matrice singulière, ceci explique la difficulté de l'estimation dans ce cas. Dans le cadre des signaux multicomposantes, l'utilisation d'une base orthonormale permet le découplage entre les paramètres de l'amplitude d'une même composante. Toutefois, une forte corrélation subsiste entre les paramètres intercomposantes.

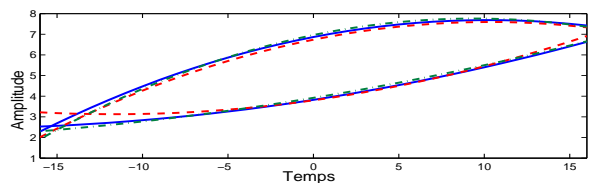
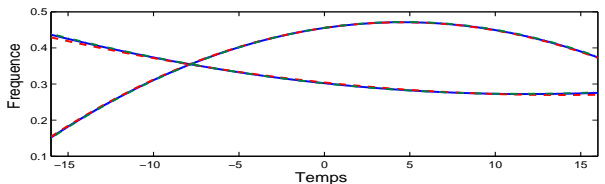
## 5 Résultats

Dans cette partie, nous utilisons des signaux simulés, formés de 33 points. La fréquence d'échantillonnage est de 1Hz. Les signaux ont deux composantes à phases polynomiales cubiques. Nous proposons d'étudier deux cas : dans le premier cas (I), les trajectoires de fréquences sont séparées. Dans le deuxième cas (II), elles se croisent.

Sur les figure 1 et 2, on a tracé les estimations de la FI et de la AI superposées avec les courbes réelles respectivement pour 20 dB et 10 dB. Nous obtenons une bonne estimation de la FI dans les deux cas (I) et (II). En revanche, nous remarquons que les performances d'estimation de l'AI sont meilleures dans le premier cas que dans le deuxième. En effet, le problème d'estimation est plus délicat en raison du croisements des fréquences. Sur la figure 3, des simulations de Monte Carlo illustrent l'efficacité de ces deux méthodes et leur robustesse au bruit. On a comparé les Erreurs Quadratiques Moyennes (EQM) aux BCR (4). Les EQM des paramètres d'amplitude sont très proches des BCR. En revanche, celles de la fréquence s'écartent des BCR. Cela s'explique d'une part par la forte corrélation entre les différents paramètres (Les termes en dehors de la diagonale de la  $FIM^{-1}$  ne sont pas négligeables) et d'autre part par la forte non linéarité en fonction des paramètres de fréquence. Enfin, ces deux méthodes sont testées sur un signal réel. Il s'agit d'un signal émis par une baleine. Il comporte 31 échantillons. Toutes les figures sont présentées en fréquence réduite. Sur la figure 4, on peut voir que les deux méthodes donnent un résultat quasiment équivalent. En effet, on peut voir trois composantes de fréquences dont une est très basse fréquence. On voit également que deux composantes ont une énergie équivalente ( ce qui ne facilite pas l'estimation). Les courbes estimées de la FI sont ensuite reportées sur le spectrogramme ( figure 5). Le signal estimé, via les deux méthodes, est tracé sur la figure 6. L'autocorrélation du signal résiduel dans les deux cas est reporté sur la figure 7. En ce qui concerne l'algorithme sous optimal, la première composante estimée est la plus énergétique. Ensuite, comme les deux composantes restantes ont une énergie équivalente, à chaque réalisation de l'estimation, on peut estimer l'une ou l'autre en premier lieu. Le RSB est estimé à 14



(Figure 1. a)



(Figure 1. b)

FIG. 1 – Exemples de FI : (a) cas I, (b) cas II, pour un RSB de 20 dB. Les courbes estimées de la FI et AI par l'algorithme optimal (—) et celui sous optimal (-.) contre les courbes originales (-).

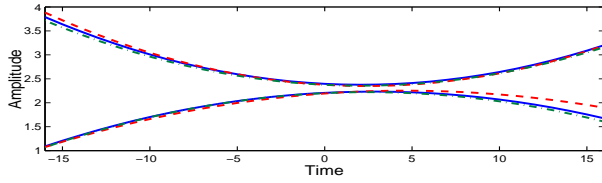
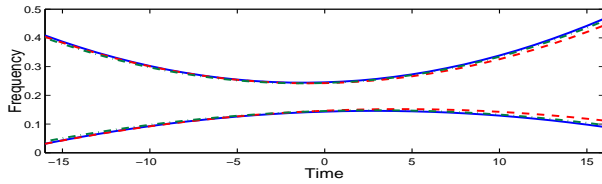
dB. Finalement, sachant que l'hypothèse du bruit blanc n'est pas vrai en milieu sous-marin, les résultats obtenus restent relativement corrects.

## 6 Conclusion

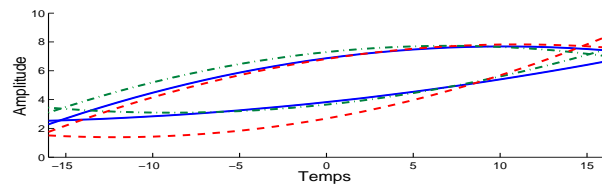
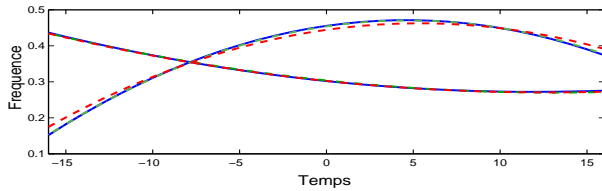
Cette communication vient compléter une étude locale faite sur des signaux monocomposante et étendre le résultat au cas multicomposantes. Nous avons proposé deux méthodes basées sur la maximisation de la vraisemblance et utilisant le recuit simulé. La première, optimale, opère simultanément sur tous les paramètres du modèle complet. La deuxième, sous optimale, reconstruit le signal composante par composante. La comparaison des deux méthodes montre qu'elles donnent des résultats proches. Toutefois la deuxième est plus avantageuse en temps de calcul (au moins trois fois plus rapide). La comparaison avec les BCR montrent une bonne performance pour l'estimation des paramètres d'amplitude. En revanche, le couplage entre les différents paramètres entraîne une dégradation plus rapide pour les paramètres de fréquence. Un signal réel a été analysé pour valider cette étude. Nous envisageons de traiter des signaux longs en fusionnant les traitements locaux par la suite.

## Références

- [1] A. Francos and M. Porat, "Analysis and Synthesis of Multicomponent Signals Using Positive Time-Frequency Distributions," *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 47, pp. 493–504, Feb. 1999.



(Figure 2. a)



(Figure 2. b)

FIG. 2 – Exemples de FI : (a) cas I, (b) cas II, pour un RSB de 10 dB. Les courbes estimées de la FI et AI par l’algorithme optimal (—) et celui sous optimal (-.-) contre les courbes originales (-).

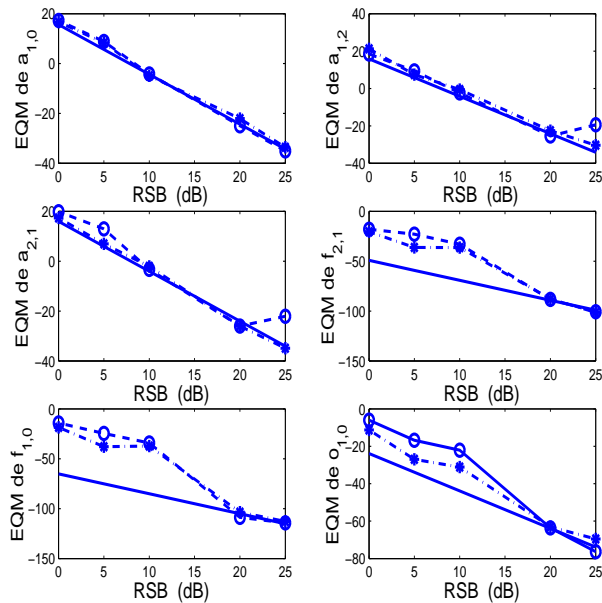


FIG. 3 – Les EQM de l’estimation des paramètres  $\{a_{1,0}, a_{1,2}, a_{2,1}, f_{1,0}, f_{2,0}, \theta_{1,0}\}$  via l’algorithme optimal (o), et celui sous optimal (-\*) en fonction du RSB. Les EQM sont comparées aux BCR (-).

- [2] B. Friedlander and J. M. Francos, “ Estimation of Amplitude and Phase Parametrs of Multicomponent Signals,” *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 43, pp. 917–926, Apr. 1995.
- [3] M. Jabloun, M. Vieira, F. Leonard and N. Martin, “ Local Orthonormal Decomposition for both Instantaneous Amplitude and Frequency of Highly Nonstationary discrete Signals,” *IMA. Ci-*

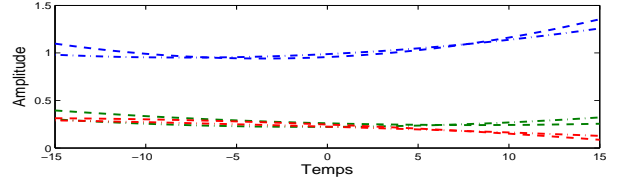
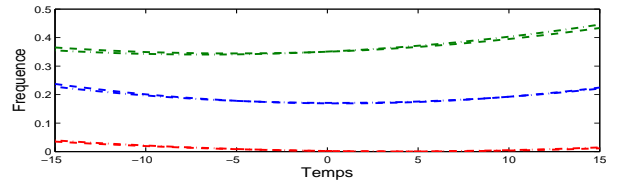


FIG. 4 – Signal réel : estimé via l’algorithme optimal (-.-), et celui sous optimal (-.-).

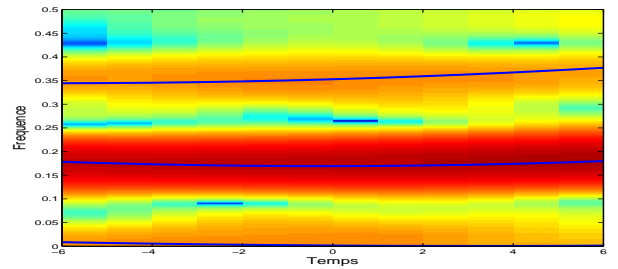


FIG. 5 – Superposition des fréquences estimées avec le spectrogramme du signal réel.

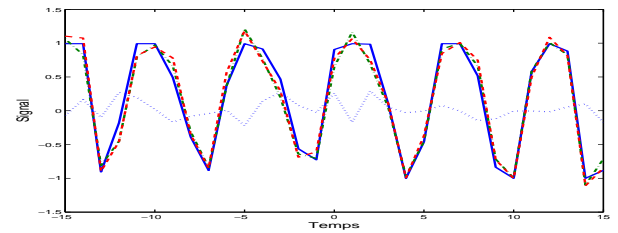


FIG. 6 – Superposition du signal réel avec celui estimé via l’algorithme optimal (-.-) et le sous optimal (-.-). signal résiduel (:).

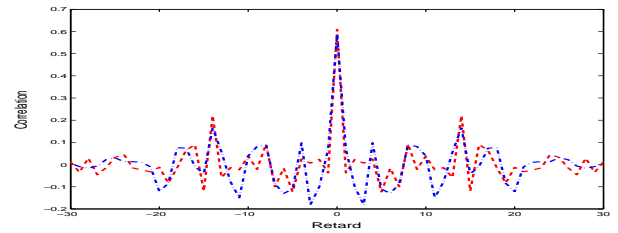


FIG. 7 – La corrélation du signal résiduel après avoir enlevé celui estimé avec l’algorithme : optimal (-.-) et le sous optimal (-.-).

- recenter, United Kingdom, Dec. 14-16. 2004.
- [4] M. Vieira, F. Leonard, M. Jabloun and N. Martin “Short Time Single Polynomial Phase Using Legendre functions,” in *EU-SIPCO 2004*, Vienna, Austria, Sept. 6-10. 2004, pp. 793–796.
- [5] M. Z. Ikram and G. T Zhou, “ Estimation of Multicomponent Polynomial signals of Mixed Orders,” *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 81, pp. 2293–2038, 2001.
- [6] S. Barbarossa, A. Scaglione and G. B Giannakis, “ Product Higher Order Function for Multicomponent Polynomial Phase Signal Modeling,” *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 49, pp. 691–708, Mar. 1998.