

# Impact de l'a priori sur les performances de l'égaliseur MAP et distribution des LRV extrinsèques

Noura SELLAMI<sup>1</sup>, Aline ROUMY<sup>2</sup>, Inbar FIJALKOW<sup>3</sup>,

<sup>1</sup>ISECS, Route Menzel Chaker km 0.5, B.P 868, 3018 Sfax, Tunisie

<sup>2</sup>IRISA-INRIA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

<sup>3</sup>ETIS, UMR 8051, ENSEA-UCP-CNRS, 6 av. du Ponceau, 95014 Cergy-Pontoise, France

sellami\_noura@yahoo.fr, aline.roumy@irisa.fr  
fijalkow@ensea.fr

**Résumé** – Afin de combattre les effets des interférences entre symboles (IES), l'égaliseur optimal à utiliser est basé sur le critère Maximum *a posteriori* (MAP). Nous considérons le cas où l'égaliseur MAP est alimenté par des informations *a priori* sur les données émises, comme pour un turbo égaliseur. Nous proposons d'étudier analytiquement l'impact de l'*a priori* sur les performances de l'égaliseur MAP. Nous distinguons deux cas d'étude : le cas où les informations *a priori* sont fiables et le cas où elles ne sont pas fiables. Dans un turbo égaliseur, l'égaliseur et le décodeur s'échangent des Logarithmes du Rapport de Vraisemblance (LRV) extrinsèques pour améliorer les performances au fil des itérations. Nous proposons ici d'étudier analytiquement la distribution de ces LRV. Le but de cette étude est d'effectuer de manière analytique, dans un travail futur, l'analyse de la convergence des turbo égaliseurs utilisant un égaliseur MAP.

**Abstract** – To combat the effects of intersymbol interference, the optimal equalizer to be used is based on maximum *a posteriori* (MAP) detection. We consider the case where the MAP equalizer is provided with *a priori* information on the transmitted data, as in a turbo equalizer. We propose to study analytically the impact of the *a priori* on the MAP equalizer performance. We distinguish two cases: the case of unreliable *a priori* and the case of reliable *a priori*. In a turbo equalizer, the equalizer and the decoder exchange extrinsic Log Likelihood Ratios (LLRs). We propose here to study analytically their distribution. The aim of this study is to perform in the future the analytical convergence analysis of turbo equalizers using the MAP equalization.

## Introduction

Afin de combattre les effets des interférences entre symboles (IES), l'égaliseur optimal à utiliser est basé sur le critère Maximum *a posteriori* (MAP) [1]. Nous considérons deux critères, le critère MAP séquence et le critère MAP symbole. En l'absence d'informations *a priori* sur les données émises, la détection selon le critère MAP devient équivalente à la détection selon le critère Maximum de vraisemblance (MV). Des algorithmes efficaces existent pour le détecteur MAP séquence tel que l'algorithme de Viterbi [3], et pour le détecteur MAP symbole tel que l'algorithme BCJR [1]. Ces algorithmes sont intéressants puisque leur complexité augmente linéairement plutôt qu'exponentiellement avec la taille de la séquence. Les performances de l'égaliseur de Viterbi en présence d'un canal à Bruit Additif Blanc Gaussien (BABG) ont été étudiées par Forney [3]. Cette étude supposait qu'aucune information *a priori* n'est fournie à l'égaliseur.

Dans ce papier, nous considérons le cas où l'égaliseur MAP est alimenté par des informations *a priori* sur les données émises, comme pour un turbo égaliseur [2]. Nous proposons d'étudier analytiquement l'impact de l'*a priori* sur les performances de l'égaliseur MAP. Nous montrons que l'utilisation des informations *a priori* par l'égaliseur MAP est équivalente à un gain en terme de Rapport Signal à Bruit (RSB) et nous donnons une expression analytique de ce gain. Nous distinguons deux cas d'étude : le cas où les informations *a priori* sont fiables et le cas où elles ne sont pas fiables. Cette étude est une

généralisation des résultats de [4], qui sont valables uniquement quand les *a priori* ne sont pas fiables.

Dans un turbo égaliseur, l'égaliseur et le décodeur s'échangent des Logarithmes du Rapport de Vraisemblance (LRV) extrinsèques pour améliorer les performances au fil des itérations [2]. Nous proposons ici d'étudier analytiquement la distribution de ces LRV. Le but de cette étude est d'effectuer de manière analytique, dans un travail futur, l'analyse de la convergence des turbo égaliseurs utilisant un égaliseur MAP. En effet, les analyses classiques de convergence sont basées sur les EXIT charts (extrinsic information transfer charts) [6] et utilisent des simulations puisqu'il est difficile d'étudier analytiquement les performances de l'égaliseur MAP quand le nombre des états du treillis est supérieur à 2.

## 1 Modèle du système

Nous considérons la transmission des données sur un canal sélectif en fréquence. Les bits d'information en entrée sont modulés en symboles MDP-2 (modulation de phase à 2 états) dont l'alphabet est  $\mathcal{A} = \{+1, -1\}$ . Nous supposons que les transmissions se font par blocs de  $T$  symboles. Le canal est supposé invariant durant un bloc. Le signal reçu en bande de base échantillonné au rythme symbole à l'instant  $k$  est donné par

$$x_k = \sum_{l=0}^{L-1} h_l s_{k-l} + n_k \quad (1)$$

où  $L$  est la mémoire du canal et  $s_k$ , ( $1-L \leq k \leq T-1$ ) sont les symboles émis. Dans cette expression,  $n_k$  sont modélisés par des échantillons indépendants d'un bruit réel blanc gaussien suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  où  $\mathcal{N}(\alpha, \sigma^2)$  est une distribution gaussienne de moyenne  $\alpha$  et de variance  $\sigma^2$ . Le terme  $h_l$  est le  $l^{\text{ième}}$  coefficient du canal qu'on suppose réel.

Nous nous intéressons à l'égalisation selon le critère MAP. Nous considérons un événement d'erreur  $\mathcal{E}_m$  de longueur  $m$  [3]. La probabilité de cet événement quand il n'y a pas d'*a priori* à l'entrée de l'égaliseur est [3] :

$$P(\mathcal{E}_m) = Q\left(\frac{\|\underline{\varepsilon}_m\|}{2\sigma}\right) \quad (2)$$

où  $\underline{\varepsilon}_m$  est la séquence d'erreur correspondant à  $\mathcal{E}_m$  convoluée par le canal et  $Q(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-y^2/2) dy$ . Soit  $d_{\min}$  la distance minimale du canal [3] définie comme la valeur minimale de  $\|\underline{\varepsilon}_m\|$ . Du fait de la décroissance exponentielle de la fonction  $Q(\cdot)$ , la probabilité d'erreur totale  $P(\Sigma)$  sera dominée à fort RSB par la probabilité de l'événement correspondant à la valeur minimale  $d_{\min}$  de  $\|\underline{\varepsilon}_m\|$  [3]. Ainsi, à fort RSB,

$$P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right). \quad (3)$$

## 2 Analyse de l'égaliseur

Nous supposons ici que le canal est parfaitement connu au niveau du récepteur. L'égaliseur MAP calcule les probabilités *a posteriori* sur les symboles transmis,  $P(s_k = s|\underline{x})$ ,  $s \in \mathcal{A}$ ,  $1-L \leq k \leq T-1$ , où  $\underline{x}$  est le vecteur des observations reçu durant un bloc. Comme dans un turbo égaliseur, nous supposons que l'égaliseur fournit à sa sortie des LRV extrinsèques [6] :

$$\begin{aligned} LRV_{ext.eg}(s_k) &= LRV_{eg}(s_k) - LRV_{priori.eg}(s_k) \\ &= \log \frac{P(s_k = +1|\underline{x})}{P(s_k = -1|\underline{x})} - \log \frac{P(s_k = +1)}{P(s_k = -1)} \end{aligned}$$

qui sont les LRV *a posteriori*  $LRV_{eg}(s_k)$  moins les LRV *a priori*  $LRV_{priori.eg}(s_k)$ . Nous supposons que les observations *a priori* à l'entrée de l'égaliseur sont modélisées par les sorties d'un canal BABG (Bruit Additif Blanc Gaussien) de moyenne nulle et de variance  $\sigma_{eg}^2$ . Ainsi, les LRV *a priori* sont modélisés par des échantillons indépendants gaussiens suivant la loi normale  $\mathcal{N}\left(\frac{2s_k\mu_{eg}^2}{\sigma^2}, \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2}\right)$  où  $\mu_{eg} = \frac{\sigma}{\sigma_{eg}}$ . Cette modélisation gaussienne des LRV avec rapport 2 entre variance et moyenne est classique dans l'analyse des récepteurs itératifs [6]. Nous avons montré dans [4] que lorsque l'égaliseur est alimenté par des informations *a priori*, la probabilité d'un événement d'erreur  $\mathcal{E}_m$  de longueur  $m$  peut s'écrire

$$P(\mathcal{E}_m) = Q\left(\frac{\sqrt{\|\underline{\varepsilon}_m\|^2 + 4m\mu_{eg}^2}}{2\sigma}\right).$$

Dans la suite, nous proposons de calculer la probabilité d'erreur totale de l'égaliseur et de trouver la distribution des LRV extrinsèques  $LRV_{ext.eg}(s_k)$ . Nous généralisons les résultats de [4] et distinguons deux cas : le cas d'informations *a priori* peu fiables ( $\mu_{eg}$  faible) et le cas d'informations *a priori* fiables ( $\mu_{eg}$  élevé).

### 2.1 Cas 1 : *a priori* non fiable

Considérons le cas d'informations *a priori* peu fiables. En général, dans l'égaliseur MAP, les erreurs se produisent par paquets. Ainsi, nous ne considérons pas les erreurs isolées puisqu'elles se produisent rarement et nous supposons que  $m \geq 2$ . De plus, par définition de la distance minimale,  $\|\underline{\varepsilon}_m\|^2 \geq d_{\min}^2$ . Aussi, une borne supérieure de  $P(\mathcal{E}_m)$  est obtenue en remplaçant  $\|\underline{\varepsilon}_m\|^2$  par  $d_{\min}^2$  et  $m$  par 2. Nous avons observé que cette borne est atteinte pour les canaux tels que  $L \leq 6$ , puisque pour ces canaux la séquence d'erreur permettant d'atteindre la distance minimale est en général de longueur  $m = 2$ . Pour les canaux plus longs, une recherche exhaustive de la séquence permettant d'atteindre la borne supérieure doit être effectuée. Par souci de clarté de la présentation, nous considérons dans ce qui suit uniquement les canaux courts ( $L \leq 6$ ). A fort RSB, le terme correspondant à la borne supérieure va dominer la somme des probabilités des événements d'erreurs. Ainsi, la probabilité totale d'erreur peut être approximée par

$$P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{\sqrt{d_{\min}^2 + 8\mu_{eg}^2}}{2\sigma}\right). \quad (4)$$

En comparant (3) et (4), on déduit que l'égaliseur MAP utilisant les informations *a priori* est équivalent à l'égaliseur MAP sans *a priori* mais avec un RSB équivalent en dB

$$RSB_{dB} = RSB_{dB} + 10 \log_{10} \left(1 + \frac{8\mu_{eg}^2}{d_{\min}^2}\right) \quad (5)$$

où  $RSB_{dB}$  est le vrai rapport signal à bruit de la transmission. On sait que la probabilité totale d'erreur pour une modulation MDP-2, sur un canal BABG avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma_1^2$  est  $P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)$ . Nous en concluons que les performances de l'égaliseur MAP quand il est alimenté par les informations *a priori* sont équivalentes à celles du canal BABG avec une moyenne nulle et une variance  $\sigma_1^2 = \frac{4\sigma^2}{d_{\min}^2 + 8\mu_{eg}^2}$ . Ainsi, les LRV *a posteriori* à la sortie de l'égaliseur MAP peuvent être modélisés par des échantillons indépendants d'une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{N}\left(\frac{2s_k}{\sigma_1^2}, \frac{4}{\sigma_1^2}\right)$ . Puisque les LRV extrinsèques et les LRV *a priori* sont indépendants par construction, nous obtenons à fort RSB,

$$\begin{aligned} LRV_{ext.eg}(s_k) &\sim \mathcal{N}\left(s_k \left(\frac{2}{\sigma_1^2} - \frac{2\mu_{eg}^2}{\sigma^2}\right), \left(\frac{4}{\sigma_1^2} - \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2}\right)\right) \\ &= \mathcal{N}\left(s_k \left(\frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{2\sigma^2}\right), \left(\frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{\sigma^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.2 Cas 2 : *a priori* fiable

Quand les informations *a priori* deviennent fiables ( $\mu_{eg}$  élevé), les observations *a priori* ont plus d'influence sur la détection que les observations provenant du canal. Puisque les informations *a priori* sont indépendantes, les erreurs ne vont plus se produire par paquets. Ainsi, dans ce cas, les erreurs isolées ( $m = 1$  et  $\|\underline{\varepsilon}_m\|^2 = 4$ ) vont se produire et vont dominer la probabilité totale d'erreurs, qui peut alors être approximée par  $P(\Sigma) \simeq Q\left(\frac{\sqrt{1+\mu_{eg}^2}}{\sigma}\right)$ . Donc, l'égaliseur MAP utilisant les

informations *a priori* est équivalent à l'égaliseur MAP sans *a priori* mais avec un RSB équivalent

$$R\tilde{S}B_{dB} = RSB_{dB} + 10 \log_{10} \left( \frac{4}{d_{\min}^2} (1 + \mu_{eg}^2) \right) \quad (7)$$

Dans ce cas, les performances de l'égaliseur MAP sont indépendantes du canal et sont équivalentes aux performances d'un canal BABG centré et de variance  $\sigma_2^2 = \frac{\sigma^2}{(1 + \mu_{eg}^2)}$ . Puisque les LRV extrinsèques et les LRV *a priori* sont indépendants, on obtient,

$$\begin{aligned} LRV_{ext-eg}(s_k) &\sim \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{2}{\sigma_2^2} - \frac{2\mu_{eg}^2}{\sigma^2} \right), \left( \frac{4}{\sigma_2^2} - \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2} \right) \right) \\ &= \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{2}{\sigma^2} \right), \frac{4}{\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Notons que lorsque les informations *a priori* deviennent fiables, les LRV extrinsèques sont équivalents aux LRV correspondant à un canal BABG de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Ainsi, l'effet de l'IES est éliminé.

### 2.3 Modélisation des LRV extrinsèques

Dans les paragraphes précédents, nous avons donné les distributions des LRV extrinsèques dans deux cas limites, quand l'*a priori* n'est pas fiable ( $\mu_{eg}$  est faible) et quand il est fiable ( $\mu_{eg}$  est élevé). Cependant, il n'est pas évident que cette analyse reste valable pour les valeurs intermédiaires de  $\mu_{eg} = \frac{\sigma}{\sigma_{eg}}$ . Nous suggérons qu'il existe une valeur limite de  $\mu_{eg}$  qu'on appelle  $\mu_{eg-lim}$  telle que

$$\begin{cases} LRV_{ext-eg}(s_k) \sim \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{2\sigma^2} \right), \left( \frac{d_{\min}^2 + 4\mu_{eg}^2}{\sigma^2} \right) \right) \\ \quad , \text{ si } \mu_{eg} < \mu_{eg-lim} \\ LRV_{ext-eg}(s_k) \sim \mathcal{N} \left( s_k \left( \frac{2}{\sigma^2} \right), \frac{4}{\sigma^2} \right), \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette valeur limite qui correspond à l'égalité entre (6) et (8), est donnée par

$$\mu_{eg-lim} = \sqrt{1 - \frac{d_{\min}^2}{4}} \quad (9)$$

Le choix de cette valeur limite sera validé par les simulations.

### 2.4 Utilité de l'égaliseur MAP lorsque l'*a priori* est fiable

Il est légitime de s'interroger sur l'utilité de l'égaliseur MAP lorsque l'*a priori* est fiable. En effet, en présence d'un *a priori* fiable, vaut-il mieux détecter les symboles à partir de l'*a priori* seul ou bien à partir des sorties *a posteriori* de l'égaliseur MAP ?

La comparaison des probabilités d'erreur des deux scénarios permet de répondre à la question. Si la détection utilise l'*a priori* seulement, la probabilité d'erreur est alors

$$P(\Sigma) \simeq Q \left( \frac{1}{\sigma_{eq}} \right). \quad (10)$$

puisque l'entrée (dite *a priori*) de l'égaliseur MAP est modélisée comme la sortie d'un canal BABG de variance de bruit  $\sigma_{eq}^2$ .

En revanche, à la sortie de l'égaliseur MAP, la probabilité d'erreur peut se réécrire (voir paragraphe 2.2)

$$P(\Sigma) \simeq Q \left( \frac{\sqrt{1 + \mu_{eg}^2}}{\sigma} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{eq}^2}} \right). \quad (11)$$

La décroissance monotone de la fonction  $Q(\cdot)$ , permet de conclure que (10) est supérieur à (11) et qu'il est donc meilleur en terme de performances d'utiliser l'égaliseur MAP plutôt que la détection à partir de l'*a priori*, même dans le cas d'un *a priori* fiable.

## 3 Résultats des simulations

Dans les simulations, nous utilisons la modulation MDP-2 et nous supposons que le canal est constant et connu au niveau du récepteur. Nous considérons le canal dont la réponse impulsionnelle est (0.29; 0.50; 0.58; 0.50; 0.29). Sa distance minimale est 1.0532 [5]. Nous alimentons l'égaliseur MAP avec des LRV *a priori* gaussiens indépendants suivant la loi normale  $\mathcal{N}(\frac{2s_k\mu_{eg}}{\sigma^2}, \frac{4\mu_{eg}^2}{\sigma^2})$ , pour un  $\mu_{eg} = \frac{\sigma}{\sigma_{eg}}$  donné. Sur les figures 1 et 2, nous traçons les courbes de Taux d'Erreurs Binaire (TEB) en fonction du RSB respectivement quand la détection des symboles émis est basée sur les LRV *a posteriori* et quand elle est basée sur les LRV extrinsèques. Les courbes continues montrent les performances obtenues par simulations. Sur la figure 1, les courbes discontinues sont obtenues en décalant la courbe correspondant au cas sans *a priori* ( $\mu_{eg} = 0$ ) par les valeurs des décalages en RSB données dans (5) et (7). Nous remarquons que les courbes théoriques approximent bien les courbes obtenues par simulations. Sur la figure 2, les courbes discontinues sont obtenues en considérant les expressions théoriques des LRV extrinsèques données dans (6) et (8). Ici,  $\mu_{eg-lim} = 0.866$ . Nous remarquons que lorsque  $\mu_{eg} \geq \mu_{eg-lim}$ , les performances sont similaires aux performances du canal BABG avec une variance  $\sigma^2$  (courbe BABG). Quand  $\mu_{eg} < \mu_{eg-lim}$ , les courbes théoriques approximent bien les courbes obtenues par simulations à fort RSB. Ces résultats sont cohérents avec l'analyse faite précédemment.

La figure 3 montre les moyennes des LRV extrinsèques quand les bits émis sont égaux à 1 en fonction de  $\mu_{eg}$  pour RSB=7dB. Nous remarquons que pour  $\mu_{eg} \gg \mu_{eg-lim}$  et  $\mu_{eg} \ll \mu_{eg-lim}$ , les moyennes analytiques approximent bien celles obtenues par simulations. Autour de la valeur limite  $\mu_{eg-lim}$ , l'approximation est moins juste mais reste satisfaisante pour prédire les performances extrinsèques de l'égaliseur comme le montre la figure 2.

## 4 Conclusion

Dans ce papier, nous considérons un égaliseur MAP alimenté par des observations *a priori* gaussiennes, comme pour un turbo égaliseur. Nous étudions analytiquement l'impact de l'*a priori* sur les performances de l'égaliseur MAP. Nous montrons que l'utilisation des informations *a priori* par l'égaliseur MAP est équivalente à un gain en terme de Rapport Signal à Bruit (RSB) et nous donnons une expression analytique de ce gain. Nous distinguons deux cas d'étude : le cas où les informations *a priori* sont fiables et le cas où elles ne sont pas fiables.

Nous donnons aussi l'expression analytique de la distribution des LRV extrinsèques en sortie de l'égaliseur. Le but de ce travail est d'effectuer dans le futur l'analyse de convergence analytique des turbo égaliseurs utilisant l'égaliseur MAP.

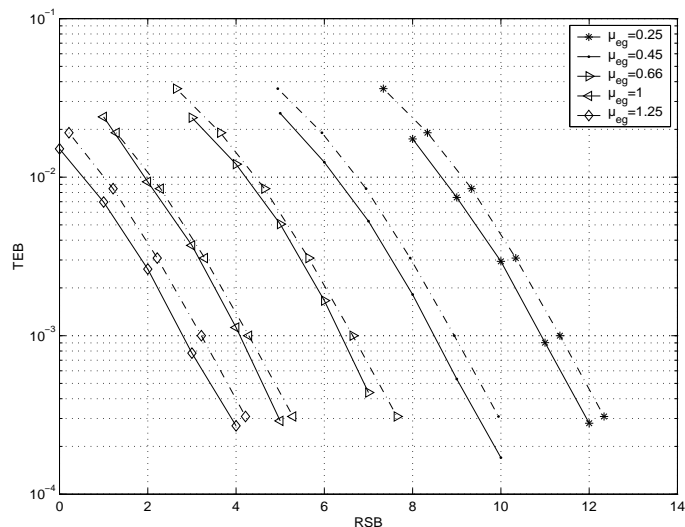


FIG. 1: TEB en fonction du RSB : Détection basée sur les LRV *a posteriori*.

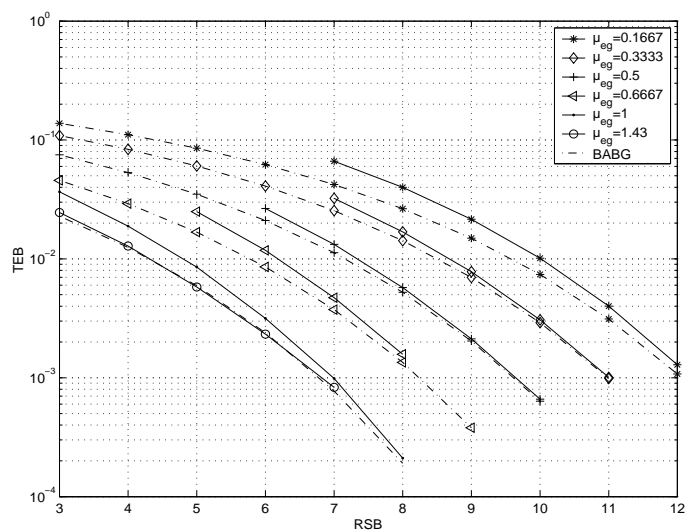


FIG. 2: TEB en fonction du RSB : Détection basée sur les LRV extrinsèques.

## References

- [1] L.R.Bahl, J.Cocke, F.Jelinek, and J.Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-32, pp.284-287, March 1974.
- [2] C.Douillard, M.Jezequel, C.Berrou, A.Picart, P.Didier, and A.Glavieux, "Iterative correction of intersymbol interference: turbo-equalization," *European Trans. Telecommun.*, vol. 6, no. 5, pp. 507-511, 1995.

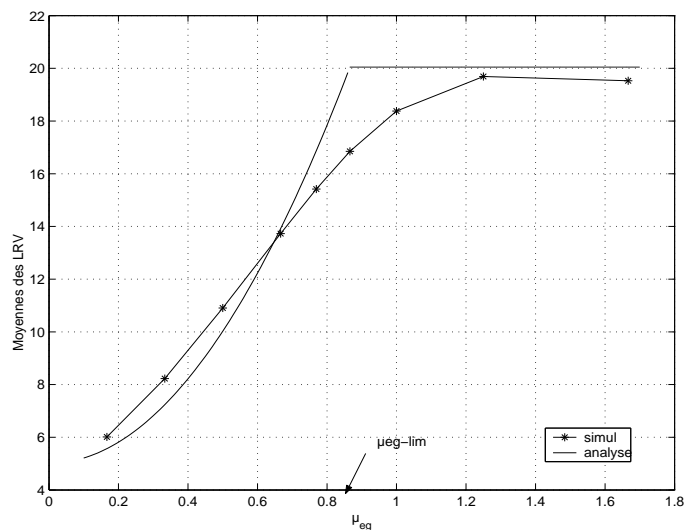


FIG. 3: Moyennes des LRV extrinsèques quand les bits émis sont égaux à 1 en fonction de  $\mu_{eg}$  à RSB=7dB.

- [3] G.D.Forney, Jr., "Maximum-likelihood sequence estimation for digital sequences in the presence of intersymbol interference," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 18, pp. 363-378, May 1972.
- [4] N.Sellami, A.Roumy, and I.Fijalkow, "On the analysis of the MAP equalizer performance within an iterative receiver," *IEEE Workshop on Signal Process. Advances in Wireless Comm. (SPAWC'04)*, Lisbon, Portugal, July 2004.
- [5] W.Ser, K.Tan, and K.Ho, "A new method for determining "unknown" worst-case channels for maximum-likelihood sequence estimation," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 46, no. 2, pp. 164-168, February 1998.
- [6] M.Tüchler, R.Koetter, and A.Singer, "Turbo equalization: principles and new results," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 50, no. 5, pp. 754-767, May 2002.