

# Evaluation de la précision des Algorithmes de Projection Affine en virgule Fixe

Romuald ROCHER, Daniel MENARD, Olivier SENTIEYS, Pascal SCALART  
ENSSAT/IRISA, Université de Rennes I  
6 rue de Kérampont, BP 80518, 22305 Lannion Cedex  
name@enssat.fr

**Résumé** – Le but de ce papier est de déterminer de manière analytique la puissance du bruit généré par une implémentation virgule fixe des Algorithmes de Projection Affine (APA). Ces algorithmes ont été développés dans les années 80 mais aucune étude de ce type n’a encore été menée. Dans cet article, nous définissons une expression analytique de la puissance du bruit puis celle-ci est appliquée à l’algorithme NLMS-OCF, un type d’Algorithme de Projection Affine. La validité du modèle est ensuite vérifiée par des simulations.

**Abstract** – The aim of this paper is to determine an analytical expression of the noise power generated by a fixed-point implementation of Affine Projection Algorithms (APA). These algorithms were developed 20 years ago but no study has been made about its fixed-point implementation. In this paper, an analytical expression of the noise power is defined and applied to the NLMS-OCF algorithm (an Affine Projection Algorithm). The model accuracy is verified by simulations.

## 1 Introduction

Les filtres adaptatifs sont employés dans de nombreux domaines tels que la réduction de bruit, l’égalisation, la prédiction linéaire et l’évaluation de canal. Les algorithmes développés pour le filtrage adaptatif sont principalement classifiés dans deux catégories. Ils sont basés soit sur les Moindres Carrés Récurrents (type RLS) soit sur les Algorithmes du Gradient (type LMS). Néanmoins, l’algorithme LMS est le plus souvent utilisé pour les applications temps réel embarquées car son implémentation est plus simple que celle de l’algorithme RLS. Cependant, les Algorithmes de Projection Affine (APA) ont été développés [6] pour avoir une convergence plus rapide comparée au LMS et pour réduire la complexité comparée au RLS. La convergence de cet algorithme a été étudiée dans [7] et [8] mais aucune étude n’est disponible sur son comportement avec l’arithmétique virgule fixe. Pour les systèmes embarqués, l’utilisation de l’arithmétique virgule fixe est exigée car elle permet de réduire la consommation d’énergie et le coût par rapport à l’arithmétique virgule flottante. Mais, l’arithmétique virgule fixe se traduit par une erreur non négligeable appelée bruit de quantification. Les différentes sources de bruit de quantification liées à la réduction de la largeur des données sont propagées dans le système et conduisent à un bruit global en sortie de celui-ci. Ces bruits sont modélisés par des bruits blancs uniformément répartis sur leur intervalle de définition et non-corrélés avec les autres signaux et autres bruits [9]. Il est nécessaire de s’assurer que ce bruit ne modifie pas le bon fonctionnement du système. Ainsi, la puissance de bruit doit être évaluée. Celle-ci peut être mesurée par des simulations (mais leur temps d’exécution est important) ou déterminée par une méthode analytique. Des méthodes analytiques ont été développées pour le LMS [2], [5] et pour le RLS [1]. Dans ce papier, un modèle est proposé pour l’APA. La puissance du bruit de quantification est déterminée pour calculer le Rapport Signal à Bruit de Quantification (RSBQ). Ce type d’expression est nécessaire pour réaliser des IP (propriétés intellectuelles)

paramétrables. Ces IP sont utilisées dans le cadre de l’implantation matérielle sur FPGA ou ASIC. L’utilisateur fournit une contrainte de précision à respecter en sortie du filtre. L’objectif est d’optimiser la largeur des données sous contrainte de précision des calculs, afin de minimiser la surface du circuit. Cette approche permet d’aboutir à une bonne adéquation algorithme architecture et à des temps de développement réduits.

L’objectif de ce papier est de déterminer l’expression analytique de la puissance du bruit dans l’algorithme APA pour tous les types de quantification (arrondi, arrondi convergent, troncature). La troncature est la plus utilisée car la plus simple d’implémentation, d’où l’intérêt de développer un modèle prenant en compte cette loi de quantification. Dans le cas de la quantification d’un signal en arrondi convergent, la moyenne du bruit généré est nulle. Si la quantification est faite par troncature, la moyenne  $\mu_{b_y}$  du bruit généré est obtenue à l’aide de l’expression suivante [3]

$$\mu_{b_y} = \frac{q}{2}(1 - 2^{-k}) \quad (1)$$

où  $q$  désigne la pas de quantification et  $k$  le nombre de bits éliminés. Ainsi, dans le modèle développé, il est important de prendre en compte la moyenne des bruits et de ne pas la considérer comme nulle.

L’APA est décrit dans la section 2 et l’expression du bruit de sortie est déterminée analytiquement dans la section 3. Dans la section 4, le modèle est appliqué à l’algorithme NLMS-OCF. Enfin, en section 5, la validité du modèle est testée.

## 2 Implantation Virgule Fixe

En précision infinie, l’APA est défini par les équations suivantes

$$e_n = y_n - \underbrace{X_n^t w_n}_{\hat{y}_n} \quad (2)$$

$$w_{n+1} = w_n + \mu X_n [X_n^t X_n + \delta I_K]^{-1} e_n \quad (3)$$

où  $x_n$  représente le vecteur de taille  $N$  des données d'entrée  $[x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^t$ .  $X_n$  est la matrice de taille  $N \times K$  des  $K$  derniers vecteurs d'observation  $X_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-K+1}]$ . Les termes  $y_n$  et  $e_n$  représentent respectivement, le signal désiré et l'erreur commise et correspondent à des vecteurs de taille  $K$  et  $I_K$  est la matrice identité de taille  $K$ .  $\delta$  est une constante permettant de rendre régulière la matrice  $X_n^t X_n$  et est supposée être une somme de puissance de 2.

Le filtre en virgule fixe est représenté sur la figure 1. Les équations de l'APA deviennent

$$e'_n = y'_n - \underbrace{X_n'^t w'_n}_{\hat{y}'_n} - \eta_n \quad (4)$$

$$w'_{n+1} = w'_n + \mu X_n' [X_n'^t X_n' + \delta I_K]^{-1} e'_n + \gamma_n \quad (5)$$

où les primes dénotent les valeurs quantifiées.

$\gamma_n$  est un vecteur bruit de taille  $N$  dû au calcul de  $X_n' [X_n'^t X_n' + \delta I_K]^{-1} e'_n$ .  $\eta_n$  est un vecteur bruit de taille  $K$  généré par le filtre. Les autres bruits de quantification sont exprimés à l'aide des équations suivantes :

$$X'_n = X_n + \alpha_n \quad (6)$$

$$y'_n = y_n + \beta_n \quad (7)$$

$$[X_n'^t X_n' + \delta I_K]^{-1} = [X_n^t X_n + \delta I_K]^{-1} + \nu_n \quad (8)$$

$$w'_n = w_n + \rho_n \quad (9)$$

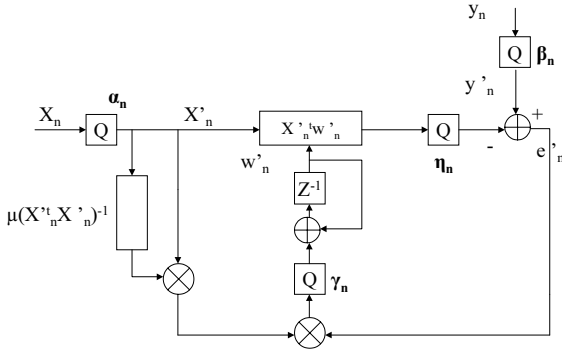


FIG. 1: Schéma de l'APA en virgule fixe

Le terme  $\rho_n$  n'est pas un bruit de quantification mais un écart entre les valeurs des coefficients quantifiés et leurs valeurs non quantifiées. Tel que démontré en [4],  $\nu_n$  est égal à

$$\nu_n = [X_n^t X_n + \delta I_K]^{-2} (\alpha_n^t X_n + X_n^t \alpha_n) + \nu_n \quad (10)$$

où  $\nu_n$  est une matrice d'erreur de taille  $N \times K$  due au calcul en virgule fixe de  $[X_n'^t X_n']^{-1}$ .

### 3 Puissance du bruit

L'objectif de cette partie est d'estimer analytiquement la puissance du bruit généré dans le système. L'expression du bruit en sortie du système est la suivante :

$$\begin{aligned} b_{y_n} &= \hat{y}'_n - \hat{y}_n \\ &= X_n'^t w'_n + \eta_n - X_n^t w_n \\ &= \alpha_n^t w_n + \eta_n + X_n^t \rho_n \end{aligned}$$

Le bruit en sortie du système est donc composé de trois termes. Ceux-ci étant considérés comme non-corrélés, la puissance du bruit en sortie est égale à la somme des puissances de chacun des trois termes.

$$\begin{aligned} Tr(E(b_y b_y^t)) &= Tr(E((\alpha_n^t w_n)(\alpha_n^t w_n)^t)) + Tr(E(\eta_n \eta_n^t)) \\ &\quad + Tr(E((X_n^t \rho_n)(X_n^t \rho_n)^t)) \end{aligned}$$

Ces 3 termes vont être développés dans les parties suivantes.

#### 3.1 Bruit d'entrée

En utilisant les mêmes hypothèses que dans [5], la puissance du bruit lié aux données d'entrée est déterminée par l'expression suivante

$$Tr(E((\alpha_n^t w_n)(\alpha_n^t w_n)^t)) = K \sigma_\alpha^2 w_{opt}^t w_{opt} + K m_\alpha^2 w_{opt}^t 1_N w_{opt} \quad (11)$$

avec  $m_\alpha$  et  $\sigma_\alpha^2$  la moyenne et la variance de  $\alpha_n$ ,  $1_N$  la matrice unitaire de taille  $N$  et  $w_{opt}$  les coefficients optimaux.

#### 3.2 Bruit lié aux coefficients

Le bruit lié aux coefficients correspond au deuxième terme de l'équation (11) et est égal à

$$b_{w_n} = X_n^t \rho_n \quad (12)$$

En écrivant  $P_n = E(\rho_n \rho_n^t)$ , la puissance de ce terme est donnée par

$$Tr(E(b_{w_n} b_{w_n}^t)) = Tr(E(X_n X_n^t) P_n) \quad (13)$$

Or, d'après les équations (4), (6) et l'équation (3), la récursion suivante peut être écrite

$$\rho_{n+1} = F_n \rho_n + b_n \quad (14)$$

où

$$F_n = I_N - \mu X_n [X_n^t X_n]^{-1} X_n^t \quad (15)$$

et

$$\begin{aligned} b_n &= \underbrace{\gamma_n}_{b_{1_n}} + \underbrace{\mu X_n [X_n^t X_n]^{-1} (\beta_n - \eta_n)}_{b_{2_n}} \\ &\quad + \underbrace{\mu \alpha_n [X_n^t X_n]^{-1} e_n}_{b_{3_n}} + \underbrace{\mu X_n \nu_n e_n}_{b_{4_n}} \\ &\quad - \underbrace{\mu X_n [X_n^t X_n]^{-1} \alpha_n^t w_n}_{b_{5_n}} \end{aligned} \quad (16)$$

et avec les hypothèses de non-corrélation entre  $\rho_n$ ,  $F_n$  et  $b_n$ . En supposant qu'à l'état stable,  $P_{n+1} = P_n$ , et avec  $B_n = E(b_n b_n^t)$ , l'équation (14) conduit à

$$\begin{aligned} Tr(E(X_n X_n^t) P_n) &= Tr(E(X_n X_n^t) (I_N - E(F_n F_n^t))^{-1} \\ &\quad [B_n + 2E(F_n)(I_N - E(F_n))^{-1} E(b_n) E(b_n^t)]) \end{aligned} \quad (17)$$

Les termes  $E(F_n F_n^t)$ ,  $E(F_n)$  et  $E(X_n X_n^t)$  peuvent être estimés facilement par une simulation en virgule flottante. Les autres termes peuvent être développés en séparant les termes de bruits et les signaux comme en [5].

### 3.3 Bruit généré par le filtre

Le bruit  $\eta_n$  généré par le filtre est un vecteur de taille  $K$ . En notant  $m_\eta$  sa moyenne,  $\sigma_\eta^2$  sa variance, la trace de sa matrice d'autocorrélation est égale à

$$\text{Tr}(E(\eta_n \eta_n^t)) = K(m_\eta^2 + \sigma_\eta^2) \quad (18)$$

### 3.4 Puissance du bruit

En utilisant les équations (11), (17) et (18), la puissance du bruit global en sortie du système est définie de façon analytique par

$$\begin{aligned} B_y &= K(\sigma_\alpha^2 \sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i}^2 + m_\alpha^2 (\sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i})^2 + m_\eta^2 + \sigma_\eta^2) \\ &+ \text{Tr}\{E(X_n X_n^t)(I_N - E(F_n F_n^t))^{-1} \\ &[B_n + 2E(F_n)(I_N - E(F_n))^{-1}E(b_n)E(b_n^t)]\} \end{aligned} \quad (19)$$

Un modèle analytique de la puissance du bruit en sortie du système a donc été présenté. Dans les parties suivantes, celui-ci sera appliqué au NLMS-OCF puis testé par simulations pour vérifier sa validité.

## 4 Application au NLMS-OCF

L'objectif de cette partie est d'appliquer le modèle précédent à l'algorithme NLMS-OCF. Cet algorithme est un algorithme de projection affine dans lequel les  $K$  dernières observations sont orthogonales. Dans un souci de simplification,  $x_n$  est supposé centré.

Le terme  $E(X_n(X_n^t X_n)^{-1} X_n^t)$  peut être approché par

$$E(X_n(X_n^t X_n)^{-1} X_n^t) \approx \frac{K}{N} I_N \quad (20)$$

### 4.1 Bruit lié aux coefficients dans le NLMS-OCF

Chaque terme de l'équation (17) peut être simplifié

$$(I_N - E(F_n F_n^t)) \approx (2\mu - \mu^2) \frac{K}{N} I_N \quad (21)$$

$$E(X_n X_n^t) \approx K \sigma_x^2 I_N \quad (22)$$

$$(I_N - E(F_n)) \approx \mu \frac{K}{N} I_N \quad (23)$$

En utilisant l'équation (17), le bruit dû aux coefficients est

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(E(X_n X_n^t) P_n) \\ &= \frac{N \sigma_x^2}{(2\mu - \mu^2)} [\text{Tr}(B_n) + 2 \frac{N(1 - \mu \frac{K}{N})}{K \mu} \text{Tr}(E(b_n)E(b_n^t))] \end{aligned} \quad (24)$$

Les termes  $\text{Tr}(B_n)$  et  $\text{Tr}(E(b_n)E(b_n^t))$  doivent être calculés pour déterminer complètement le bruit dû aux coefficients.

En notant  $B_{i_n}$  la matrice d'autocorrélation de chacun des 5 termes  $b_{i_n}$  de l'expression (16), et en supposant qu'ils sont non corrélés entre eux, nous arrivons à

$$\text{Tr}(B_n) = \sum_{i=1}^5 \text{Tr}(B_{i_n}) \quad (25)$$

Par la suite, chaque terme  $B_{i_n}$  est développé.

$$\text{Tr}(B_{1_n}) = \text{Tr}(E(\gamma_n \gamma_n^t)) = K^2 N m_\gamma^2 + K N \sigma_\gamma^2 \quad (26)$$

Ici,  $b_{1_n}$  peut être considéré comme la somme de  $K$  bruits non-corrélés avec la même densité de probabilité.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B_{2_n}) &= \mu^2 \text{Tr}[(\sigma_\beta^2 + \sigma_\eta^2) I_N + (m_\beta^2 + m_\eta^2) 1_N] \times \\ & (E(X_n(X_n^t X_n)^{-2} X_n^t)) \\ &= K \mu^2 (E(\beta^2) + E(\eta^2)) \frac{1}{N \phi_x + N(N-1) \sigma_x^4} \end{aligned} \quad (27)$$

où  $\phi_x$  est le kurtosis du signal d'entrée  $x_n$ .  $b_{2_n}$  peut être exprimé comme la somme de  $K$  bruits.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(B_{3_n}) &= \mu^2 \text{Tr}[(\sigma_\alpha^2 I_N + m_\alpha^2 1_N) \\ & (E((X_n^t X_n)^{-1} e_n e_n^t (X_n^t X_n)^{-1}))] \\ &= K \mu^2 (\sigma_\alpha^2 + m_\alpha^2) \frac{\xi}{N \phi_x + N(N-1) \sigma_x^4} \end{aligned} \quad (28)$$

$b_{3_n}$  est également la somme de  $K$  bruits de moyenne nulle car  $e_n$  est centré. Les deux derniers termes  $B_{4_n}$  et  $B_{5_n}$  peuvent être développés de la même façon.

Ensuite,  $\text{Tr}(E(b_n)E(b_n^t))$  doit être développé. Le terme  $E(b_n)$  est égal à

$$E(b_n) = [K m_\gamma, K m_\gamma, \dots, K m_\gamma]^t \quad (29)$$

Donc  $\text{Tr}(E(b_n)E(b_n^t))$  vaut

$$\text{Tr}(E(b_n)E(b_n^t)) = N K^2 m_\gamma^2 \quad (30)$$

Ce terme peut être interprété comme la somme de  $K$  sources de bruit. Ainsi, chaque terme du NLMS-OCF ( $b_1, b_2, b_3, b_4$  et  $b_5$ ) est la somme de  $K$  bruits.

### 4.2 Bruit lié aux données dans le NLMS-OCF

Dans le NLMS-OCF, comme dans l'équation (11), le bruit lié aux données vaut

$$\text{Tr}(E(\alpha_n \alpha_n^t) W_n) = K \sigma_\alpha^2 \sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i}^2 + K m_\alpha^2 (\sum_{i=0}^{N-1} w_{opt_i})^2 \quad (31)$$

### 4.3 Bruit lié au filtre dans le NLMS-OCF

Comme dans l'équation (18), la puissance du bruit lié au calcul du filtre est

$$\text{Tr}(E(\eta_n \eta_n^t)) = K(m_\eta^2 + \sigma_\eta^2) \quad (32)$$

Dans cette partie, le bruit généré dans l'algorithme NLMS-OCF a été calculé. En analysant les résultats et en comparant au NLMS [5], la puissance du bruit généré dans le NLMS-OCF est égal à  $K$  fois la puissance du bruit généré dans le NLMS.

## 5 Expérimentations

Dans cette partie, la qualité de notre modèle pour estimer le terme  $Tr(E(b_y b_y^t))$  est évaluée. Pour ces expérimentations, des simulations sont faites sur Matlab/Simulink pour les quantifications par troncature et par arrondi. L'erreur relative entre la puissance de bruit obtenue avec une simulation virgule fixe (correspondant à la référence) et la puissance de bruit estimée avec notre modèle décrit à l'équation (19) est calculée. Le signal d'entrée choisi est un processus auto-régressif dans lequel le coefficient de corrélation  $\beta$  entre les données d'entrée varie entre 0 (bruit blanc) et 1 (très corrélé).

### 5.1 APA avec une quantification par troncature

La figure 2 montre la validité du modèle pour  $N$  variant entre 1 et 20,  $K$  variant entre 1 et  $N$  et pour les données d'entrée très corrélées ( $\beta = 0.9$ ). L'erreur relative obtenue est inférieure à 30% ce qui est un bon résultat puisque cela représente une différence de seulement de 2 dB entre la puissance de bruit estimée par la simulation et celle donnée par notre modèle. Cet écart provient des hypothèses simplificatrices faites lors du développement du calcul. Ainsi, ce nouveau modèle développé est valide pour les entrées très corrélées. Pour des entrées peu corrélées, une erreur relative inférieure à 25% est obtenue.

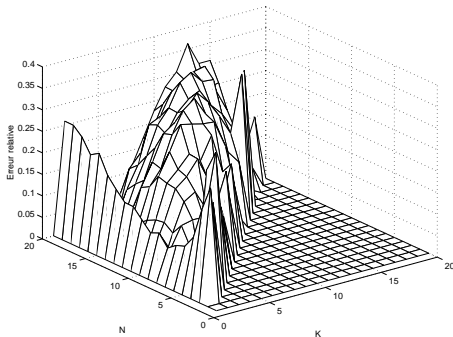


FIG. 2: Erreur relative pour des entrées très corrélées dans le cadre d'une quantification par troncature

### 5.2 NLMS-OCF avec une quantification par arrondi

Les simulations sont faites pour des données d'entrée orthogonales dans le cadre d'une quantification par arrondi. Les résultats sont présentés sur la figure 3. Les paramètres sont les mêmes que ceux définis dans la section 5.1. Comme dans le cas d'une quantification par troncature, notre modèle conduit à une estimation correcte de la puissance du bruit généré puisque l'erreur relative est inférieure à 30%.

## 6 CONCLUSION

Dans cet article, un modèle pour déterminer analytiquement la puissance de bruit en sortie de l'algorithme APA a été présenté. Le modèle est développé pour l'algorithme général et validé par des simulations. L'avantage de ce modèle est sa validité à tous les types de quantification (arrondi ou troncature). Cette

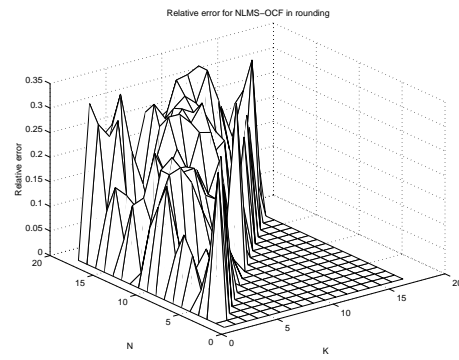


FIG. 3: Erreur relative pour le NLMS-OCF dans le cadre d'une quantification par arrondi

méthodologie, qui a été développée pour les algorithmes LMS et NLMS, est ainsi étendue aux algorithmes APA. Néanmoins, d'autres études doivent être effectuées afin de généraliser cette approche pour tous les types de systèmes et en particulier, les systèmes non linéaires.

## Références

- [1] S.H. Ardalan and S.T. Alexander, "Fixed-Point Roundoff Error Analysis of the Exponentially Windowed RLS Algorithm for Time-Varying Systems", *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol 6, no.1, pp:770-783, 1987.
- [2] C. Caraiscos, B. Liu, "A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm", *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol:32, no.1, pp:34-41, February 1984.
- [3] G. Constantinides, P. Cheung and W. Luk "Truncation Noise in Fixed-Point SFGs", *IEE Electronic Letters*, vol 35, no. 23, pp: 2012-2014, November 1999.
- [4] D. Menard, R. Rocher, P. Scalart and O. Sentieys, "Automatic SQNR determination in non-linear and non-recursive fixed-point systems", *EUSIPCO*, pp:1349-1352, September 2004.
- [5] R. Rocher, D. Menard, O. Sentieys and P. Scalart, "Accuracy Evaluation of Fixed-Point LMS", *ICASSP*, vol: 5, pp: 237 - 240 May 2004.
- [6] K. Ozeki and T. Umeda, "An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties", *Electr. Commun. Jpn.*, vol. 67, pp: 19-27, 1984.
- [7] S.D. Sankaran and A.A. Beex, "Convergence Behavior of Affine Projection Algorithms", *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, vol 48, no.4, pp: 1086-1096, April 2000.
- [8] A.H. Sayed and H.C. Shin "Transient behavior of Affine Projections Algorithms", *ICASSP*, vol 5, pp:90 - 102, January 2004
- [9] B. Widrow and I. Kollár and M.-C. Liu, "Statistical Theory of Quantization", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol 45, no.2, pp:353-361, April 1996.