

# Contrainte de forme invariante aux transformations affines pour les contours actifs orientés région

Alban FOULONNEAU<sup>1</sup>, Pierre CHARBONNIER<sup>1</sup>, Fabrice HEITZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Ponts et Chaussées de Strasbourg  
11 rue Jean Mentelin, BP 9, F-67035 STRASBOURG Cedex, France

<sup>2</sup>LSIIT UMR 7005 CNRS Université de Strasbourg I  
Boulevard Sébastien Brandt, F-67400 ILLKIRCH, France  
[alban.foulonneau@equipement.gouv.fr](mailto:alban.foulonneau@equipement.gouv.fr), [pierre.charbonnier@equipement.gouv.fr](mailto:pierre.charbonnier@equipement.gouv.fr)  
[fabrice.heiz@ensps.u-strasbg.fr](mailto:fabrice.heiz@ensps.u-strasbg.fr)

**Résumé** – Nous présentons une nouvelle façon de contraindre l'évolution d'un contour actif orienté région par rapport à une forme de référence. En minimisant un *a priori* de forme défini comme une distance entre des *descripteurs* constitués des moments de Legendre de la forme, on obtient une équation d'évolution géométrique qui peut être mise à profit dans des applications de segmentation à deux classes. Le modèle proposé permet de gérer des topologies de formes arbitrairement complexes et est intrinsèquement invariant aux transformations affines. Cela résout directement le problème d'alignement et permet la prise en compte de variabilités d'aspect d'origine géométrique.

**Abstract** – We present a new way of constraining the evolution of a region-based active contour with respect to a reference shape. Minimizing a *shape prior*, defined as a distance between *descriptors* based on the Legendre moments of the shape, leads to a geometric flow that can be used with benefits in a two-class segmentation application. The proposed model handles arbitrary shape topologies and is intrinsically invariant w.r.t. affine transformations, which saves from performing explicit pose estimation and allows accounting for geometrical aspect variabilities.

## 1 Introduction

L'introduction de contraintes globales de forme dans les modèles de contours actifs orientés région est un thème de recherche d'actualité (voir [1], chap. 2, pour un état de l'art). L'approche usuelle consiste à ajouter à la fonctionnelle optimisée un terme d'*a priori*, visant à contraindre le contour en évolution à ressembler à une forme de référence.

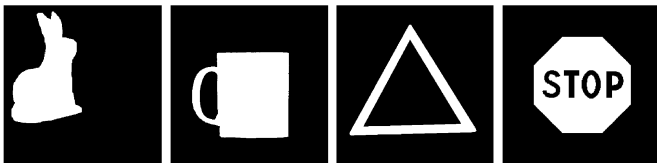


FIG. 1 – Exemples de formes de référence.

Naturellement, deux problèmes se posent : celui de l'alignement des formes et celui de la gestion de variabilités d'aspect. Le premier est généralement traité en prenant en compte les paramètres de pose (translation, rotation, échelle) de manière explicite, ce qui augmente le nombre de degrés de liberté du problème et oblige à une estimation supplémentaire. Les variabilités autorisées sont, la plupart du temps, limitées à celles issues d'un apprentissage statistique. Nous proposons ici une version étendue de la méthode présentée dans [2], où la contrainte que nous définissons est d'ordre géométrique et s'appuie

sur les moments de Legendre. Nous mettons à profit l'information géométrique contenue dans les moments pour rendre l'*a priori* invariant aux transformations affines. On obtient ainsi une équation d'évolution unique, intrinsèquement *affine-invariante*, ce qui résout directement le problème d'alignement et permet la prise en compte de variabilités d'aspect significatives, sans apprentissage.

## 2 Définition d'un *a priori* de forme affine invariant

Notre modèle repose sur une représentation paramétrique des formes à partir des moments de leur fonction caractéristique, jusqu'à un certain ordre, rassemblés dans un vecteur appelé *descripteur*. Cette approche permet de représenter des objets à topologie non triviale de manière hiérarchique [1].

Pour introduire l'invariance aux variations géométriques d'aspect, nous définissons ce que nous appelons une représentation *canonique*. Il s'agit en fait d'un changement de variables tel que deux formes, différant seulement d'un certain type de transformation, soient représentées par le même ensemble de moments. Ainsi, en utilisant cette représentation à la fois pour la forme de référence et pour la forme en évolution, on obtient directement l'invariance à la transformation considérée. Par exemple, dans le cas de l'invariance par translation et changement d'échelle, la représentation canonique d'une forme est obtenue en

alignant son centre de gravité,  $(\bar{x}, \bar{y})$ , sur le centre du domaine et en normalisant son aire,  $|\Omega_{in}|$ , à une valeur constante,  $1/\beta$ . Cela revient à utiliser des moments géométriques centrés normés :

$$\eta_{p,q} = \iint_{\Omega_{in}} \frac{(x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q}{(\beta |\Omega_{in}|)^{(p+q+2)/2}} dx dy, \quad (1)$$

$$\text{avec } \bar{x} = \frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}, \bar{y} = \frac{M_{0,1}}{M_{0,0}} \text{ et } |\Omega_{in}| = M_{0,0} \quad (2)$$

comme nous l'avons proposé dans [2] (où les  $M_{p,q}$  sont les moments classiques ou *réguliers* :  $M_{p,q} = \iint x^p y^q dx dy$ ).

Dans le cas, plus général, de l'invariance affine, considérons tout d'abord l'algorithme dit de *compactage*. Celui-ci consiste à aligner l'ellipse d'inertie de la forme sur les axes du repère cartésien, puis à appliquer un changement d'échelle non-isotrope de façon à transformer cette ellipse en cercle. On montre facilement [3] que deux formes identiques à une transformation affine près ont la même forme *compacte*, à une rotation près. En compensant cette rotation, on obtient la forme *normalisée* [3]. Ainsi, après leur *normalisation*, toutes les formes identiques à des transformations affines près auront la même représentation *canonique*. La *normalisation* correspond à la composition d'une rotation d'angle  $\theta$ , de l'application de facteurs d'échelle  $l_1$  en  $x$  et  $l_2$  en  $y$  et d'une rotation d'angle  $\gamma$ . L'intérêt est que ces paramètres se calculent à l'aide d'expressions analytiques formées à partir des moments géométriques [3, 4] :

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\nu_{1,1}}{\nu_{2,0} - \nu_{0,2}} \right) + \dots \\ + (1 - \text{sign}(\nu_{2,0} - \nu_{0,2})) \cdot \text{sign}(\nu_{1,1}) \cdot \frac{\pi}{4}, \nu_{2,0} - \nu_{0,2} \neq 0 \\ \frac{\pi}{4}, \nu_{2,0} - \nu_{0,2} = 0 \quad \nu_{1,1} > 0 \\ -\frac{\pi}{4}, \nu_{2,0} - \nu_{0,2} = 0 \quad \nu_{1,1} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

et

$$l_{1/2} = \frac{(\nu_{2,0} + \nu_{0,2}) \pm \sqrt{(\nu_{2,0} - \nu_{0,2})^2 + 4\nu_{1,1}^2}}{2} \quad (4)$$

où les  $\nu_{u,v}$  sont les moments centrés d'ordre 2 de la forme originale et

$$\gamma = \tan^{-1} \left( -\frac{M_{1,2}^c + M_{3,0}^c}{M_{0,3}^c + M_{2,1}^c} \right) + (1 - \text{sign}(M_{0,3}^c + M_{2,1}^c)) \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

où les  $M_{u,v}^c$  sont les moments centrés de la forme *compacte*. La *normalisation* d'image, cependant, ne gère pas les réflexions. Celles-ci affectant seulement le signe des moments d'ordre impair, nous choisissons en toute généralité d'imposer le signe des moments d'ordre 3. Au final, notre représentation *canonique* est obtenue à partir de moments géométriques que nous qualifierons d'*affine-invariants* :

$$\eta_{u,v}^A = (\text{sign}(\hat{\eta}_{3,0}^A))^u \cdot (\text{sign}(\hat{\eta}_{0,3}^A))^v \cdot \hat{\eta}_{u,v}^A. \quad (6)$$

où l'expression de  $\eta_{u,v}^A$  est donnée ci-dessous (7). Notons qu'un modèle simplifié, gérant seulement les paramètres de pose et les réflexions<sup>1</sup> peut s'obtenir à partir de (7) en posant  $\gamma = 0$  et  $l_1 = l_2 = 1$ .

<sup>1</sup>prendre en compte les réflexions demeure nécessaire dans ce cas pour éviter toute ambiguïté dans la détermination de  $\theta$ .

De façon à bénéficier des bonnes propriétés des bases orthogonales, nous définissons notre descripteur de forme,  $\lambda^A$ , à partir des moments de Legendre jusqu'à l'ordre  $N$  :  $\lambda^A = \{\lambda_{p,q}^A, p+q \leq N\}$ , plutôt qu'à partir des moments géométriques, sachant qu'il existe une relation linéaire entre les deux types de moments :

$$\lambda_{p,q}^A = C_{pq} \sum_{u=0}^p \sum_{v=0}^q a_{pu} a_{qv} \eta_{u,v}^A. \quad (8)$$

Finalement, notre *a priori* de forme est défini comme une distance entre la courbe en évolution,  $\Gamma$ , et la référence, en termes de descripteurs invariants :

$$J_{forme}(\Omega_{in}) = d(\lambda^A(\Omega_{in}), \lambda_{ref}^A), \quad (9)$$

où  $\Omega_{in}$  est la région intérieure de  $\Gamma$  et  $\lambda_{ref}^A$  est le descripteur associé à la forme de référence. Notre critère étant basé sur une représentation canonique des formes, il est intrinsèquement invariant aux transformations affines. Aucune estimation supplémentaire de paramètres n'est nécessaire.

### 3 Dérivation de l'équation d'évolution du contour contraint

L'équation d'évolution correspondant à la minimisation de  $J_{forme}$  se calcule par la méthode, désormais classique, de dérivation Eulérienne [5, 6]. L'expression de la vitesse obtenue est donnée dans le tableau Tab. 1 et dans [1], où sont détaillés les calculs. Notons qu'on obtient une équation d'évolution unique, dont toutes les composantes se calculent à partir de moments. Nous implantons celle-ci par la méthode des courbes de niveaux [7], qui prend en compte de manière naturelle les changements de topologie du contour au cours de son évolution.

### 4 Application à un problème de segmentation

Afin d'illustrer le comportement de l'*a priori* invariant, nous utilisons une fonctionnelle classique pour la segmentation à deux classes [8] :

$$J_{donnees}(\Omega_{in}, \Omega_{out}) = \iint_{\Omega_{in}} (I(x,y) - \mu_{in})^2 dx dy + \iint_{\Omega_{out}} (I(x,y) - \mu_{out})^2 dx dy, \quad (10)$$

où  $\mu_{in}$  (resp.  $\mu_{out}$ ) est l'intensité moyenne du domaine intérieur (resp. extérieur),  $\Omega_{in}$  (resp.  $\Omega_{out}$ ), et  $I(x,y)$  est l'intensité du pixel. Ces paramètres sont recalculés après chaque étape d'évolution, à partir de la partition générée et de l'image  $I$ . Notre stratégie algorithmique consiste à optimiser dans un premier temps le terme  $J_{donnees}$  seul (ou, éventuellement, avec un terme additionnel de courbure). On introduit ensuite le critère de forme, ce qui conduit à l'équation d'évolution complète :

$$\frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t} = \underbrace{((I - \mu_{in})^2 - (I - \mu_{out})^2)}_{V_{donnees}} + \alpha V_{forme} \mathcal{N}, \quad (11)$$

$$\hat{\eta}_{u,v}^A = \frac{(l_1.l_2)^{\frac{u+v}{4}}}{(\beta|\Omega_{in}|)^{(u+v+2)/2}} \iint_{\Omega_{in}} \left( \frac{((x-\bar{x})\cos\theta + (y-\bar{y})\sin\theta)}{\sqrt{l_1}} \cos\gamma + \frac{((y-\bar{y})\cos\theta - (x-\bar{x})\sin\theta)}{\sqrt{l_2}} \sin\gamma \right)^u \cdot \left( \frac{((y-\bar{y})\cos\theta - (x-\bar{x})\sin\theta)}{\sqrt{l_2}} \cos\gamma - \frac{((x-\bar{x})\cos\theta + (y-\bar{y})\sin\theta)}{\sqrt{l_1}} \sin\gamma \right)^v dx dy. \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \underbrace{\sum_{u,v}^{u+v \leq N} A_{uv}^A \cdot \left( \text{sign}(\hat{\eta}_{3,0}^A) \right)^u \cdot \left( \text{sign}(\hat{\eta}_{0,3}^A) \right)^v \cdot \left( H_{uv}^A + \sum_{i=0}^9 \hat{B}_{uvi}^A \cdot L_i \right)}_{V_{forme}} \mathcal{N},$$

$$A_{uv}^A = 2 \sum_{p,q}^{p+q \leq N} (\lambda_{p,q}^A - \lambda_{p,q}^{Aref}) \cdot C_{pq} a_{pu} a_{qv}, \quad \text{les expressions des } \hat{B}_{u,v,i}^A \text{ sont données dans [1]}$$

$$H_{uv}^A = \frac{(l_1.l_2)^{\frac{u+v}{4}}}{(|\Omega_{in}|)^{(u+v+2)/2}} \left( \frac{((x-\bar{x})\cos\theta + (y-\bar{y})\sin\theta)}{\sqrt{l_1}} \cos\gamma + \frac{((y-\bar{y})\cos\theta - (x-\bar{x})\sin\theta)}{\sqrt{l_2}} \sin\gamma \right)^u \cdot \left( \frac{((y-\bar{y})\cos\theta - (x-\bar{x})\sin\theta)}{\sqrt{l_2}} \cos\gamma - \frac{((x-\bar{x})\cos\theta + (y-\bar{y})\sin\theta)}{\sqrt{l_1}} \sin\gamma \right)^v$$

$$L_0 = 1, L_1 = x, L_2 = y, L_3 = x^2, L_4 = y^2, L_5 = xy, L_6 = x^3, L_7 = y^3, L_8 = x^2y, L_9 = xy^3.$$

TAB. 1 – Détails de l'équation d'évolution associée à la minimisation de  $J_{forme}$  dans le cas de l'invariance affine.

où  $V_{forme}$  est définie dans Tab. (1). Le paramètre  $\alpha$  est fixé par l'utilisateur. L'ordre maximum des moments utilisé,  $N$ , est choisi pour minimiser l'erreur de représentation de la forme de référence (erreur quadratique moyenne entre la forme de référence et sa reconstruction à partir des moments à l'ordre considéré, voir [1] pour plus de détails). Les images de référence employées sont montrées fig. 1. La première expérience, fig. 2, illustre la segmentation d'objets à topologie non triviale, à l'aide d'un modèle simplifié, invariant à la translation et au changement d'échelle. Cette expérience montre également qu'il est possible d'envisager plusieurs stratégies d'initialisation : courbe encadrant grossièrement ou intersectant partiellement l'objet ou initialisation systématique de type « seed snakes » [9]. Il est, d'autre part, souvent possible de s'affranchir complètement du terme classique de courbure. La seconde expérience, fig. 3, illustre la segmentation d'objets ayant subi des déformations affines significatives.

## 5 Conclusion

En utilisant les moments de Legendre pour définir des descripteurs de forme invariants aux transformations affines, nous avons proposé un *a priori* capable de contraindre l'évolution d'un contour actif vers une forme de référence, augmentant la robustesse de la segmentation en présence de bruit, de fonds texturés et d'occultations. L'approche gère naturellement l'alignement des formes, les changements de topologie et les déformations affines. Une extension à des déformations projectives est envisagée.

## Références

[1] A. Foulonneau, "Une contribution à l'introduction de contraintes géométriques dans les contours actifs orien-

tés région," Thèse de Doctorat, ULP (Université Louis Pasteur) - Strasbourg I, France, décembre 2004.

- [2] A. Foulonneau, P. Charbonnier, et F. Heitz, "Contraintes géométriques de formes pour les contours actifs orientés région : une approche basée sur les moments de legendre," *Traitement du Signal*, vol. 21, no. 2, pp. 109–128, septembre 2004, (article invité, numéro spécial GRETSI).
- [3] S. Pei et C. Lin, "Image normalization for pattern recognition," *Image and Vision Computing*, vol. 13, no. 10, pp. 711–723, décembre 1995.
- [4] M. Teague, "Image analysis via the general theory of moments," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 70, no. 8, pp. 920–930, août 1980.
- [5] M. Delfour et J. Zolesio, *Shape and geometries : analysis, differential calculus and optimization*, ser. Advances in design and control. SIAM, 2001.
- [6] S. Jehan-Besson, "Modèles de contours actifs basés région pour la segmentation d'images et de vidéos," Thèse de Doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, janvier 2003.
- [7] S. Osher et J. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependant speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," *Journal of Computational Physics*, vol. 79, no. 1, pp. 12–49, novembre 1988.
- [8] T. Chan et L. Vese, "Active contours without edges," *IEEE Transactions on Image processing*, vol. 10, no. 2, pp. 266–277, février 2001.
- [9] T. McInerney et D. Terzopoulos, "Topologically adaptable snakes," in *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision*, Cambridge, Massachusetts, USA, 20-23 juin, 1995, pp. 840–845.

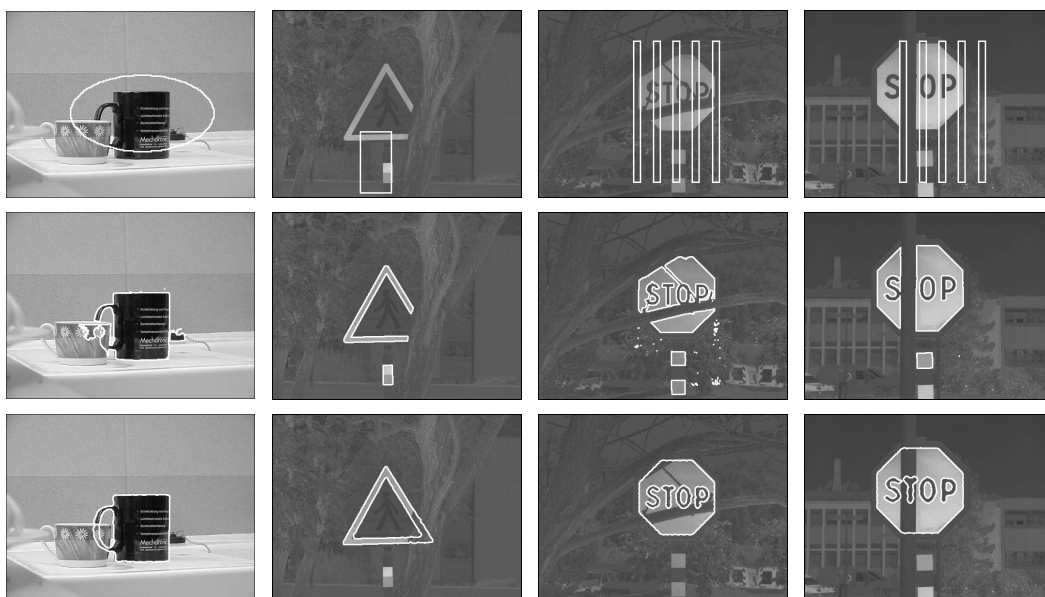


FIG. 2 – Segmentation de formes à topologie complexe (pour les panneaux, on utilise des images de coefficient chromatique rouge). Première ligne : contours initiaux. Seconde ligne : résultats sans contrainte de forme (une contrainte classique de courbure est utilisée seulement dans le cas de la tasse). Troisième ligne : résultats finaux, en ajoutant notre *a priori* jusqu'à l'ordre 40 dans le cas de la tasse et du panneau *stop* et jusqu'à l'ordre 43 pour le panneau triangulaire.

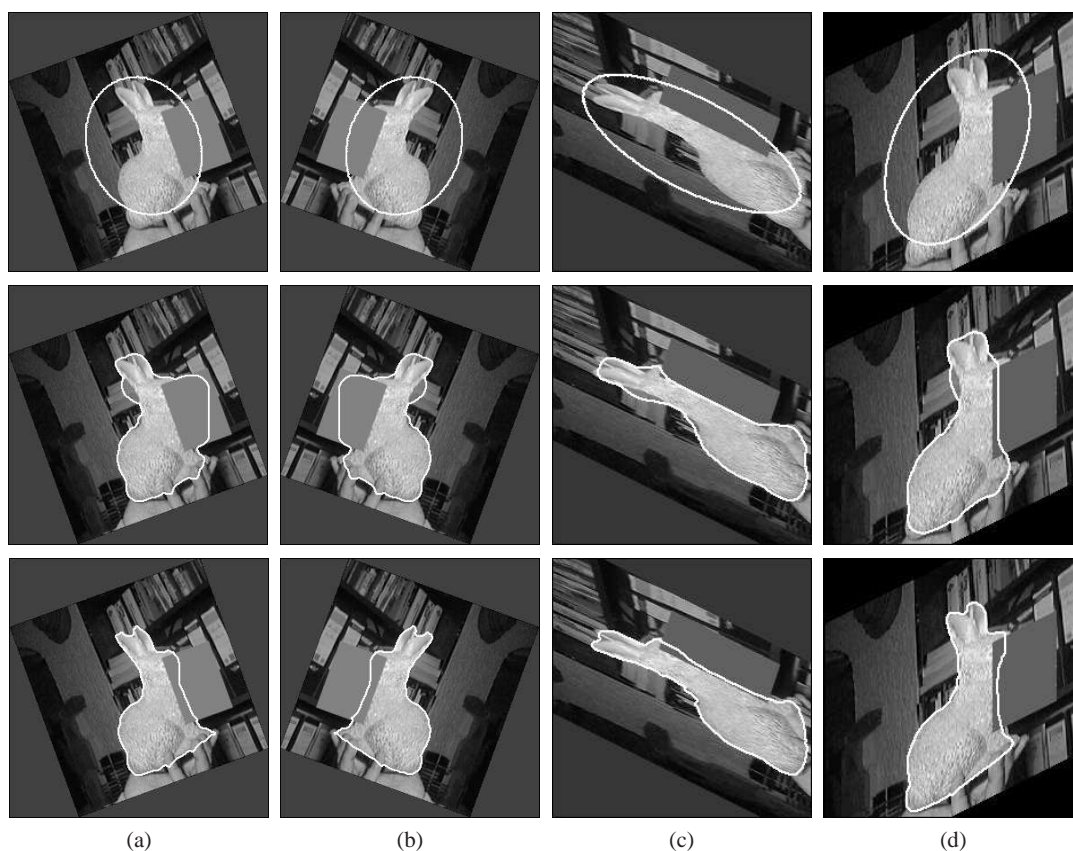


FIG. 3 – Segmentation d'un objet ayant subi des déformations affines. Première ligne : contours initiaux . Seconde ligne : résultats sans contrainte de forme (seule, une contrainte classique de courbure est mise en œuvre). Troisième ligne : résultats finaux, en ajoutant notre *a priori* jusqu'à l'ordre 40. Dans les expériences (a) et (b), l'*a priori* est invariant à la translation, la rotation, le changement d'échelle et les réflexions. Dans les expériences (c) et (d), le modèle affine complet est utilisé.