

Synthèse de champs scalaires multifractals : application à la synthèse de texture.

Pierre CHAINAIS, Jian-Jin LI

LIMOS UMR 6158 - Université Clermont-Ferrand II
ISIMA - Campus des Cézeaux
63173 Aubière, France

pierre.chainais@isima.fr, jianjin.li@isima.fr

Résumé – Nous étendons la définition des cascades infiniment divisibles de 1 à $N \geq 2$ dimensions et résumons leurs principales propriétés (distributions, lois d'échelle...). Nous obtenons une méthode originale de synthèse de champs scalaires stochastiques multifractals dans un espace à N dimensions. L'implémentation de cette méthode s'avère très simple. En dimension $N = 2$, l'application à la synthèse de textures illustre la richesse des propriétés de ces processus. Nous obtenons une classe de textures possédant de nombreux degrés de liberté et permettant la synthèse directement sur une surface courbe, par exemple sur une sphère. D'autres applications sont envisagées en imagerie, en turbulence, en astrophysique...

Abstract – We generalize the definition of infinitely divisible cascades from 1 to $N \geq 2$ dimensions and review their main properties (distributions, scaling laws...). We obtain an original method to synthesize multifractal stochastic scalar fields in an N dimensional space. The implementation of this method is quite simple. In dimension $N = 2$, the application to texture synthesis illustrates the versatility of these processes. We get a class of textures having a large number of degrees of freedom which allows to synthesize directly on a curved surface, for instance on a sphere. Various applications are considered in image processing, turbulence, astrophysics...

1 Introduction

Un ensemble de travaux récents [3, 4, 7, 8, 19] a introduit la famille des *cascades infiniment divisibles*, une vaste classe de processus multifractals possédant de “bonnes propriétés” (accroissements stationnaires, lois d'échelles continues). Cependant, ces processus n'ont jusqu'à présent été définis qu'en dimension 1 dans le but de modéliser des séries temporelles $X(t)$ issues par exemple d'écoulements turbulents en mécanique des fluides ou de données de télétrafic internet. Disposer d'un modèle pour des champs scalaires multifractals dans un espace à N dimensions élargirait le champ d'action de cet outil et ouvrirait de nouvelles perspectives.

Plus précisément, pour un processus scalaire positif $X(\mathbf{x})$ défini sur \mathbb{R}^N , l'analyse multifractale utilise souvent le comportement des moyennes par boîte sur des boules de rayon r et de volume V_r

$$\varepsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r} \int_{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r} X(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1)$$

En résumé, l'invariance d'échelle est alors décrite par un ensemble d'exposants multifractals $\tau(q)$ définis par :

$$\mathbb{E}[\varepsilon_r(\mathbf{x})^q] \propto r^{\tau(q)}. \quad (2)$$

Lorsque le formalisme multifractal est vérifié [20], une simple transformation de Legendre relie ces exposants $\tau(q)$ au spectre multifractal $D(h)$ du processus $X(\mathbf{x})$:

$$D(h) = \min_{q \in \mathbb{R}} [qh - \tau(q)] \quad (3)$$

Le spectre multifractal nous informe sur la nature et l'importance des singularités présentes dans le processus $X(\mathbf{x})$. L'objectif est de disposer d'une méthode de synthèse de processus vérifiant des lois d'échelle prescrites telles que celles décrites par (2), ce qui revient à prescrire le spectre multifractal $D(h)$ si l'on considère la relation (3).

Le passage en dimension $N \geq 2$ offre un éventail de degrés de liberté supplémentaires. Pour illustrer l'intérêt et la richesse de cette classe de processus, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas $N = 2$ qui mène naturellement à la synthèse de textures si l'on interprète le processus comme un niveau de gris ou un champ de déformation. La synthèse de texture est essentiellement le domaine réservé des infographistes qui ont développé un large panel de méthodes [11]. Notons que la plupart des méthodes stochastiques existantes reposent sur l'utilisation du mouvement Brownien fractionnaire ou de ses variantes [9, 13–15], ce qui n'est pas le cas ici.

2 Cascades infiniment divisibles en dimension N

Définir les cascades infiniment divisibles revient à construire la densité d'une mesure multifractale $Q_\ell(t)$ grâce à une cascade multiplicative généralisée. Cette construction repose notamment sur l'utilisation d'un cône de sommet $(t, r = 0)$ dans le demi-plan temps-échelle en dimension 1. Il s'avère que cette construction s'étend de manière très naturelle de 1 dimension à N dimensions pour obtenir un

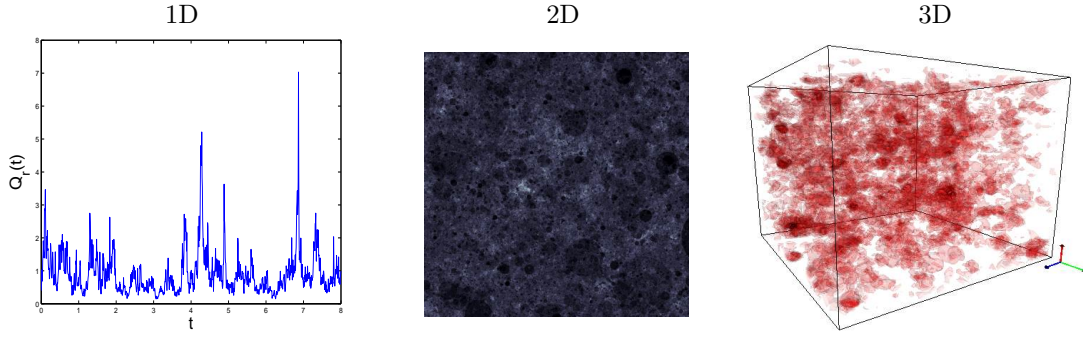


FIG. 1 – Exemples de cascades infiniment divisibles respectivement en dimensions 1, 2 et 3.

champ scalaire multifractal $Q_\ell(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, ayant lui aussi de “bonnes propriétés”. Des exemples de réalisations sont présentés figure 1.

Définition 1.

Soit \mathcal{P}^+ le demi espace-échelle $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$. Soit G une distribution infiniment divisible de fonction génératrice des moments $\tilde{G}(q) = e^{-\rho(q)}$. Soit M une mesure stochastique additive¹ infiniment divisible indépendamment distribuée par G , de support \mathcal{P}^+ , associée à sa mesure de contrôle $dm(\mathbf{x}, r)$ (par ex. $dm(\mathbf{x}, r) = d\mathbf{x}dr/r^{N+1} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$). Un cône d’influence $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$ est défini pour chaque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ par $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{x}', r') : \ell \leq r' \leq 1, \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| < r'/2\}$ – fig. 2.

Une cascade infiniment divisible $Q_\ell(\mathbf{x})$ de résolution $\ell \in]0, 1[$ est définie par :

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\exp M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))}{\mathbb{E}[\exp M(\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x}))]} \quad (4)$$

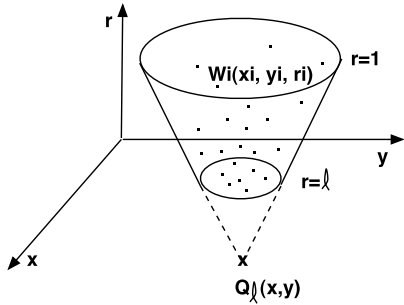


FIG. 2 – Construction “espace-échelle” d’une cascade infiniment divisible $Q_\ell(\mathbf{x})$. Une cascade Poisson composée Q_ℓ est le produit des multiplicateurs aléatoires $W_i(x_i, y_i, r_i)$ appartenant au cône $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$.

Il faut noter que la grande échelle dans la définition de $\mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})$ est ici arbitrairement fixée à 1 sans perte de généralité. Choisir une grande échelle $L \neq 1$ revient simplement au changement d’unité $(\mathbf{x}, r) \rightarrow (\mathbf{x} \cdot L, r \cdot L)$. La loi G peut être par exemple la loi Normale, la loi de Poisson, une loi de Poisson composée, une loi Gamma... Le choix est

¹La mesure stochastique M est telle que

$$\mathbb{E}[\exp [qM(\mathcal{E})]] = \exp [-\rho(q)m(\mathcal{E})].$$

Pour tout couple de sous-ensembles disjoints \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 de \mathcal{P}^+ , $M(\mathcal{E}_1)$ et $M(\mathcal{E}_2)$ sont des variables aléatoires indépendantes telles que $M(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = M(\mathcal{E}_1) + M(\mathcal{E}_2)$.

large puisque la plupart des lois connues sont infiniment divisibles [12]. La synthèse s’avère particulièrement simple dans le cas des lois de Poisson composées, une famille très vaste de distributions infiniment divisibles [5, 8, 19]. Elle se décompose alors en trois grandes étapes : le tirage d’une réalisation d’un processus ponctuel $\{(\mathbf{x}_i, r_i)\}$ dans un domaine du demi espace-échelle $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$; le tirage des multiplicateurs W_i selon la loi choisie ; le calcul de $Q_\ell(\mathbf{x}) \propto \prod_{(\mathbf{x}_i, r_i) \in \mathcal{C}_\ell(\mathbf{x})} W_i$.

L’expression des moments de Q_ℓ est une conséquence immédiate de la définition :

$$\mathbb{E}[Q_\ell^q] = \exp[-\varphi(q)m(\mathcal{C}_\ell)]. \quad (5)$$

On en déduit que, lorsque $dm(\mathbf{x}, r) = d\mathbf{x}dr/r^{N+1} \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(r)$ et $\ell \ll 1$, ces cascades infiniment divisibles $Q_\ell(\mathbf{x})$ ont précisément un comportement en lois d’échelles tel que celui décrit par (2) dans la gamme d’échelles $\ell \leq r \ll 1$ avec

$$\tau(q) = \rho(q) - q\rho(1) \quad (\tau(1) = 0). \quad (6)$$

Rappelons que la gamme des valeurs de q dans laquelle ce comportement est bien défini est contrainte d’une part par l’existence de $\rho(q) = -\ln \tilde{G}(q)$ mais aussi par les limites imposées par l’effet de linéarisation décrit dans [17] que l’on observe en dimension N : les bornes (q_-^*, q_+^*) sont solution de $\tau(q) - q\tau'(q) = N$.

De plus, ces processus sont homogènes, définis continûment en espace et en échelle, et isotropes. D’un point de vue théorique, toutes ces propriétés sont de “bonnes propriétés”. Cependant, notamment en vue de l’application à la synthèse de texture, nous aimerions introduire une inhomogénéité ou une anisotropie contrôlée.

Une possibilité consiste à étendre la définition 1 ci-dessus au cadre plus général suivant :

Définition 2 (avec noyau d’intégration).

Soit $f(\mathbf{x})$ une fonction positive à support compact centrée en zéro. On pose :

$$Q_\ell(\mathbf{x}) = \frac{\exp \int f\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r}\right) dM(\mathbf{x}', r')}{\mathbb{E}[\exp \int f\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{r}\right) dM(\mathbf{x}', r')]} \quad (7)$$

Ainsi, la géométrie de la fonction $f(\mathbf{x})$ permettra d’introduire de l’anisotropie (d’où des effets visuels intéressants en 2D ou 3D) si $f(\mathbf{x})$ a un comportement variable en fonction de la direction de \mathbf{x} . Un exemple simple consiste à remplacer le cône circulaire de la définition 1 par un cône elliptique, un rectangle, ou plus généralement un motif quelconque. On peut de plus envisager de faire varier la

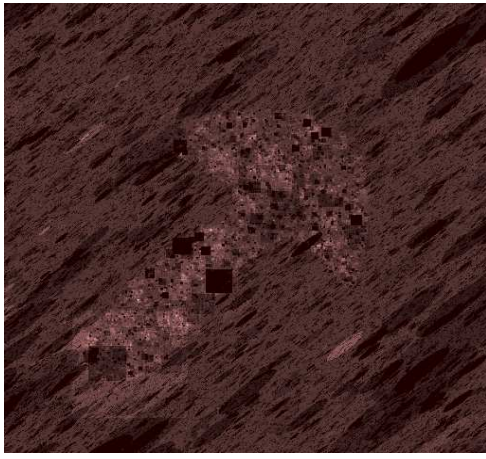


FIG. 3 – Exemple de cascade infiniment divisible avec un noyau d’intégration $f(\mathbf{x})$ variant en fonction de la position. On utilise ici respectivement un carre et une ellipse.

fonction $f(\mathbf{x})$ d’un endroit à l’autre et de contrôler localement le processus. La figure 3 illustre ces possibilités.

De plus, la régularité de la fonction $f(\mathbf{x})$ permettra de contrôler les petites échelles et d’atténuer par exemple les discontinuités qui peuvent apparaître lorsqu’on utilise la définition 1. On pourra typiquement utiliser une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact de somme 1 (ex : $f(\mathbf{x}) = 2\cos^2(\pi\|\mathbf{x}\|)$ pour $\|\mathbf{x}\| < 1/2$) au lieu de la fonction cylindrique $\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{x}\| < 1/2\}}$. Une plus grande régularité aux petites échelles donne souvent un résultat visuel plus agréable, avec notamment des contours moins marqués. La comparaison entre la figure 3 (noyaux discontinus) et la figure 4 (noyaux \mathcal{C}^∞) illustre cet effet. Une présentation plus détaillée est donnée dans [5].

3 Applications

Les cascades infiniment divisibles fournissent une méthode très souple de synthèse de champs scalaires multifractals. La richesse de cette classe de processus leur confère un grand intérêt potentiel pour la modélisation (ex : modèle de bruit, champs scalaires turbulents, matériaux poreux...).

En dimension 2, ces modèles sont de bons candidats pour la modélisation des images naturelles [5, 6, 21] qui présentent des *propriétés d’invariance d’échelle* très similaires. Les propriétés des cascades infiniment divisibles se révèlent aussi particulièrement adaptées à la synthèse de texture. La densité $Q_\ell(\mathbf{x})$ peut être interprétée au choix comme un niveau de gris ou une altitude entre autres. Par conséquent, nous disposons d’une méthode de synthèse procédurale de textures multifractales, homogènes (stationnaires dans le cas 1D), définies continûment en espace et en échelle, isotropes (définition 1) ou non (définition 2).

Le caractère procédural de la synthèse permet d’éviter toute limitation de taille ou apparition d’artefact lié à la répétition de motifs de base. La construction est continue, à la fois en espace et en échelle, et ne fait pas intervenir de grille dyadique par exemple. L’information peut ainsi

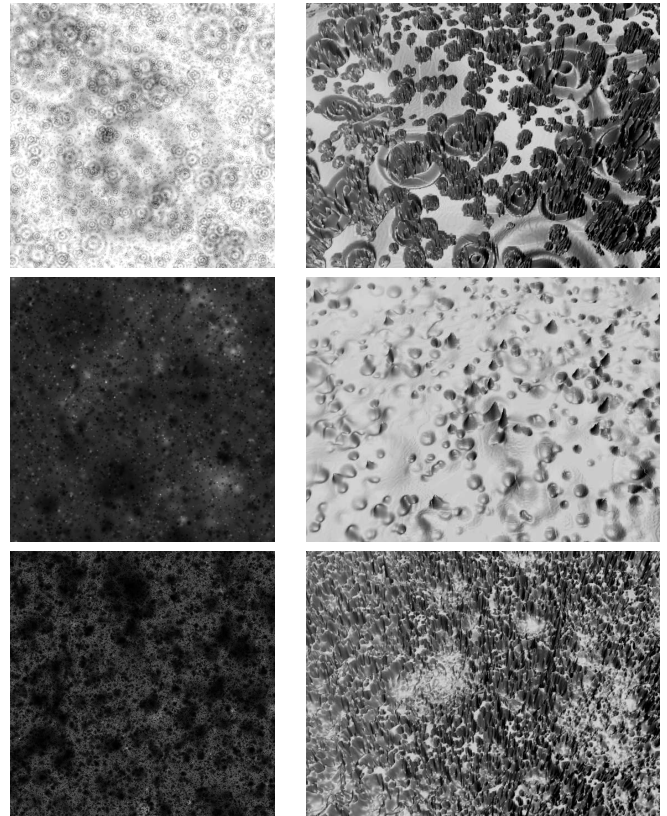


FIG. 4 – Exemples de textures issues de cascades Poisson composées : représentations respectivement en niveaux de gris (à g.) et en champ de déformation 3D (à dr.).

être générée à un *niveau de détail arbitrairement petit*. En pratique, on peut “zoomer” à l’infini sur une texture en générant progressivement les détails nécessaires. On peut aussi abandonner l’homogénéité pour contrôler localement les propriétés de la texture (noyau d’intégration, résolution, grande échelle, distribution $G...$) en respectant des contours quelconques prescrits – fig. 3.

On peut intégrer à leur définition un motif géométrique de base prescrit par le noyau d’intégration $f(\mathbf{x})$ et ainsi *introduire de l’anisotropie* – fig. 3. Cette anisotropie peut éventuellement n’être que locale si l’on applique en plus à chaque terme $f((\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)/r_i)$ une rotation aléatoire (d’angle θ_i) rendant la texture globalement isotrope.

Enfin, la méthode de synthèse s’adapte facilement aux *surfaces courbes* (ex : sphère) en évitant les problèmes d’aliasing et les artefacts d’un mapping classique. On obtient ainsi une texture directement sur la sphère sans apparition de pôles ni équateur –figure 5.

Les cascades infiniment divisibles semblent bien convenir à la synthèse de textures invariantes d’échelle, mais ne sont pas forcément adaptées à la synthèse de textures quelconques. Pour une mise en pratique, il faut d’abord disposer d’outils d’analyse suffisamment précis qui permettront de s’assurer de leur pertinence pour modéliser une texture particulière. Les nombreux travaux de développement d’estimateurs pour l’analyse multifractale de ces dernières années sont alors un outil précieux. On peut désormais caractériser assez précisément une texture multifractale [1, 2, 16, 18] à l’aide de son spectre multifractal, ses dis-

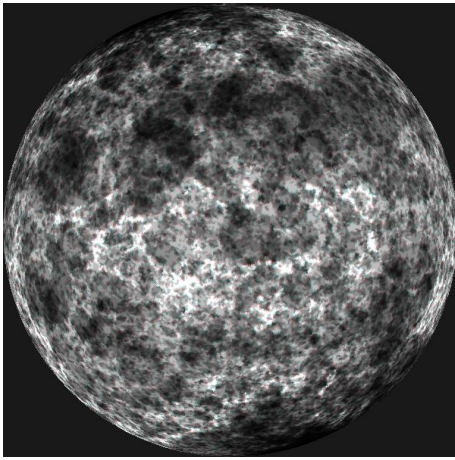


FIG. 5 – Exemple d’une texture générée directement sur la sphère (niveaux de gris).

tributions marginales, son comportement dans différentes directions...

Dans le cadre d’une modélisation physique, donc à but scientifique, les propriétés statistiques priment sur le rendu esthétique et une telle analyse fixe assez de paramètres pour que la validation de toutes ces propriétés soit suffisamment satisfaisante. Nous travaillons actuellement à la modélisation d’images du soleil dans l’extrême ultraviolet provenant du télescope spatial EIT embarqué par la mission SoHO [10].

Dans le cadre de l’infographie, le rendu visuel passe avant tout. Si l’adéquation des propriétés statistiques assure souvent une grande similitude visuelle entre la texture initiale et la cascade infiniment divisible synthétique, l’œil demeure un outil d’analyse extrêmement exigeant. Le développement logiciel d’un réel outil d’infographie utilisant les cascades infiniment divisibles nécessitera certainement encore des efforts importants, dont par exemple la création d’une base d’images de référence pour différents jeux de paramètres (dans cet esprit, voir par exemple www.allegorithmic.com).

Logiciels : un ensemble de fonctions en MATLAB, C et OpenGL permettant la synthèse et la visualisation en 2D et en 3D seront prochainement disponibles sur notre page Web.

Références

- [1] P. Abry, S. Jaffard, and B. Lashermes. Revisiting scaling, multifractal and multiplicative cascades with the wavelet leader lens. In *Proc. of SPIE on Wavelet Applications in Industrial Processing II*, volume 5607, Philadelphia, USA, 2004.
- [2] A. Arneodo, N. Decoster, P. Kestener, and S.G. Roux. *A wavelet-based method for multifractal image analysis : from theoretical concepts to experimental applications.*, volume 126 of *Advances in Imaging and Electron Physics*, pages 1–98. Academic Press, 2003.
- [3] E. Bacry and J.F. Muzy. Log-infininitely divisible multifractal processes. *Comm. in Math. Phys.*, 236 :449–475, 2003.
- [4] J. Barral and B. Mandelbrot. Multiplicative products of cylindrical pulses. *Probab. Theory Relat. Fields*, 124 :409–430, 2002.
- [5] P. Chainais. Multi-dimensional infinitely divisible cascades. In preparation.
- [6] P. Chainais. Multi-dimensional infinitely divisible cascades to model the statistics of natural images. In *Proc. of Int. Conf. on Image Proc.*, 2005.
- [7] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. Scale invariant infinitely divisible cascades. In *Int. Symp. on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France*, January 2003.
- [8] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. On non scale invariant infinitely divisible cascades. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(3), March 2005.
- [9] S. Deguy and A. Benassi. A flexible noise model for designing maps. In *Vision, Modelling and Visualization (VMV01)*, Stuttgart, Germany, November 2001.
- [10] J.-P. Delaboudinière and the EIT Team. EIT : Extreme-Ultraviolet Imaging Telescope for the SOHO Mission. *Solar Physics*, 162 :291–312, 1995.
- [11] D.S. Ebert, F.K. Musgrave, D. Peachey, K. Perlin, and S. Worley. *Texturing and Modeling*. Morgan Kaufmann ; International Thomson, San Francisco, CA, 2003.
- [12] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 2. John Wiley and Sons, Inc., New-York, London, Sidney, 1966.
- [13] Alain Fournier, Don Fussell, and Loren Carpenter. Computer rendering of stochastic models. *Commun. ACM*, 25(6) :371–384, 1982.
- [14] S. Haruyama and B.A. Barsky. Using stochastic modeling for texture generation. *IEEE Comput. Graphics Appl.*, pages 7–19, March 1984.
- [15] Lance M. Kaplan and C.-C. Jay Kuo. Texture roughness analysis and synthesis via extended self-similar (ESS) model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(11) :1043–1056, 1995.
- [16] P. Kestener. *Analyse multifractale 2D et 3D à l’aide de la transformation en ondelettes : application en mammographie et en turbulence développée*. PhD thesis, Université de Bordeaux I, 2003.
- [17] B. Lashermes, P. Abry, and P. Chainais. New insights into the estimation of scaling exponents. *Int. J. of Wavelets, Multires. and Info. Proc.*, 2(4) :497–523, 2004.
- [18] B. Lashermes, S. Jaffard, and P. Abry. Wavelet leaders based multifractal analysis. In *Proc. of Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, Philadelphia, USA, 2005.
- [19] J.F. Muzy and E. Bacry. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infininitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [20] R. H. Riedi. *Multifractal Processes*, pages 625–716. Birkhauser, 2003. eds Doukhan, Oppenheim and Taqqu.
- [21] A. Srivastava, A.B. Lee, E.P. Simoncelli, and S.-C. Zhu. On advances in statistical modeling of natural images. *Journal of mathematical imaging and vision*, 18 :17–33, 2003.