

CDMA, OFDM, MC-CDMA, quel choix pour une voie descendante ?

N. HICHERI, M. TERRE, B. FINO

Conservatoire National des Arts et Métiers 292 rue saint Martin, 75141 Paris Cedex 03

hicherinizar@hotmail.com, terre@cnam.fr, fino@cnam.fr

Résumé – Cet article propose une démarche comparative de différentes formes d'onde candidates pour une voie descendante de radiocommunications. Partant d'un formalisme général pour le DS-CDMA, l'OFDM et le MC-CDMA, les comportements de ces formes d'onde vis à vis d'erreurs de fréquence ou de bruit de phase sont analysés.

Abstract – This paper proposes a comparative study of different waveforms that could be used for the downlink part of a radiocommunication system. Using an unified formalism the paper analyses how DS-CDMA, OFDM and MC-CDMA could resist to frequency error and phase noise.

1. Introduction

Selon qu'il s'agisse de GSM, d'IS95, d'UMTS, d'HiperlanII, de DVB-T, ou d'autres systèmes d'accès radio, la couche physique est à chaque fois différente. Pourtant, dans le cas de la voie descendante, c'est à dire du réseau vers l'utilisateur, le problème est à peu près de même nature. La différence principale vient de la mobilité du récepteur. Celle-ci est très réduite ou quasiment inexistante dans le cas d'une diffusion de télévision terrestre (DVB-T) ou dans le cas d'un réseau WLAN (HiperlanII, 802.11a), elle est par contre importante dans le cas des systèmes de téléphonie mobile de deuxième génération (GSM, IS95) ou de troisième génération (UMTS). Dans le cas du récepteur à faible mobilité ce sont des solutions multiporteuses de type OFDM qui ont été normalisées tandis que dans le cas de récepteurs à forte mobilité ce sont des approches DS-CDMA qui ont été retenues. Peut-on en conclure une règle générale qui consisterait à dire que lorsqu'un canal varie rapidement il faut l'occuper globalement avec une approche DS-CDMA et mettre en place un égaliseur à la réception et que, a contrario, lorsque le canal varie lentement il est préférable de le décomposer en sous porteuses, d'optimiser l'occupation de chaque sous bande en utilisant éventuellement une voie de retour, de placer un intervalle de garde et d'avoir ainsi une simple correction dans le domaine fréquentiel à la réception.

Cette thèse est séduisante, elle peut expliquer les différentes normalisations mais il est difficile de la justifier théoriquement. De plus, l'apparition des approches MC-CDMA complique singulièrement le débat.

Cet article essaye de mener une étude comparative des trois solutions : DS-CDMA, OFDM, MC-CDMA, pour une voie descendante. Un formalisme commun est utilisé et, afin de se placer dans les mêmes conditions, un intervalle de garde est appliqué aussi bien en OFDM qu'en DS-CDMA ou en MC-CDMA. L'article analyse le comportement de ces trois formes d'onde vis à vis d'une erreur de fréquence ou d'un phénomène de bruit de phase.

2. Notation

Considérons un time slot d'une voie descendante durant lequel plusieurs trains binaires "descendent" en parallèle. A un instant donné un vecteur de symboles de communications vont donc être transmis simultanément. On introduit alors le vecteur :

$$X(nT_s) = [x_1^*(nT_s) \quad x_2^*(nT_s) \quad \dots \quad x_N^*(nT_s)]^H \quad (1)$$

représentant les N symboles qui vont être transmis durant un temps T_s , ce qui conduit à un temps "échantillon" $T_e = \frac{T_s}{N}$.

L'étalement peut alors simplement être formalisé par une transformation matricielle du vecteur $X(nT_s)$ en un vecteur $Y(nT_s)$ au moyen d'une matrice $Z(nT_s)$ constituée par les séquences d'étalement utilisées pour les différents symboles. La $k^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice représente la séquence utilisée pour le symbole $x_k(nT_s)$.

$$Y(nT_s) = Z(nT_s)X(nT_s) \quad (2)$$

Cette approche matricielle permet de rendre compte de tous les systèmes existants :

- le TDMA correspond simplement à $Z(nT_s) = I$ (matrice identité),
- l'OFDM à $Z(nT_s) = F$, où F représente une matrice de

Fourier avec $F = (f_{n,m})_{\substack{n \in [0, N-1] \\ m \in [0, N-1]}}$ avec $(f_{n,m}) = e^{j \frac{2\pi n m}{N}}$

- le DS-CDMA à $Z(nT_s) = D(nT_s)H$, où $D(nT_s)$ est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs d'une longue séquence aléatoire de type séquence de Gold et où H représente une matrice de Hadamard.
- le MC-CDMA à $Z(nT_s) = FD(nT_s)H$
- l'OVSF (Orthogonal Variable Spreading Factor) de l'UMTS à $Z(nT_s) = D(nT_s)H_{ovsf}$ où H_{ovsf} est une matrice dont les colonnes peuvent être constituées par

des séquences de Hadamard de longueurs inférieures à N mais complétées par des zéros.

En prenant comme hypothèse que la réponse impulsionnelle du canal est invariante durant le temps symbole T_s et en considérant l'interpolation de cette réponse au rythme échantillon, elle s'écrit :

$$c(nT_s) = \sum_{k=0}^L \alpha_k(nT_s) \delta(nT_s - \tau_k) \quad (3.)$$

avec $\tau_k = kT_e$

Avec l'insertion d'un intervalle de garde à l'émission et la suppression de cet intervalle à la réception, l'influence du canal de propagation ne fait intervenir que les symboles du vecteur $X(nT_s)$. Le canal peut alors être représenté matriciellement par :

$$C(nT_s) = \sum_{k=0}^L \alpha_k(nT_s) \mathbf{J}^k \quad (4.)$$

dans cette expression, la matrice J de taille (NxN) est définie de la manière suivante :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathbf{I}_{(N-1) \times (N-1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.)$$

Finalement, le signal reçu, après suppression de l'intervalle de garde s'écrit :

$$R(nT_s) = C(nT_s) \mathbf{Z}(nT_s) X(nT_s) + B(nT_s) \quad (6.)$$

dans cette expression, $B(nT_s)$ représente un vecteur complexe d'échantillons indépendants de bruits blancs. Chaque échantillon complexe ayant une variance égale à $\sigma^2 = \frac{N_0}{T_s}$ où N_0 représente la densité spectrale de puissance de bruit.

Pour simplifier les écritures, on omet dorénavant de préciser qu'il s'agit de l'intervalle temporel $[nT_s, (n+1)T_s]$, l'équation devient alors :

$$R = \mathbf{CZ}X + B \quad (7.)$$

Grâce à l'intervalle de garde, toute l'information nécessaire pour estimer le vecteur X est contenue dans le vecteur R qui est donc exhaustif pour déterminer l'estimation \hat{X} du signal transmis.

3. Les différents récepteurs

Le récepteur optimal au sens des moindres carrés (**MMSE**), doit identifier une matrice W de séquences de désétalement, qui, appliquée au vecteur R , conduit à une erreur quadratique minimale entre X et \hat{X} .

$$W / \text{Min } E \left[\left| W^H R - X \right|^2 \right] \quad (8.)$$

En supposant que tous les symboles de communications sont indépendants, blancs et de puissance unité, c'est à dire que :

$$E \left[X X^H \right] = \mathbf{I} \quad (9.)$$

La solution de l'équation (8) s'écrit alors :

$$W_{mmse} = \left(\mathbf{CZ} \mathbf{Z}^H \mathbf{C}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Z} \quad (10.)$$

L'hypothèse de symboles de puissance identique peut être remise en cause en remplaçant la matrice identité de

l'équation (9) par une matrice diagonale dont les termes représentent les puissances moyennes des différents symboles.

Certaines références [1] décomposent la matrice W en un produit d'une matrice G d'égalisation par la matrice Z de désétalement, on a alors :

$$W = G^H \mathbf{Z} \quad (11.)$$

avec :

$$G = \mathbf{C}^H \left(\mathbf{CZ} \mathbf{Z}^H \mathbf{C}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \right)^{-H} \quad (12.)$$

Dans le cas de l'**OFDM** [2], le récepteur communément utilisé est constitué par une FFT suivie d'une division de chaque sortie de la FFT par la Transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du canal à la fréquence de cette sortie. Matriciellement le récepteur s'écrit donc :

$$W_{ofdm} = \mathbf{C}^{-H} \mathbf{Z} \quad (13.)$$

ce qui s'obtient simplement en considérant $\sigma^2 = 0$ dans l'équation (10). Ce traitement correspond au récepteur ORC (Orthogonal Restoring Combining) [1][3].

Dans le cas du CDMA, il est souvent fait état du récepteur **RAKE** ou MRC (Maximum ratio Combining) qui n'est autre que :

$$W_{rake} = \mathbf{C} \mathbf{Z} \quad (14.)$$

4. Résistance à un écart de fréquence

L'écart de fréquence entre le synthétiseur de réception et celui d'émission est une difficulté à laquelle sont confrontés de manière quasi systématique les récepteurs de radiocommunications. Il est alors légitime de s'interroger sur la résistance de la forme d'onde à cet écart et de se demander si le DS-CDMA ne laisserait pas apparaître une meilleure résistance que l'OFDM [4][9]. L'écart de fréquence se formalise simplement par l'introduction d'une matrice diagonale Φ définie par :

$$\Phi_{mn} = e^{j 2\pi \Delta f T_s \frac{n}{N}} \quad (15.)$$

où Δf représente l'écart de fréquence.

Le signal reçu s'écrit alors :

$$R = \Phi (\mathbf{CZ}X + B) \quad (16.)$$

En considérant une transmission sur canal AWGN, le récepteur OFDM ou le récepteur Rake sont identiques et l'on peut comparer les performances des deux formes d'onde.

L'estimation du signal émis s'écrit :

$$\hat{X} = \mathbf{Z}^H \Phi (\mathbf{Z}X + B) \quad (17.)$$

On introduit alors la décomposition suivante :

$$\hat{X} = \text{diag}(\mathbf{Z}^H \Phi \mathbf{Z}) X + \left[\mathbf{Z}^H \Phi \mathbf{Z} - \text{diag}(\mathbf{Z}^H \Phi \mathbf{Z}) \right] X + \mathbf{Z}^H \Phi B \quad (18.)$$

Le premier terme de cette équation représente la composante utile, le second terme représente l'interférence inter-porteuse ou inter-utilisateurs, et le dernier terme provient du bruit additif Gaussien. On introduit :

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{Z}^H \Phi \mathbf{Z}) \quad (19.)$$

L'expression précédente devient alors :

$$\hat{X} = \mathbf{M} X + \left[\mathbf{Z}^H \Phi \mathbf{Z} - \mathbf{M} \right] X + \mathbf{Z}^H \Phi B \quad (20.)$$

En introduisant l'énergie par symbole E_s et toujours sous l'hypothèse de symboles blancs indépendants de même énergie, il vient :

$$E[XX^H] = \frac{E_s}{T_s} \mathbf{I}_d \quad (21.)$$

En introduisant la puissance utile P_u du signal reçu, il vient :

$$P_u = \frac{1}{N} E[|MX|^2] \quad (22.)$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$P_u = \frac{1}{N} E[\text{trace}\{\mathbf{M} X X^H \mathbf{M}^H\}] \quad (23.)$$

Après quelques calculs simples on obtient :

$$P_u = \frac{E_s}{NT_s} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} |Z_{ni}|^2 e^{j\varphi_n} \right|^2 \quad (24.)$$

La puissance de l'interférence inter-canal P_{ici} est donnée par :

$$P_{ici} = \frac{1}{N} E \left[\left| \left[\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Z} - \mathbf{M} \right] X(nT_s) \right|^2 \right] \quad (25.)$$

Dans le but de calculer cette puissance, on remarque que $\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Z}$ est une matrice unitaire, on a donc :

$$E[|X|^2] = E \left[\left| \mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Z} X \right|^2 \right] = N \frac{E_s}{T_s} \quad (26.)$$

En utilisant l'orthogonalité entre les vecteurs $\mathbf{M} X$ et $\left[\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Z} - \mathbf{M} \right] X$, il vient :

$$P_{ici} = \frac{E_s}{T_s} - P_u \quad (27.)$$

La puissance du bruit Gaussien est donnée par :

$$P_b = \frac{1}{N} E \left[\left| \mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Phi} \mathbf{B} \right|^2 \right] = \frac{N_0}{T_s} \quad (28.)$$

du fait des propriétés d'orthogonalités de \mathbf{Z} et de $\boldsymbol{\Phi}$.

On peut finalement écrire le rapport signal sur bruit comme :

$$SNR = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} |Z_{ni}|^2 e^{j\varphi_n} \right|^2}{N - \sum_{i=0}^{N-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} |Z_{ni}|^2 e^{j\varphi_n} \right|^2 + N \frac{N_0}{E_s}} \quad (29.)$$

Avec $\varphi_n = 2\pi n \Delta f T_s / N$. Dans le cas de l'OFDM et du DS-CDMA, on a :

$$|Z_{ij}|^2 = \frac{1}{N} \quad (30.)$$

En développant alors l'équation (29), il vient :

$$SNR = \frac{\sin^2(\pi \Delta f T_s)}{N^2 \left(1 + \frac{N_0}{E_s} \right) \sin^2(\pi \Delta f T_s / N) - \sin^2(\pi \Delta f T_s)} \quad (31.)$$

L'équation (31) donne directement la dégradation du SNR en fonction de l'écart de fréquence. La figure 1, ci-dessous, illustre cette équation dans le cas d'une dimension $N = 64$ et pour un rapport $E_s / N_0 = 10 \text{ dB}$.

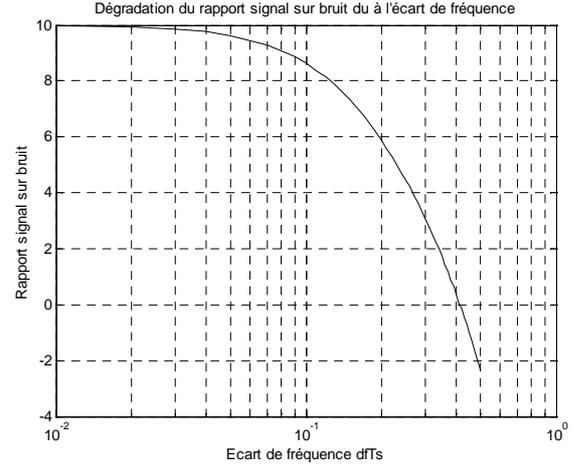


FIG. 1 : Dégradation du rapport signal sur bruit en fonction de l'écart de fréquence, bloc de $N=64$ symboles,

$$(E_s / N_0) = 10 \text{ dB} .$$

On constate, dans le développement théorique effectué ici, que rien ne discerne le DS-CDMA de l'OFDM, et qu'il n'y a donc, aucune sensibilité plus marquée de l'OFDM vis à vis de l'écart de fréquence.

5. Résistance au bruit de phase

Dans le cas du bruit de phase, le modèle utilisé est un processus de Wiener-Levy [10] (ou mouvement brownien) de moyenne nulle et de variance $2\pi\beta t$. Comme dans le cas de l'écart de fréquence, le bruit de phase se formalise par l'introduction d'une matrice diagonale $\boldsymbol{\Phi}$ dont les éléments s'écrivent :

$$\Phi_{mn} = e^{j \sum_{l=0}^n \theta_l} \quad (32.)$$

Les termes θ_l représentent des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, de variance $\sigma_\theta^2 = 2\pi\beta$, où β représente la largeur de bande à 3dB. On se place toujours, pour simplification, dans le cadre d'un canal AWGN, mais en présence de bruit de phase. Le signal estimé s'écrit donc :

$$\hat{X} = \mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Phi} (\mathbf{Z} X + B) \quad (33.)$$

Si l'on considère de petites variations du bruit de phase, on peut approcher $\boldsymbol{\Phi}$ par $(\mathbf{I}_d + j\boldsymbol{\Psi})$ où $\boldsymbol{\Psi}$ est une matrice diagonale définie par :

$$\Psi_{nn} = \sum_{l=0}^n \theta_l = \varphi_n \quad (34.)$$

Le signal démodulé s'écrit alors :

$$\hat{X} = \mathbf{Z}^H (\mathbf{I}_d + j\boldsymbol{\Psi}) \mathbf{Z} X + \mathbf{Z}^H (\mathbf{I}_d + j\boldsymbol{\Psi}) B \quad (35.)$$

En introduisant $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z})$, l'expression précédente devient :

$$\hat{X} = X + j\boldsymbol{\Gamma} X + j(\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z} - \boldsymbol{\Gamma}) X + \mathbf{Z}^H (\mathbf{I}_d + j\boldsymbol{\Psi}) B \quad (36.)$$

Le premier terme est le signal désiré, le second terme correspond à l'erreur de phase commune (EPC), le troisième terme est le résultat des interférences inter-canal (ICI) dû au bruit de phase. Le dernier terme est la contribution du bruit Gaussien. Dans le cas où l'on peut écrire $|Z_{ni}|^2 = I/N$, c'est à dire dans le cas de l'OFDM et du DS-CDMA, la forme du terme EPC indique, que pour l'OFDM, toutes les sous-porteuses subissent une rotation de phase d'un même angle :

$$\Gamma_{ii} = \frac{I}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n \quad (37.)$$

La puissance P_{epc} de la contribution du terme EPC est donnée par :

$$P_{epc} = \frac{I}{N} E \left[\left| \Gamma X(nT_s) \right|^2 \right] \quad (38.)$$

$$P_{epc} = \frac{I}{N} E \left[\text{trace} \left\{ \Gamma X(nT_s) X(nT_s)^H \Gamma^H \right\} \right] \quad (39.)$$

$$P_{epc} = \frac{E_s}{NT_s} E \left[\text{trace} \left\{ \Gamma \Gamma^H \right\} \right] \quad (40.)$$

En développant l'équation précédente il vient :

$$P_{epc} = \frac{E_s}{NT_s} E \left[\sum_{i=0}^{N-1} \left| \sum_{n=0}^{N-1} |Z_{ni}|^2 \phi_n \right|^2 \right] \quad (41.)$$

Après quelques calculs on obtient :

$$P_{epc} = \frac{E_s}{NT_s} \frac{\sigma_\theta^2}{6} (2N^2 + 3N - 5) \quad (42.)$$

La puissance de la contribution ICI est calculée par :

$$P_{ici} = \frac{I}{N} E \left[\left| \left(\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z} - \Gamma \right) \mathbf{X} \right|^2 \right] \quad (43.)$$

$$P_{ici} = \frac{E_s}{NT_s} E \left[\text{trace} \left\{ \left(\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z} - \Gamma \right) \left(\mathbf{Z}^H \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z} - \Gamma \right)^H \right\} \right] \quad (44.)$$

En développant cette équation on obtient :

$$P_{ici} = \frac{E_s}{NT_s} E \left[\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{N-1} Z_{mi}^* Z_{mn} \phi_m \right|^2 \right] \quad (45.)$$

Après quelques développements, on obtient :

$$P_{ici} = \frac{E_s}{NT_s} \sigma_\theta^2 \frac{N^2 + N - 2}{2} - P_{cpe} \quad (46.)$$

Le rapport signal sur bruit final est défini par :

$$SNR = \frac{E_s / T_s}{P_{cpe} + P_{ici} + N_0 / T_s} \quad (47.)$$

En remplaçant chaque terme par son expression il vient :

$$SNR = \frac{E_s}{N_0} \left(\sigma_\theta^2 \left(\frac{N^2 + N - 2}{2N} \right) (E_s / N_0) + 1 \right)^{-1} \quad (48.)$$

L'équation (48) donne directement l'expression du rapport signal sur bruit en fonction de la variance du bruit de phase. Il est alors possible d'estimer, au moyen de la fonction $erfc(x)$, l'impact de cette dégradation sur le taux d'erreur binaire (Fig 2).

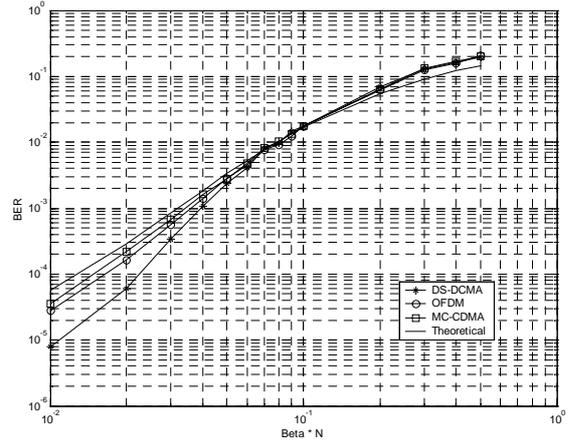


FIG. 2 : Taux d'erreur binaire en fonction du bruit de phase avec $N=8$, dans le cas d'un canal AWGN, en utilisant des symboles BPSK, sans codage, $(E_b / N_0) = 10dB$.

6. Conclusion

L'article a présenté une analyse de la résistance de trois formes d'onde aux phénomènes d'écart de fréquence et de bruit de phase. Des formules théoriques permettant de prévoir les reculs de performances dus à ces phénomènes ont été développées.

Références

- [1] J.-F. Helard, J.-Y. Baudais, J. Citerne, "Linear MMSE detection technique for MC-CDMA," *Electronics Letters*, Volume: 36 Issue: 7, pp 665–666, March 2000.
- [2] H. Steendam and M. Moeneclaey, "Analysis and Optimization of the Performance of OFDM on Frequency-Selective Time-Selective Fading Channels", *IEEE Trans on Comm*, vol 47, n°12, pp1811-1818, Dec 1999.
- [3] D.Mottier, D. Castelain, J.-F. Helard, J.-Y. Baudais, "Optimum and sub-optimum linear MMSE multi-user detection for multi-carrier CDMA transmission systems," *Vehicular Technology Conference*, 2001. VTC 2001 Fall. IEEE VTS 54th, Volume: 2, 2001 pp. 868–872.
- [4] T. Pollet, M. Van Bladel, and M. Moeneclaey, "BER sensitivity of OFDM systems to carrier frequency offset and wiener phase noise," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 191-193, Feb./Mar./Apr. 1995.
- [5] L. Tomba, "On the effect of Wiener phase noise in OFDM systems," *IEEE Trans. Comun.*, vol 46, no5, pp. 580-583, May 1998.
- [6] A. G. Armada and M. Calvo, "Phase noise and sub-carrier spacing effects on the performance of an OFDM communication systems," *IEEE commun, Lett.*, vol. 2, no. 1, pp. 11-13, Jan. 1998.
- [7] D.KreB, O. Ziemann, and R. Dietzel, "Electronic simulation of phase noise," *Eur. Trans. Telecommun.*, vol. 6, pp. 671-674, Nov./Dec. 1995.
- [8] Younsum Kim, Keukjoon Bang, Sooyong Choi, Chulwoo You and Daesik Hong, "Effect of carrier frequency offset on performance of MC-CDMA systems," *Electronics letters*, vol. 35, no. 5, pp. 378-379, 1999.
- [9] H. Steendam, M. Moeneclaey, "Sensitivity of OFDM and MC-CDMA to Carrier Phase Errors", *ICC 1999*, Vancouver, June 99, pp. 1510-1514.
- [10] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Process*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.