

Une nouvelle méthode d'inversion pour les problèmes de synthèse de Fourier en imagerie

Ali MOHAMMAD-DJAFARI¹, Bernard DUCHÊNE² et Alain JOISEL²

¹Division Signaux

²Département de Recherche en Électromagnétisme (DRÉ)

Laboratoire des Signaux et Systèmes

3 rue Joliot Curie, Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif sur Yvette, France

djafari@lss.supelec.fr, duchene@lss.supelec.fr, joisel@lss.supelec.fr

Résumé – La plupart des méthodes classiques d'inversion en synthèse de Fourier sont basées sur l'interpolation et la Transformée de Fourier (TF) inverse rapide. Mais, lorsque les données ne remplissent pas d'une manière uniforme le domaine de Fourier, ce qui est le cas dans grand nombre d'applications en imagerie, ou lorsque la phase du signal n'est pas accessible, comme en interférométrie non cohérente, ces méthodes ne fournissent pas de résultats satisfaisants. La méthode proposée est une méthode de régularisation basée sur l'estimation bayésienne. Une modélisation appropriée de l'image permet de remédier, d'une manière simple, au manque d'information lié aux données et de fournir des résultats satisfaisants. Notre objectif ici est de fournir une méthode utilisable en pratique en faisant un compromis entre complexité de mise en œuvre et performances. La méthode proposée est testée sur des données expérimentales en imagerie microonde.

Abstract – Most classical methods of inversion in Fourier synthesis inverse problems are based on interpolation of the data and fast inverse Fourier Transform (FT). But, when the data do not fill uniformly the Fourier domain which is the case in many applications in tomographic imaging, or when the phase of the signal is lacking as in optical interferometry, the results obtained by such methods are not satisfactory. The method proposed in this article is a regularization method based on the Bayesian estimation. An appropriate modeling of the image gives the possibility of compensating the lack of information in the data thus giving satisfactory results. The objective is to make a compromise between the efficiency and performances of the method. The proposed method is tested on experimental data in microwave imaging.

1 Introduction

Dans un grand nombre d'applications en imagerie, l'étape d'inversion se ramène souvent à un problème de synthèse de Fourier, qui consiste à estimer une fonction $f(\mathbf{x})$ à partir d'une connaissance partielle de sa TF $g(\boldsymbol{\omega})$.

$$g(\boldsymbol{\omega}) = \int f(\mathbf{x}) \exp\{-j\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}\} d\mathbf{x}. \quad (1)$$

Parmi ces applications on peut citer la tomographie à rayons X, par diffraction [1, 2], l'imagerie RMN, ou encore l'imagerie interférométrique en radioastronomie ou en optique [3]. Le problème en 2D s'écrit : estimer $f(x, y)$ à partir d'une connaissance partielle de $g(u, v)$.

Cette connaissance partielle est liée soit à l'absence de phase (données incomplètes) soit à une limitation du support, $g(u, v)$ n'étant alors connu que sur un ensemble restreint de contours algébriques comme des lignes droites en tomographie X, des demi-cercles ou d'autres supports plus sophistiqués dans le cas de milieux atténuants [4] pour la tomographie par diffraction.

Parmi les techniques classiques d'inversion on trouve l'inversion sur un maillage cartésien dans le domaine de Fourier et l'utilisation de la TFR pour déterminer $f(x, y)$. Cette technique, bien que rapide et utilisée dans de nombreux cas avec succès, manque souvent de résolution. De plus, il est difficile d'analyser le lien entre les différents interpolateurs et l'information introduite *indirectement* sur l'image recherchée.

L'idée de base dans les techniques d'inversion que nous développons ici est la prise en compte explicite d'information *a priori* sur la solution, comme par exemple, régularité, positivité, continuité par régions, homogénéité, etc. Pour cela, nous définissons la solution du problème comme l'optimiseur, sur un ensemble \mathcal{F} , d'un critère en deux parties, l'une traduisant l'adéquation aux données, l'autre l'*a priori* :

$$\hat{f} = \arg \min_{f \in \mathcal{F}} \{Q(f) + \lambda \Omega(f)\}. \quad (2)$$

Pour la première on choisit souvent un critère de moindres carrés :

$$Q(f) = \sum_i (g_i - g(\boldsymbol{\omega}_i))^2 \quad (3)$$

qui traduit implicitement le fait que le bruit est supposé centré, blanc et gaussien, et où $\mathbf{g} = \{g_i, i = 1, \dots, M\}$ désigne les données observées. Les différentes méthodes de régularisation se différencient essentiellement dans le choix de l'ensemble \mathcal{F} et dans la deuxième partie du critère $\Omega(f)$. Par exemple, la régularité peut être assurée si on choisit :

$$\Omega(f) = \int \phi(|\nabla f(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} \quad (4)$$

où $\nabla f(\mathbf{x})$ est le gradient de f et ϕ est une fonction positive et croissante. Le choix de ϕ est alors crucial : ϕ quadratique introduit une information de régularité forte, ϕ non-quadratique mais convexe (par exemple $\phi(t) = |t|$) favorise l'apparition des

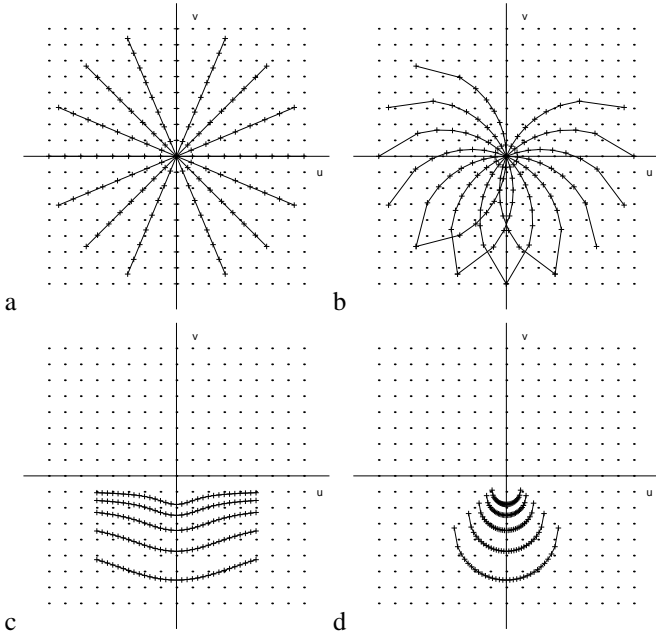


FIG. 1: Contours algébriques en synthèse de Fourier: a) Tomographie X, b) Tomographie par diffraction pour une configuration de mesure en transmission et c) dans le cas d'un milieu atténuant et d'une configuration de mesure en réflexion, d) Imagerie en radioastronomie.

zones homogènes, enfin ϕ non convexe (par exemple quadratique tronquée) peut intégrer une véritable phase de détection de contours.

Des informations telles que la positivité peuvent être prises en compte soit par le choix de l'ensemble \mathcal{F} soit par le choix [5] de la fonction :

$$\Omega(f) = - \int f(x) \ln f(x) dx. \quad (5)$$

2 La contribution de ce travail

Une propriété souvent importante dans un grand nombre d'applications, surtout en contrôle non destructif (CND), est l'homogénéité par régions compactes. De nombreuses méthodes d'inversion ont été proposées pour favoriser de telles reconstructions, par exemple des méthodes de régularisation avec un critère de régularisation du type quadratique tronqué [6, 7], mais leur mise en œuvre s'avère trop complexe et coûteuse en temps de calcul pour des applications réelles.

En effet, cette propriété est, en toute rigueur, difficile à prendre en compte, mais une manière approchée de l'intégrer consiste à définir :

$$\Omega(f) = \sum_{k=1}^K \int_{x \in R_k} \frac{1}{\sigma_k^2} (f(x) - m_k)^2 dx \quad (6)$$

où R_k est le support de la région k , m_k est son niveau moyen, σ_k^2 est la variance des valeurs des pixels de l'image dans cette région et K le nombre de ces régions. Cette modélisation s'apparente à une modélisation probabiliste de mélange de gaussiennes où les variables cachées représentent des labels des différentes régions.

La difficulté essentielle est alors l'estimation de la forme de chaque contour (classification et segmentation) et des hyperparamètres (m_k, σ_k^2) pour $k = 1, \dots, K$, surtout si on souhaite imposer à chaque région R_k d'avoir certaines propriétés : connexité, compacité, convexité, etc. On peut aussi imposer des contraintes sur leur nombre, sur les longueurs ou les courbures de leurs contours.

Nous nous sommes intéressés récemment au cas $K = 3$ qui correspond à une situation souvent rencontrée en contrôle non destructif (CND) où, dans l'image à reconstruire, on souhaite souvent distinguer les régions saines ($k = 1$), les régions de défauts ($k = 3$) et les régions intermédiaires ($k = 2$). En imagerie médicale, par exemple, $k = 2$ peut correspondre à l'extérieur du corps, $k = 3$ peut correspondre à des régions osseuses et $k = 1$ à des régions sans os.

Dans ce travail, nous proposons un algorithme pratique, qui s'apparente à un algorithme du type *Level set* mais à plusieurs niveaux que nous avons nommé *multi Level set* et qui semble fournir des résultats satisfaisants sur un ensemble de jeux de données en simulation et des données expérimentales.

Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

1. Initialisation : on commence par $K = 0$ et on estime une solution $f^{(0)}$ en minimisant le critère suivant :

$$J(f) = \sum_i (g_i - g(\omega_i))^2 + \lambda \int |\nabla f(x)|^2 dx$$

qui est quadratique en f . La solution s'obtient facilement et le coût de calcul est réduit à celui d'une dizaine de TFR. La solution obtenue dans cette étape peut aussi être interprétée comme une estimation au sens du maximum *a posteriori* (MAP) dans une approche bayésienne avec une loi *a priori* du type Gauss-Markov homogène sur l'image f .

2. Classification et segmentation (estimation des régions R_k , de leurs niveaux moyens m_k et de leurs variances σ_k^2) basée sur la modélisation probabiliste des pixels de l'image comme un champ aléatoire avec une loi *a priori* appropriée (par exemple un mélange de $K = 3$ gaussiennes).

Plus précisément, il s'agit de modéliser la loi de probabilité des pixels de l'image par un mélange de $K = 3$ gaussiennes, ce qui revient à modéliser les lois des pixels dans chaque région par une gaussienne. La classification est alors équivalente à l'estimation d'une variable discrète cachée dont la valeur indique l'appartenance d'un pixel de l'image à une région.

Une modélisation markovienne de ces variables cachées permettra de mettre d'autres contraintes sur les formes et les dimensions de ces régions.

Si on note par f_j la valeur du pixel j de l'image $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]$ et par $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]$ les variables discrètes qui ne peuvent prendre que trois valeurs $k = 1, 2$ et 3 représentant leur appartenance à la région correspondante, on peut alors définir des lois $p(\mathbf{f}|\mathbf{z})$ et $P(z_j = k) = p_k$ et éventuellement $P(z_j = k|z_{j-1} = l) = p_{kl}$ en déduire la loi *a posteriori* $P(z_j = k|\mathbf{f})$ qui nous permet d'effectuer la segmentation, par exemple en choisissant la valeur la plus probable.

Avec l'hypothèse i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) pour $p(f_j|z_j)$ et pour $P(z_j = k) = p_k$ et lorsque

K est fixé d'avance, on montre que cette étape se résume à :

- Détermination de $K - 1 = 2$ seuils s_1 et s_2 à l'aide de :

$$P(z_j = k | f_j = s_k) = P(z_j = k+1 | f_j = s_k), \quad k = 1, 2$$

- Détermination des indices des régions R_k définies par $R_k = \{j : z_j = k\}$ qui correspond à la segmentation par seuillage de l'image estimée à l'itération précédente par :

$$\hat{z}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } f_j \leq s_1 \\ 2 & \text{si } s_1 < f_j \leq s_2, \\ 3 & \text{si } s_2 < f_j \end{cases}$$

- Remise à jour des paramètres m_k , σ_k^2 et p_k des différentes régions par :

$$\begin{aligned} n_k &= \text{nombre des pixels dans la région } k, \\ m_k &= \frac{1}{n_k} \sum_j f_{k_j}, \quad \sigma_k^2 = \frac{1}{n_k} \sum_j (f_{k_j} - m_k)^2, \\ p_k &= n_k/n, \quad p_{k,l} = n_{kl} / \sum_k n_{kl} \end{aligned}$$

3. Estimation de la solution : avec cette segmentation et cette classification, on estime une nouvelle solution en minimisant le critère

$$J(f) = \sum_i (g_i - g(\omega_i))^2 + \lambda \sum_{k=0}^K \int_{R_k} \left(\frac{f(\mathbf{x}) - m_k}{\sigma_k} \right)^2 d\mathbf{x}$$

qui est aussi quadratique en f lorsque les régions R_k et leurs niveaux m_{kl} sont fixés. La solution, au cours de cette étape, s'obtient facilement et le coût de calcul est également réduit à celui de quelques TFR.

On peut interpréter cette solution comme de l'estimation au sens du MAP de $\hat{f} = \arg \max_f \{p(f|g, z)\}$ avec le modèle de mélange de gaussiennes proposé pour f .

4. Test de convergence : tant que le nombre de régions n'est pas stabilisé, on retourne à l'étape 2.

Malheureusement il est très difficile d'établir une preuve quelconque de convergence de cet algorithme. Nous arrêtons l'algorithme lorsque le nombre total des régions est stabilisé. L'optimisation du critère $J(f)$, lors de chaque étape, est faite par un algorithme de type gradient conjugué.

L'étape la plus délicate est l'étape de classification et de segmentation. Une étude plus avancée fondée sur la modélisation markovienne de l'image et de ses régions est en cours pour effectuer une classification et une segmentation plus adaptées mais forcément plus complexes. Il s'agit de modéliser la loi de probabilité des pixels de l'image par un mélange de gaussiennes, mais en introduisant soit une coloration sur le champ des labels z (par exemple un modèle de Potts) soit sur le champ des pixels f (par exemple un champ de Gauss-Markov). L'étape de la classification devient alors plus complexe car l'estimation de z_j fera intervenir non seulement la valeur du pixel f_j mais aussi soit les valeurs des z_l soit les valeurs de f_l où l'indice l représente les sites voisins du site j .

3 Simulation

Pour montrer la faisabilité et mesurer les performances de la méthode proposée et comparer ses performances à celles des

méthodes classiques, nous avons effectué un certain nombre de simulations. La figure suivante montre un exemple de résultat à titre indicatif.

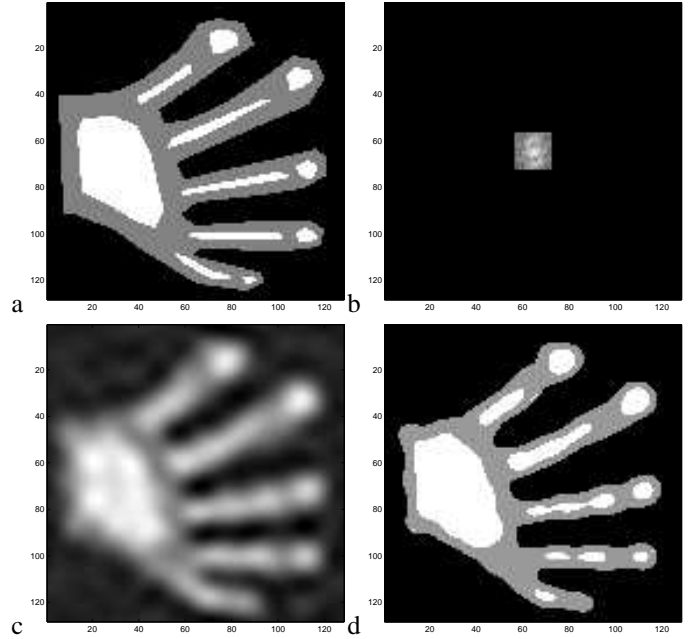


FIG. 2: Synthèse de Fourier en simulation: a) Objet (une image de 128×128 pixels), b) Spectre observé (seul les valeurs de la TF sur une grille de 16×16 sont observées), c) Reconstruction par TF inverse, d) Reconstruction par la méthode proposée

4 Application aux données expérimentales en imagerie microonde

Les figures suivantes présentent quelques résultats typiques obtenus en imagerie microonde en vue d'application dans le domaine biomédical [8] et sur des données issues de la base de données de l'Institut Fresnel [9].

5 Conclusion

Il existe un grand nombre de méthodes pour la résolution du problème inverse de SF. Ces méthodes sont soit trop simples comme interpolation et TF inverse qui ne fournissent de bons résultats que lorsque les données sont sans bruit et de nombre suffisant, soit plus sophistiquées pour remédier au manque d'information dans les données. La méthode proposée semble faire un compromis entre complexité de mise en œuvre et performances. D'un point de vue théorique, il reste encore à étudier la convergence, éventuellement à estimer le nombre de niveaux plutôt que de le fixer d'avance, et proposer une méthode simple pour l'estimation du paramètre de régularisation.

Références

- [1] A. Mohammad-Djafari and G. Demoment, "Maximum entropy Fourier synthesis with application to diffraction tomography," *Applied Optics*, vol. 26, no. 10, pp. 1745–1754, 1987.

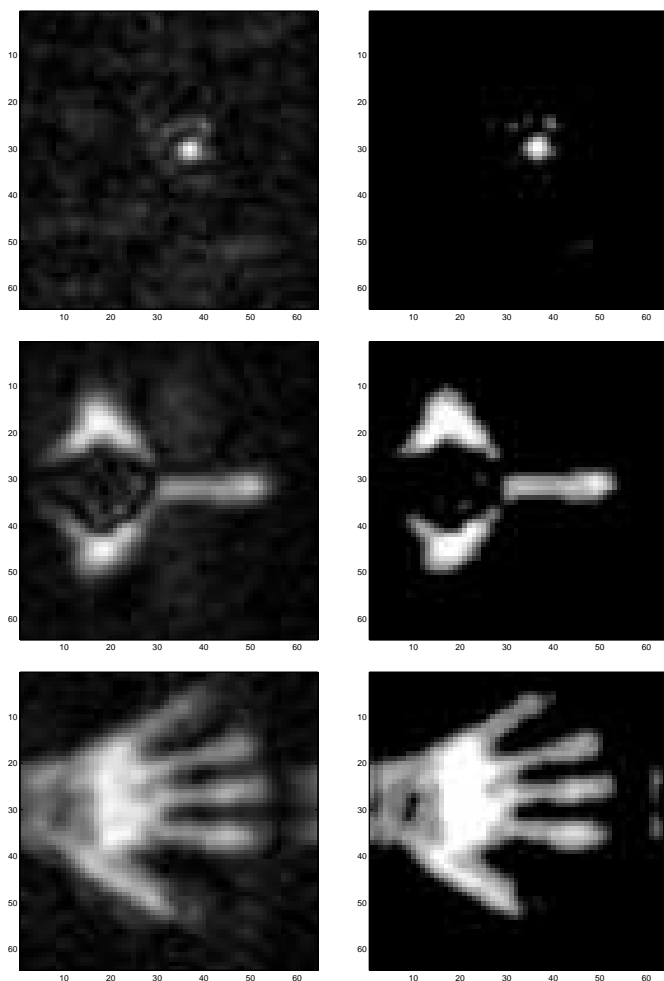


FIG. 3: Synthèse de Fourier en imagerie microonde active en transmission dans l'eau à 2,45 GHz en polarisation linéaire horizontale à 10 images/s. Le réseau de mesure comporte (32×32) dipôles espacés de 7 mm (rétine). a) bille métallique de diamètre 6mm, b) collier métallique et c) main humaine. A gauche reconstructions par interpolation et TFR inverse, et à droite, reconstruction par la méthode proposée.

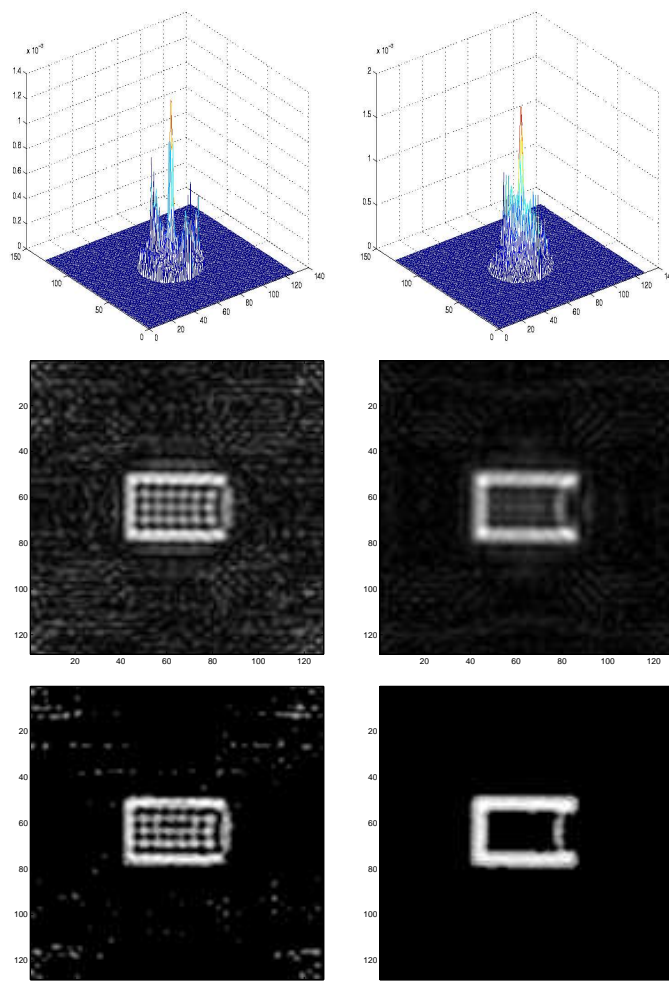


FIG. 4: Synthèse de Fourier en imagerie microonde sur des données issues de la base de l'Institut Fresnel (courtoisie de K. Belkebir et M. Saillard [10]): spectres et images d'un tube métallique en U reconstruites à partir de données à une seule fréquence (en haut : 16 GHz), et à 8 fréquences (en bas : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 et 16 GHz). En haut, données dans le domaine de Fourier, au milieu, reconstruction par interpolation et TFR inverse, et en bas reconstruction par la méthode proposée.

- [2] A. Mohammad-Djafari and G. Demoment, "Tomographie de diffraction et synthèse de Fourier à maximum d'entropie," *Revue de Physique Appliqué*, vol. 22, pp. 153–167, 1987.
- [3] J. Fienup, "Reconstruction of a complex-valued object from the modulus of its Fourier Transform using a support constraint," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. A 4, pp. 118–123, 1987.
- [4] R. Zorgati, B. Duchêne, D. Lesselier, and F. Pons, "Eddy current testing of anomalies in conductive materials. part i: qualitative imaging via diffraction tomography technique," *IEEE Trans. Magnetics*, vol. MAG-27, pp. 4416–4437, November 1991.
- [5] A. Mohammad-Djafari and G. Demoment, "Maximum entropy reconstruction in X ray and diffraction tomography," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. MI-7, no. 4, pp. 345–354, 1988.
- [6] M. Nikolova and A. Mohammad-Djafari, "Eddy current tomography using a binary Markov model," *Signal Processing*, vol. 49, pp. 119–132, 1996.

- [7] M. Nikolova, J. Idier, and A. Mohammad-Djafari, "Inversion of large-support ill-posed linear operators using a piecewise Gaussian MRF," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, pp. 571–585, April 1998.
- [8] A. Joisel and J.-C. Bolomey, "Rapid microwave imaging of living tissues," in *Proceedings of SPIE's Int. Symp. on Medical Imaging*, no. 3977, (San Diego, CA, USA), pp. 320–330, February 2000.
- [9] B. Duchêne, "Inversion of experimental data using linearized and binary specialized nonlinear inversion schemes," *Inverse Problems*, vol. 17, Special section (Saillard, M. and Belkebir, K. Ed.), pp. 1623–1634, December 2001.
- [10] K. Belkebir and M. Saillard, "Testing inversion algorithms against experimental data," *Inverse Problems*, vol. 17, Special section, pp. 1565–1571, December 2001.