

Relation entre la régularité de fractals 3D et celle de leurs projections 2D. Application à l'os trabéculaire

G. LEMINEUR¹, R. HARBA¹, S. BRETTEIL¹, R. JENNANE¹,
A. ESTRADE², A. BONAMI², C. L. BENHAMOU³

¹Laboratoire d'Electronique, Signaux, Images, UPRES EA 1715 et GdR ISIS du CNRS
12, rue de Blois, IPO-ESPEO, Université d'Orléans, France,

Gerald.Lemineur@univ-orleans.fr

Tel : 02 38 49 49 67 ; Fax : 02 38 41 72 45

²Laboratoire MAPMO, Université d'Orléans, France

³Equipe INSERM ERIT-M 0101, Centre Hospitalier Régional d'Orléans, France

Résumé – Deux des auteurs ont récemment établi que la régularité R_n d'un fractal continu isotrope de dimension n (nD) est égale à celle sa projection R_{n-1} dans un espace $(n-1)D$ diminuée de 0.5, ou plus clairement, $R_n = R_{n-1} - 0.5$. Dans un premier temps, l'objectif de cette étude est d'expliquer brièvement ce résultat et de l'illustrer sur des volumes fractals synthétiques, continus et binaires, et leurs projections. Pour les fractals continus, les résultats sont proches de ceux qu'il convient de trouver pour H faible. Pour H élevé, il apparaît des difficultés liées essentiellement aux défauts de la méthode de synthèse retenue. Pour les fractals binaires, l'écart de 0.5 qu'il est possible de trouver entre la régularité du volume et celle de sa projection n'est pas clairement établie. Dans un deuxième temps, nous avons expérimentalement étudié si cette relation est valide pour l'os trabéculaire et sa projection. Nous avons analysé 22 échantillons de tête de fémur imagés par micro-scanner. Nous trouvons une différence entre la régularité 2D et celle en 3D de 0.53 ± 0.046 . Ceci indique que le la relation qui lie la régularité 3D d'un volume fractal à celle de sa projection s'applique pour cet objet binaire. Une simple mesure 2D permettrait alors de quantifier la structure trabéculaire 3D et pourrait se révéler d'une grande force pour le diagnostic précoce de l'ostéoporose.

Abstract – Two of the authors have recently shown that the regularity R_n of an isotropic continuous n dimensional (nD) fractal is equal to the regularity of its projection R_{n-1} in a $(n-1)D$ space decreased of 0.5 ($R_n = R_{n-1} - 0.5$). At first, the purpose of this study was to briefly explain this result and to illustrate it on continuous and binary synthetic fractal volumes and their projections. For continuous fractals, the results were close to those expected for low H values. For high H , difficulties mainly linked to the synthesis method appeared. For binary fractals, the difference of 0.5 expected between the regularity of the volume and that of its projection remains unclear. Secondly we have studied experimentally if this relation could be applied to trabecular bone and its projection. We considered 22 bone samples of femoral head acquired using a micro-scanner, calculated the regularity of their projections, and found a difference between the 3D and 2D regularities of 0.53 ± 0.046 . This indicates that the result of the fractal projection could be applied on this kind of binary object. A simple 2D measurement could help to quantify the 3D trabecular structure and could be very helpful for the diagnosis of osteoporosis.

1. Introduction

Dans de nombreux domaines tels que par exemple la science des matériaux, le contrôle non destructif, ou l'imagerie médicale, il est souvent difficile d'accéder directement aux informations tridimensionnelles. En effet, les systèmes d'acquisition 3D sont souvent très onéreux ou parfois l'exploration 3D n'est pas envisageable. Une méthode simple pour éviter cet écueil consiste à imager ces volumes en deux dimensions au prix d'une perte d'information souvent irrémédiable. On peut alors pratiquer des analyses à partir de lames minces du matériau, ou ausculter ce dernier par échographie ou radiographie par exemple. Un examen radiographique revient à projeter les objets 3D sur des surfaces 2D. Lorsque cela est possible, il est extrêmement intéressant de remonter à des caractéristiques 3D à partir d'indices simplement calculés sur leurs projections. Récemment, un théorème établi par deux des auteurs stipule que la régularité R_n d'un fractal continu isotrope dans un espace à n dimensions (nD) est égale à celle de sa projection R_{n-1} dans un espace $(n-1)D$ diminuée de 0.5 [1][2]. Plus clairement, $R_n = R_{n-1} - 0.5$. Ce résultat fort indique qu'il est possible d'accéder à la régularité 3D d'un objet fractal continu par simple mesure de celle en 2D.

L'objectif de cette étude est dans un premier temps de présenter ce résultat. Puis nous l'illustrerons sur des

volumes fractals de synthèse isotropes type mouvement brownien fractionnaire (fBm pour fractional Brownian motion) et nous calculerons leur régularité et celle de leur projection. Ensuite, nous étudierons ces relations pour des fractals binaires type éponge de Sierpinski. Enfin nous appliquerons cette analyse à des volumes d'os trabéculaire imagés par un micro-scanner.

2. Théorie

Cette étude découle de discussions pluridisciplinaires sur le diagnostic de l'ostéoporose à partir de radiographies osseuses. Sans aucune perte de généralité, nous allons très brièvement montrer que R_3 , la régularité d'un fractal isotrope 3D et R_2 , la régularité de sa projection 2D sont reliées par $R_3 = R_2 - 0.5$.

Soit $B_H(x,y,z)$ un fBm de paramètre H dans l'intervalle $]0,1[$ défini par sa représentation spectrale suivante :

$$B_H(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(xx_1 + yx_2 + zx_3)} - 1}{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^{H + \frac{3}{2}}} dW(\mathbf{x}) \quad (1)$$

où dW est une mesure brownienne. Pour le fBm, H est aussi la régularité de ce processus, soit $R_3 = H$. Projetons cet objet suivant la direction verticale par exemple. On obtient un processus 2D noté $Y_H(x,y)$:

$$Y_H(x, y) = \int_{\mathfrak{R}} B_H(x, y, z) \mathbf{j}(z) dz \quad (2)$$

$\varphi(t)$ étant une fenêtre qui assure la convergence de l'intégrale. Y_H n'est pas un fBm mais est gaussien et a des incréments stationnaires. Nous pouvons alors calculer la variance des incréments qui vaut :

$$E\left(\left(Y_H(x, y) - Y_H(x', y')\right)^2\right) = \int_{\mathfrak{R}^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}((x-x')\mathbf{x}_1 + (y-y')\mathbf{x}_2)\right) \int_{\mathfrak{R}} \frac{|\mathbf{j}(I)|^2 dI}{\left(\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + I^2}\right)^{2H+3}} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \quad (3)$$

Nous utilisons un résultat général pour les processus gaussiens à accroissements stationnaires [1] : si le spectre des incréments de dimension nD se comporte comme $\left(\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \dots + \mathbf{x}_n^2}\right)^{-\alpha}$ quand la fréquence tend vers l'infini, alors sa régularité vaut $(\alpha-n)/2$. Ce spectre est déduit de l'équation précédente et vaut :

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}((x-x')\mathbf{x}_1 + (y-y')\mathbf{x}_2)\right) \int_{\mathfrak{R}} \frac{|\mathbf{j}(I)|^2}{\left(\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + I^2}\right)^{2H+3}} dI \quad (4)$$

Pour une fréquence (ξ_1, ξ_2) tendant vers l'infini, nous obtenons alors un spectre se comportant comme :

$$C \left(\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}\right)^{-2H-3} \text{ avec } C = \int_{\mathfrak{R}} |\mathbf{j}(I)|^2 dI \quad (5)$$

Nous trouvons donc que $R_2 = H + 0.5$. En tenant compte du fait que $R_3 = H$, nous avons montré le résultat essentiel *i.e.* $R_3 = R_2 - 0.5$.

Plusieurs remarques peuvent être faites.

- En premier lieu, la régularité du projeté est supérieure à celle du volume. Cela est assez naturel car la projection est identique à un processus de moyennage qui a pour effet de lisser les données et donc augmente la régularité.

- Pour que la relation soit valide, la régularité du projeté doit être calculée pour les hautes fréquences, ce qui correspond pour l'objet d'étude à des zones de scrutation à petite échelle.

- Le projeté n'est pas fractal mais est asymptotiquement fractal aux hautes fréquences de paramètre $H+0.5$. Le paramètre d'autosimilarité du projeté varie entre 0.5 et 1.5. Cela suggère d'imaginer un processus fractal où la barrière $H < 1$ serait rompue. C'est par exemple ce qui a été fait dans [3]. Le paramètre H du nouveau processus issu du fBm peut évoluer entre $n-1$ et n , avec n un entier strictement positif.

- Pour les basses fréquences, on peut montrer que le projeté est localement fractal de paramètre H [1]. En résumé, le projeté est autosimilaire de paramètre H aux basses fréquences et autosimilaire de paramètre $H+0.5$ aux hautes fréquences. Cela suppose aussi que l'on puisse définir un modèle fractal par morceaux. Ceci est l'objet d'une autre communication [4].

Nous allons maintenant illustrer le résultat $R_2 = R_3 + 0.5$ sur des objets fractals synthétiques continus type fBm.

3. Illustration sur des fractals synthétiques continus

La synthèse de signaux fractals type fBm est une tâche délicate. Il existe deux méthodes exactes : celle dite de Choleski et celle basée sur la méthode de la matrice circulante [5][6]. Pour des images, ces deux méthodes sont difficilement applicables et, à notre connaissance, il n'existe pas de méthode de synthèse 2D exacte. Pour le 3D, le problème est encore plus difficile.

Nous avons synthétisé des volumes fractals continus type fBm de paramètre $0 < H < 1$ en utilisant la méthode de Fourier inverse qui est facilement programmable en pratique [7]. Elle consiste à remplir dans le domaine fréquentiel un objet dont le spectre vérifie la loi en $(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{H+3/2}$, sa phase étant aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$ et respectant la symétrie hermitienne. La partie réelle de la transformée de Fourier inverse de cet objet est un fractal continu 3D isotrope, la partie imaginaire étant nulle.

Nous avons alors projeté ces volumes. La figure suivante montre un fractal 3D et sa projection 2D.

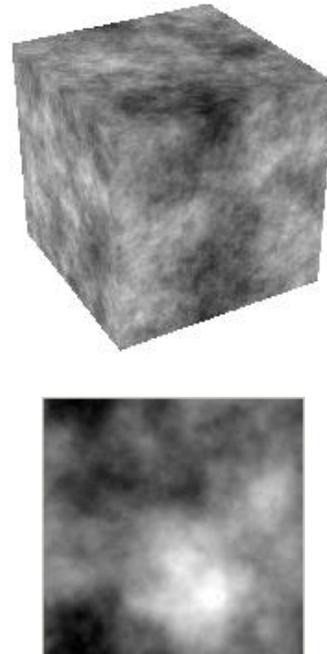


FIG. 1 : un fractal 3D type fBm et sa projection 2D

Nous allons maintenant estimer la régularité de ces objets. Pour un fBm, le paramètre H est égal à sa régularité. Nous avons mesuré la régularité 3D par la méthode de la variance. Elle consiste à représenter en échelle log-log la variance des incréments en fonction du pas incrémental [8]. La droite qui apparaît est de pente $2H$. Le paramètre H peut être estimé par régression linéaire.

Nous avons montré que la régularité 2D doit être mesurée aux hautes fréquences, ou de manière équivalente pour les petites échelles d'analyse. Nous avons appliqué la méthode de la variance pour estimer la régularité et limité la plage de régression aux premiers points.

Nous avons synthétisé 10 images de 256^3 pour des valeurs de H valant respectivement 0.2, 0.5 et 0.8. Les résultats sont présentés dans le tableau 1 pour une régression

effectuée sur les 50 premiers points en 3D et les 5 premiers en 2D.

TAB. 1 : valeurs de la régularité 3D d'un fractal type fBm, de celle de sa projection 2D, et de l'écart constaté entre ces deux valeurs

$R_{\text{Théorique}}$	0,2	0,5	0,8
R_3	0,268	0,458	0,634
	\pm 0,004	\pm 0,004	\pm 0,014
R_2	0,578	0,717	0,785
	\pm 0,023	\pm 0,025	\pm 0,033
Ecart	0,310	0,258	0,151
	\pm 0,020	\pm 0,024	\pm 0,031

Ces valeurs de R_3 sont semblables avec ce qu'il convient de trouver pour H faible. Pour H élevé, on voit apparaître des écarts peu conformes à ceux attendus. Ceci provient essentiellement des difficultés liées aux défauts de la méthode de synthèse retenue [5]. Concernant l'écart de régularité qui devrait valoir 0.5, les résultats sont acceptables pour H faible et mauvais pour H élevé. Ceci illustre bien la difficulté expérimentale pour mettre en évidence le résultat théorique.

4. Cas des fractals synthétiques binaires

Le théorème de la projection pour les fractals s'applique uniquement aux fractals continus. Il apparaît pour le moment difficilement extrapolable aux fractals binaires. En effet, la notion de régularité pour ce type d'objet n'a pas de sens physique. Par contre, la notion d'autosimilarité quantifiée par le paramètre H est plus parlante, que ce soit pour un fractal continu ou un fractal binaire. Par abus de langage, nous utiliserons le terme de régularité pour un objet fractal binaire, étant sous entendu que c'est du paramètre d'autosimilarité H qu'il s'agit. Pour ces objets binaires, H et la dimension fractale D sont reliés par :

$$D = E - H \quad (6)$$

avec E la dimension euclidienne de l'espace dans lequel l'objet fractal est inclus. Pour les volumes, $E=3$. L'estimation de la dimension fractale se fera donc par la méthode des boîtes [9]. Puis nous en déduirons le paramètre H par $H=3-D$, cette dernière valeur étant aussi la régularité 3D de l'objet.

Nous allons maintenant conduire des expériences numériques qui vont permettre d'évaluer si le résultat sur la projection est transposable à des fractals binaires.

Pour ce faire, nous avons généré des fractals synthétiques binaires isotropes type éponges de Sierpinski. Cette méthode consiste à creuser aléatoirement et itérativement un volume plein de départ. Nous avons synthétisé 10 images de taille 512^3 pour $H=0.4, 0.6$ et 0.8 par la méthode décrite dans [10]. Nous avons simulé leur projection. De telles images sont présentées dans la figure 2.

Concernant la régularité 3D mesurée par la méthode des boîtes, la régression est effectuée sur les 9 premiers

points. La régularité 2D est mesurée par la méthode de la variance et la régression est faite sur les 5 premiers incréments. Les résultats sont présentés dans le tableau 2. La régularité 3D est conforme à ce qu'il est convenu de trouver. Par contre, l'écart de 0.5 qu'il était possible de d'obtenir entre R_2 et R_3 n'est pas présent dans le cadre de l'expérience que nous avons menée. On remarque notamment que les valeurs de régularité du projeté sont plus faibles qu'attendu. Cela vient probablement du fait que les cubes qui sont enlevés aléatoirement ont une forme trop abrupte. La projection faite dans la direction des arêtes des cubes est alors fortement discontinue. Pour étayer cette explication, nous avons enlevé des sphères qui ont des formes plus douces que celles des cubes. Nous obtenons donc un volume creusé sphériquement avec une taille de sphère qui varie. Nous mesurons la régularité 3D et celle de son projeté comme pour l'éponge de Sierpinski et nous trouvons les résultats présentés tableau 3.

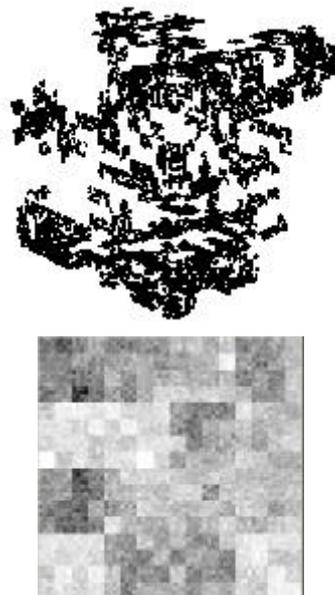


FIG. 2 : un fractal 3D binaire et sa projection 2D

TAB. 2 : valeurs de la régularité 3D d'un fractal binaire et de celle de sa projection 2D

$R_{\text{Théorique}}$	0.4	0.6	0.8
R_3	0.383	0.602	0.811
	\pm 0.010	\pm 0.009	\pm 0.011
R_2	0.373	0.303	0.244
	\pm 0.001	\pm 0.003	\pm 0.002

TAB. 3 : valeurs de la régularité 3D et de celle de la projection 2D pour des volumes creusés sphériquement

R_3	0.091	0.116	0.127
R_2	0.326	0.435	0.523

Les écarts entre R_2 et R_3 sont assez proches de 0.5.

En conclusion de ce chapitre, les résultats sont encourageants mais il conviendra d'apporter des arguments, expérimentaux ou théoriques, plus étoffés pour pouvoir établir le lien possible entre la régularité d'un fractal binaire 3D et celle de sa projection 2D.

5. Applications à des volumes osseux trabéculaires

Parmi les facteurs qui conditionnent la fragilité osseuse, la micro-architecture trabéculaire joue un rôle majeur dans la détermination des risques de fractures liées à l'ostéoporose. Récemment, des analyses de textures et plus précisément les méthodes fractales ont été utilisées pour quantifier les changements de ce matériau sur des images de radiographies [11]. De telles données représentent une projection 2D d'un volume osseux complexe. Le problème dans beaucoup d'applications est de relier directement les paramètres estimés en 2D aux modifications architecturales osseuses 3D. Dans [12], en utilisant des images de tomographies 3D et leurs projections, nous avons montré qu'il existait de fortes corrélations entre les paramètres morphologiques de la structure osseuse d'une part, et les paramètres fractals de leurs projections d'autre part.

A la lumière du résultat théorique liant la régularité d'un objet fractal 3D et celle de sa projection 2D, nous allons évaluer s'il peut s'appliquer à nos objets expérimentaux. Nous allons conduire notre étude en examinant des images hautes résolutions d'échantillons prélevés sur des cols de fémurs et acquis à l'aide d'un micro-scanner ainsi que sur leurs projections comme le montre la figure suivante. Les tracés cubiques sur les faces de l'objet symbolisent le processus qui permet de calculer la régularité 3D par la méthode des boîtes.

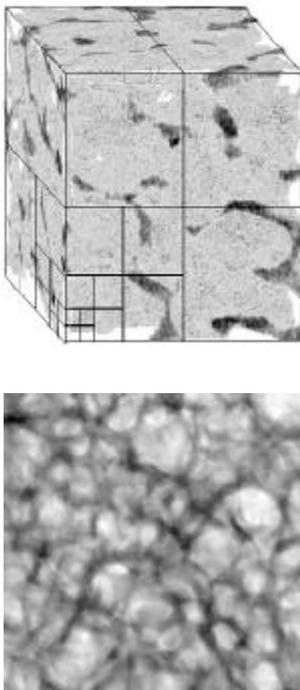


FIG. 3 : volume trabéculaire osseux et sa projection

Nous avons analysé 22 os et calculé la régularité 3D par la méthode des boîtes. Celle de leur projection est estimée par la méthode de la variance. Nous trouvons une différence entre ces deux valeurs de 0.53 ± 0.046 ce qui indique que le théorème de la projection fractale s'applique pour cet objet binaire. La mesure de la régularité 2D permet de remonter à celle de l'objet 3D, elle même étant fortement corrélée avec des paramètres

de la structure 3D. Pour le montrer plus précisément, nous avons calculé les paramètres morphologiques 3D qui sont habituellement utilisés comme le nombre de travées par unité de surface (Tb.N), la proportion de volume osseux (BV/TV), l'épaisseur moyenne des travées (Tb.Th), l'espace inter-travées (Tb.Sp), la proportion de surface par unité de volume (BS/TV) [12]. Nous avons calculé ces valeurs pour nos 22 échantillons et calculé le coefficient de corrélation avec la régularité 3D d'une part et la régularité 2D d'autre part. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 4.

TAB. 4 : coefficients de corrélation entre les paramètres de régularité et les paramètres morphologiques 3D

Corr.	Tb.N	Tb.Th	Tb.Sp	BV/TV	BS/TV	R ₃
R ₂	-0,687	-0,656	0,668	-0,769	0,693	0,845
R ₃	-0,784	-0,872	0,784	-0,955	0,879	1,000

Ces résultats indiquent une très bonne corrélation entre la régularité et les paramètres morphologiques. On remarque aussi que ces corrélations sont plus faibles pour la régularité 2D que pour la régularité 3D.

Cette étude montre qu'une simple mesure sur des radiographies permettrait de quantifier la structure trabéculaire 3D et pourrait se révéler d'une grande force pour le diagnostic précoce de l'ostéoporose.

- [1] A. Bonami, A. Estrade. *Anisotropic Analysis of some Gaussian Models*. The Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 9, pp. 215-236, 2003.
- [2] R. Jennane, R. Harba, E. Perrin, A. Bonami, A. Estrade. *Analyse de champs browniens fractionnaires anisotropes*. GRETSI 2001, pp. 99-102, Sep 2001.
- [3] E. Perrin, R. Harba, C. Berzin-Joseph, I. Iribarren, A. Bonami. *nth-order fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises*. IEEE Transaction on Signal Processing, Vol. 45, N° 5, pp. 1049-1059, 2001.
- [4] R. Harba, S. Bretteil, R. Jennane, I. Iribarren, E. Perrin, C. L. Benhamou *Analyse fractale par morceaux de radiographies osseuses*. GRETSI 2003.
- [5] R. Jennane, R. Harba, G. Jacquet. *Estimation de la Qualité des Méthodes de Synthèse du Mouvement Brownien Fractionnaire*. Traitement du Signal, Vol. 13, N° 4, pp. 289-302, 1996.
- [6] E. Perrin, R. Harba, R. Jennane, I. Iribarren. *Fast and exact synthesis for 1D fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises*. IEEE Signal Processing letters, Vol. 9, pp. 382-384, 2002.
- [7] M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbrot, H. O. Peitgen, D. Saupe, R. F. Voss. *The Science of Fractal Images*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [8] A. P. Pentland. *Fractal-Based Description of Natural Scenes*. IEEE PAMI-6, N° 6, pp. 661-674, 1984.
- [9] J. Feder. *Fractals*. Plenum Press, New York and London, 1988.
- [10] R. Piasecki. *Detecting self-similarity in surface microstructures*. Surf. Sci., pp. 454-456, 2000.
- [11] C. L. Benhamou, E. Lespessailles, G. Jacquet, R. Harba, R. Jennane, T. Loussot, D. Tourlière, W. J. Ohley. *A Fractal Evaluation of Trabecular Bone Microarchitecture on Radiographs*. Journal of Bone and Mineral Research, Vol. 9, N° 12, pp. 1909-1918, 1994.
- [12] R. Jennane, W. J. Ohley, S. Majumdar, G. Lemineur. *Fractal Analysis of Bone X-Ray Tomographic Microscopy Projections*. IEEE Trans. on Med. Imag., Vol. 20, N° 5, 2001.