

Traitement multidimensionnel du signal par décomposition tensorielle

Damien MUTI¹, Salah BOURENNANE¹

¹Institut Fresnel / UMR CNRS 6133 - ENSPM,
D.U. de Saint Jérôme F-13397 MARSEILLE Cedex 20, FRANCE.
damien.muti@fresnel.fr, salah.bourennane@fresnel.fr

Résumé – La modélisation multidimensionnelle du signal a été récemment adoptée moyennant l’ utilisation de nouveaux outils d’algèbre multilinéaire. Cet article présente tout d’abord la décomposition tensorielle de Tucker3 appelée aussi approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur d’ un tenseur, puis montre comment cet outil mathématique permet de développer un filtrage linéaire multidimensionnel. Une étude sur l’efficacité du filtrage est proposée pour le cas particulier du débruitage d’ une image en couleur.

Abstract – A multidimensional signal modelling has recently been adopted and implies the use of new tensorial algebra mathematical tools. This article presents Tucker3 tensor decomposition also called lower rank- (R_1, \dots, R_N) tensor approximation. It is shown how this mathematical tool consists in a linear multidimensional filtering. A study on the filtering efficiency is proposed and applied to the particular case of color-image denoising.

1 Introduction

Une modélisation multidimensionnelle peut être adoptée dans un grand nombre de problèmes se rattachant à des domaines aussi variés que la sociologie, l’ analyse de données ou le traitement du signal [2]. En physique et traitement du signal, les enregistrements numériques multidimensionnels sont modélisés par des tenseurs. Chaque mode d’ un tenseur représente une grandeur physique telle que l’ espace (longueur, largeur, hauteur), le temps, le canal de couleur (longueur d’ onde), à laquelle est associée un espace vectoriel dont la dimension est égale au nombre d’ échantillons numériques effectués dans cette dimension. Par exemple, une image en couleur se modélise par un tenseur trimodal : deux modes sont associés aux lignes et aux colonnes, et un troisième au canal de couleur (RVB). De même, en sismique, ou en acoustique sous-marine, lorsqu’ une antenne rectiligne est employée, une modélisation trimodale des données peut être adoptée : un mode est associé à l’ axe spatial, un mode au temps, et un dernier à la polarisation de l’ onde.

Les traitements des données multidimensionnelles procèdent généralement à un découpage du tenseur en vecteurs, ou matrices d’ observations, de sorte que les méthodes du second ordre soient applicables. Ces méthodes reposent essentiellement sur la matrice de covariance, et plus récemment sur les statistiques d’ ordre supérieur [1]. Les données traitées sont ensuite fusionnées pour retrouver la dimension du tenseur initial.

Ce processus de découpage des données multidimensionnelles provoque inévitablement une perte d’ information par rapport à la quantité globale d’ information contenue dans le tenseur. En effet, par ce découpage, nous perdons les relations inter-composantes qui existent entre chaque “tranches” du tenseur.

Dans cet article, nous proposons de conserver le tenseur de données comme entité indivisible de manière à disposer po-

tentiellement de plus d’ information que ce que nous pourrions obtenir par le découpage du tenseur de données. Par cette approche, nous cherchons à améliorer le traitement des données obtenu par les méthodes de second ordre. Cette nouvelle approche implique l’ utilisation de nouveaux outils d’ algèbre tensorielle, et tout particulièrement de décomposition tensorielle.

Notre méthode repose sur de la décomposition tensorielle de Tucker3 [14] aussi connue sous le nom de Higher Order Singular Value Decomposition (HOSVD) ou approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur [5, 6]. Cette décomposition représente la généralisation de la Décomposition en Valeurs Singulières (DVS) des matrices aux tenseurs.

Dans la suite, la section 2 propose un bref rappel d’ algèbre tensorielle et présente de façon plus détaillée la décomposition de Tucker3 appelée aussi approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur d’ un tenseur (LRTA). La section 3 présente comment ce nouvel outil mathématique d’ approximation tensorielle a été initialement utilisé en traitement du signal, notamment pour l’ analyse en composantes principales de données sismiques tridimensionnelles [9, 10, 11]. Une nouvelle interprétation physique de la décomposition tensorielle LRTA appliquée à des données tensorielles est proposée. Elle constitue un filtrage linéaire multidimensionnel dans laquelle, dans chaque mode du tenseur le sous-espace bruit et le sous-espace signal sont déterminés, et une projection sur le sous-espace signal est effectuée. Enfin, dans la section 4, l’ apport de ce nouveau filtrage multidimensionnel par rapport à un filtrage bidimensionnel classique est montré pour le cas particulier du débruitage d’ une image en couleur. Enfin, une étude qualitative (en terme d’ efficacité de filtrage) sur l’ algorithme ALS qui entre en jeu dans l’ approximation tensorielle est proposée.

2 Approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur

Un tenseur d'ordre N peut être considéré comme un tableau multidimensionnel dont chaque élément est accessible via N indices. Ce tenseur est noté par $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, où I_n représente la dimension de l'espace E_n associé au mode n . Le n -mode rang du tenseur \mathcal{A} , noté $\text{Rank}_n(\mathcal{A})$, est la dimension du n -mode espace vectoriel E_n généré par les vecteurs I_n -dimensionnels obtenus à partir du tenseur \mathcal{A} en faisant varier l'indice i_n du mode n , l'indice des autres modes restant fixés. \mathcal{A} est dit de rang- (R_1, \dots, R_N) si quel que soit $k = 1, \dots, N$, $\text{Rank}_k(\mathcal{A}) = R_k$. Ainsi, étant donné un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N , le problème d'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur de \mathcal{A} consiste à trouver le tenseur \mathcal{B} de rang- (R_1, \dots, R_N) , tel que $\forall n = 1, \dots, N$, $R_n < I_n$, et tel que la distance quadratique tensorielle :

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|^2 \quad (1)$$

soit minimale.

La décomposition tensorielle de Tucker3 de \mathcal{B} , qui correspond à la généralisation de la DVS matricielle aux tenseurs [14], s'exprime par l'expression suivante :

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} \times_1 U^{(1)} \times_2 U^{(2)} \dots \times_N U^{(N)}. \quad (2)$$

$U^{(n)}$ est une matrice orthogonale de dimension $(I_n \times R_n)$, $\forall n = 1, \dots, N$. $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{R_1 \times \dots \times R_N}$ est appelé tenseur "Core", et \times_n est le n -mode produit dont toutes les propriétés peuvent être retrouvées dans [6].

La solution des moindres carrés [8] implique que :

$$\mathcal{D} = \mathcal{A} \times_1 U^{(1)T} \times_2 U^{(2)T} \dots \times_N U^{(N)T}. \quad (3)$$

Par conséquent, l'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur optimale s'exprime par :

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 P^{(1)} \dots \times_N P^{(N)}. \quad (4)$$

Quel que soit $n = 1 \dots N$, $P^{(n)}$ est le projecteur n -modal sur le sous-espace $E_1^{(n)}$ de $E^{(n)}$, de dimension R_n , qui satisfait à la minimisation de l'expression (1) :

$$P^{(n)} = U^{(n)} U^{(n)T}. \quad (5)$$

Le but de l'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur est donc de déterminer les matrices $U^{(n)}$ qui définissent les projecteurs $P^{(n)}$. Dans ce but, il est montré [8] que minimiser (1) par rapport à \mathcal{B} est équivalent à maximiser la fonction quadratique :

$$g(U^{(1)}, \dots, U^{(N)}) = \|\mathcal{D}\|^2 \quad (6)$$

par rapport aux matrices $U^{(1)}, \dots, U^{(N)}$. Il s'agit d'un problème d'optimisation non linéaire des moindres carrés qui ne peut-être résolu qu'à l'aide de processus itératifs et numériques Alternative Least Square (ALS) [5, 7, 8, 15]. En effet, les matrices $U^{(n)}$ qui maximisent la relation (6) doivent être déterminées conjointement. Le but de ces méthodes est de construire les suites matricielles $\left\{ U_k^{(n)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$, $n = 1, \dots, N$, qui convergent vers les matrices optimales $U^{(n)}$. Chaque itération de l'algorithme ALS est composé de N étapes dans lesquelles les suites $\{U_k^{(n)}\}$ sont définies par récurrence en fixant

les suites $\{U_k^{(m)}\}$, $m \in \{1, \dots, N\} - \{n\}$, à la valeur de leur dernière itération, et en maximisant la fonction :

$$\begin{aligned} h_n^k(V^{(n)}) &= \left\| \mathcal{A} \times_1 U_{k+1}^{(1)T} \dots \times_{n-1} U_{k+1}^{(n-1)T} \times_n V^{(n)} \right. \\ &\quad \left. \times_{n+1} U_k^{(n+1)T} \dots \times_N U_k^{(N)T} \right\|^2 \\ &= \text{tr}(V^{(n)T} \cdot C_k^{(n)} \cdot V^{(n)}). \end{aligned} \quad (7)$$

Dans cette dernière relation (7), la matrice $C_k^{(n)}$ est définie par :

$$C_k^{(n)} = A_n^T \cdot (P_{k+1}^{(1)} \otimes \dots \otimes P_{k+1}^{(n-1)} \otimes P_k^{(n+1)} \otimes \dots \otimes P_k^{(N)}) \cdot A_n. \quad (8)$$

$P_k^{(n)}$ est le projecteur défini par :

$$P_k^{(n)} = U_k^{(n)} U_k^{(n)T}. \quad (9)$$

La matrice $U_{k+1}^{(n)}$ est l'argument qui maximise la fonction $h_n^k(V^{(n)})$ sur l'ensemble des matrices orthogonales. Il s'agit de la matrice des R_n vecteurs propres associés aux R_n plus grandes valeurs propres de la matrice $C_k^{(n)}$.

Enfin, l'algorithme ALS est arrêté lorsque $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|^2$ est inférieur à un seuil fixé a priori.

Il est possible de donner une interprétation physique à la matrice $C_k^{(n)}$ définie par la relation (8). En effet, quelle que soit l'itération k du processus ALS, le terme générique de la matrice $C_k^{(n)}$ est donné par :

$$C_{ij}^{(n),k} = \left\langle \mathcal{A}_{i_n=i} | \mathcal{B}_{i_n=j}^{(n),k} \right\rangle. \quad (10)$$

Dans cette expression, le tenseur $\mathcal{B}^{(n),k}$ s'obtient en appliquant au tenseur \mathcal{A} les projecteurs m -modaux $P_k^{(m)}$ sur tous les modes, excepté le mode n :

$$\mathcal{B}^{(n),k} = \mathcal{A} \times_1 P_{k+1}^{(1)} \dots \times_{n-1} P_{k+1}^{(n-1)T} \times_{n+1} P_k^{(n+1)} \times_N P_k^{(N)}. \quad (11)$$

La relation (10) montre que le terme $C_{ij}^{(n),k}$ est le produit scalaire de deux sous-tenseurs d'ordre $N - 1$ extraits de \mathcal{A} et de $\mathcal{B}^{(n),k}$ en fixant l'indice du mode n respectivement à i et j . Par conséquent, d'un point de vue traitement du signal, la matrice $C_k^{(n)}$ peut-être considérée comme la matrice de covariance des sous-tenseurs d'ordre $N - 1$ extraits de \mathcal{A} et $\mathcal{B}^{(n),k}$ dans le mode n [12, 13].

Par la suite, nous désignons par LRTA (Lower Rank- (R_1, \dots, R_N) Tensor Approximation) l'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur d'un tenseur.

3 LRTA pour le traitement des signaux multidimensionnels

L'outil mathématique LRTA a d'abord été introduit en traitement du signal pour l'Analyse en Composantes Indépendantes (ACI) et la séparation de sources [3, 4]. Cet outil a ensuite été employé en sismique pour l'Analyse en Composantes Principales de signaux tridimensionnels (ACP-3D) [9, 10, 11]. Dans cette dernière approche, le modèle bidimensionnel est étendu à un modèle tensoriel de données dans lequel les données multidimensionnelles \mathcal{R} résultent de l'enregistrement numérique d'un signal multidimensionnel \mathcal{X} et d'un bruit additif \mathcal{B} :

$$\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{B}. \quad (12)$$

Ce modèle établi dans le cas de données tridimensionnelles peut évidemment être généralisé au cas de dimensions supérieures. En considérant le cas général, chaque espace n -modal $E^{(n)}$, de dimension I_n , est considéré comme étant la superposition de deux sous-espaces orthogonaux complémentaires : le sous-espace signal $E_1^{(n)}$ de dimension R_n , et le sous-espace bruit $E_2^{(n)}$ de dimension $I_n - R_n$. Cette hypothèse étant définie, l'ACP-3D vise à estimer le sous-tenseur signal par l'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur de \mathcal{R} :

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{R} \times_1 P^{(1)} \dots \times_N P^{(N)}. \quad (13)$$

Quel que soit $n = 1, \dots, N$, $P^{(n)}$ est le projecteur sur le sous-espace signal $E_1^{(n)}$. Ainsi, $\hat{\mathcal{X}}$ est obtenu en effectuant la projection du tenseur \mathcal{R} sur les sous-espaces signal de chaque mode.

Il est possible de donner une nouvelle interprétation à ce résultat. En effet, le n -mode produit $\mathcal{R} \times_n P^{(n)}$ représente les produits matriciels consécutifs entre la matrice $P^{(n)}$ et les vecteurs de dimension I_n obtenus en faisant varier l'indice n -modal i_n , les autres indices m -modaux, $m \neq n$, étant fixés. Par conséquent, d'un point de vue traitement du signal, le n -mode produit représente un filtrage linéaire des données multidimensionnelles dans le mode n , par le filtre $P^{(n)}$. Nous le désignons par la suite par "filtrage n -modal". Ainsi, l'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur de \mathcal{R} représente un filtrage linéaire multidimensionnel par les n -modes filtres $P^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$.

4 Simulations et résultats

Dans cette section, nous nous proposons dans un premier temps, de montrer l'apport de ce nouveau filtrage multidimensionnel par rapport à des méthodes de filtrage bidimensionnelles classiques. Dans un second temps, nous étudions l'efficacité en terme de filtrage de l'algorithme ALS qui entre en jeu dans l'approximation tensorielle LRTA. Les simulations proposées concernent tout particulièrement le cas de la réduction du bruit dans une image couleur (modélisées par un tenseur tridimensionnel) par filtrage multidimensionnel LRTA.

Il est tout d'abord possible de montrer que le filtrage par LRTA d'images non bruitées n'implique aucune déformation du signal filtré par rapport au signal initial. Ce résultat est par ailleurs généralisable à tout type de signaux.

Considérons l'image initiale représentée figure 1-a. Elle comporte 512 lignes, 384 colonnes, et 3 couleurs (RVB) dont chaque intensité est comprise entre 0 et 255, et se modélise par un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{512 \times 384 \times 3}$. Nous additionnons à cette image un bruit gaussien de façon à obtenir une image \mathcal{R} telle que :

$$\mathcal{R} = \mathcal{X} + 0.9 * 255 * \mathcal{G},$$

où \mathcal{G} représente un bruit échantillonné sur une densité de probabilité gaussienne, tridimensionnelle, centrée, normée. L'image bruitée \mathcal{R} est représentée figure 1-b.

Pour cette simulation, nous considérons que les paramètres R_1 , R_2 et R_3 sont connus et fixés respectivement à 30, 30 et 3. Les approximations de rang- $(30, 30)$ inférieures des sous-images bidimensionnelles correspondant à chaque canal de couleur (rouge, vert et bleu) sont tout d'abord déterminées. Le résultat de ce premier traitement est représenté figure 1-c. Ces

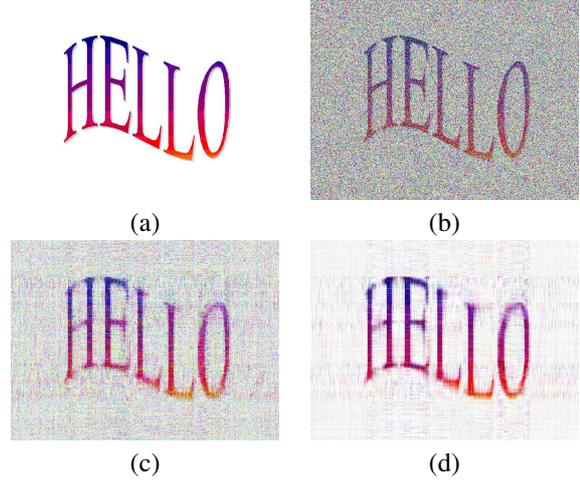


FIG. 1: Débruitage d'une image couleur de 512×384 pixels.

approximations sont effectuées par troncature de la décomposition en valeurs singulières de chaque sous-image bidimensionnelle et constituent un filtrage linéaire couramment employé en traitement d'image. L'approximation de rang- $(30, 30, 3)$ de l'image bruitée est ensuite calculée. Le résultat est représenté figure 1-d. La qualité de l'image 1-d ainsi obtenue est meilleure que celle de l'image 1-c obtenue par filtrage bidimensionnel classique.

Ainsi, cet exemple simple montre l'efficacité d'une approche tensorielle globale par rapport à une approche bidimensionnelle qui procède au découpage du tenseur des données multidimensionnelles en sous-matrices et qui implique une perte d'information par rapport à l'approche tensorielle.

Afin d'étudier l'efficacité du filtrage par LRTA sur des données bruitées, considérons le critère de l'erreur quadratique moyenne normalisée (EQMN) :

$$EQMN = \frac{\|\hat{\mathcal{X}} - \mathcal{X}\|^2}{\|\mathcal{X}\|^2}, \quad (14)$$

dans lequel $\hat{\mathcal{X}}$ est le signal multidimensionnel estimé par approximation LRTA, et \mathcal{X} , le signal initial non bruité. Les images en couleur étant considérées comme des tenseurs tridimensionnels, chaque itération k de l'algorithme ALS qui rentre en jeu dans l'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur est composée de trois étapes, dans lesquelles sont déterminés les n -mode filtres-projecteurs $P_k^{(n)}$, et au terme desquelles est calculé l'estimation intermédiaire $\hat{\mathcal{X}}_k = \mathcal{R} \times_1 P_k^{(1)} \times_2 P_k^{(2)} \times_3 P_k^{(3)}$ ainsi que le critère EQMN correspondant. L'évolution de ce critère au cours des itérations ALS est représenté figure 2. Nous constatons que l'EQMN est minimale à la première itération. Cette propriété est vérifiée sur l'ensemble des images testées.

La détérioration de l'EQMN pour les itérations supérieures semble logique car la méthode de décomposition tensorielle initiale de Tucker [14] cherche à approximer un tenseur non bruité par un tenseur de rang inférieur. Dans ce papier, nous avons étendu tel quel l'algorithme initial à des signaux bruités. Par conséquent, nous considérons que le meilleur filtrage (au sens de la minimisation du EQMN) qu'il est possible d'obtenir par l'approximation LRTA est atteinte à la première itération ALS. L'estimation obtenue correspond à la troncature de taille

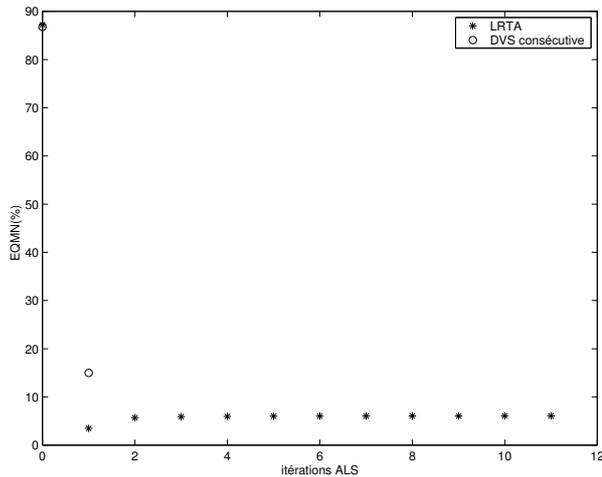


FIG. 2: Evolution de l'EQMN au cours des itérations ALS de l'approximation LRTA.

(30, 30, 3) de la Décomposition en Valeurs Singulières d'Ordre Supérieure (HOSVD [5]) du signal bruité \mathcal{R} . Par ailleurs, l'image estimée, représentée figure 1-d, constitue la troncature de taille (30, 30, 3) de la HOSVD de \mathcal{R} . Notons aussi que l'EQMN obtenue par l'approximation LRTA est toujours inférieure à celle obtenue par la méthode de filtrage bidimensionnel successif, ce qui confirme l'efficacité de l'approche tensorielle par rapport à l'approche bidimensionnelle.

5 Conclusion

L'approximation de rang- (R_1, \dots, R_N) inférieur d'un tenseur (LRTA) constitue un nouvel outil mathématique pour le traitement des données multidimensionnelles. Le n -mode produit, effectuant les produits matriciels successifs entre les différentes tranches bidimensionnelles d'un tenseur de données et la matrice de projection sur le sous-espace signal n -modal représente un opérateur de filtrage n -modal. Par conséquent, l'approximation LRTA d'un tenseur de données est un filtrage linéaire multidimensionnel dont les filtres n -modaux sont représentés par les projecteurs sur les sous-espaces signaux n -modaux. Ainsi, dans un cadre de filtrage appliqué au débruitage d'images en couleur RVB, nous avons montré que le meilleur filtrage (au sens de l'erreur quadratique moyenne normalisée minimale) qu'il est possible d'obtenir par l'approximation LRTA est atteinte à la première itération ALS entrant en jeu dans l'approximation tensorielle. L'apport de cette nouvelle approche tensorielle par rapport à une approche bidimensionnelle classique est aussi démontré par les bons résultats obtenus lors des simulations de débruitage des images en couleur. Cependant, cette méthode reste paramétrique et son efficacité dépend de l'estimation des rangs modaux R_n optimaux.

Cette nouvelle représentation tensorielle des données associée à l'outil mathématique d'approximation tensorielle constitue un cadre nouveau pour l'élaboration d'un filtrage multidimensionnel dont les premiers résultats sont encourageants.

Références

[1] S. Bourennane and A. Bendjama. Locating wide band acoustic sources using higher order statistics. *Applied*

Acoustics, 63 :235–251, avril 2002.

- [2] P. Comon. Tensor decompositions, state of the art and applications. In *IMA Conf. Mathematics in Signal Processing*, Warwick, UK, Dec. 18-20, 2000. keynote address.
- [3] L. De Lathauwer. *Signal Processing Based on Multilinear Algebra*. Phd thesis, K.U. Leuven, E.E. Dept. (ESAT), Belgium, september 1997.
- [4] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. Fetal electrocardiogram extraction by blind source subspace separation. In *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, volume 47, pages 567–572, Las Vegas, May 2000.
- [5] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. A multilinear singular value decomposition. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21 :1253–1278, april 2000.
- [6] L. De Lathauwer, B. De Moor, and J. Vandewalle. On the best rank (r_1, \dots, r_N) . *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21 :1324–1342, april 2000.
- [7] E. Kofidis and P.A. Regalia. On the best rank-1 approximation of higher-order supersymmetric tensors. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(3) :863–884, march 2002.
- [8] P.M. Kroonenberg and J. De Leeuw. Principal Component Analysis of three-mode data by means of alternating least squares algorithms. *Psychometrika*, 45 :69–97, 1980.
- [9] N. Le Bihan. *Traitement algébrique des signaux vectoriels : Application à la séparation d'ondes sismiques*. Phd thesis, INPG, Grenoble, France, 22 octobre 2001.
- [10] N. Le Bihan, J.-L. Lacoume, and J. Mars. Séparation d'onde sur un réseau de capteur multidimensionnel. In *Gretsi*, Toulouse, France, september 2001.
- [11] N. Le Bihan, S. Lariani, and J. Mars. Seismic cube decomposition before reservoir characterisation. In *71st Conference of the Society of Exploration Geophysicists (SEG)*, San Antonio, USA, september 2001.
- [12] D. Muti and S. Bourennane. Fast optimal lower-rank tensor approximation. In *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology*, pages 621–625, Marrakesh, Morocco, Dec. 18-21, 2002.
- [13] D. Muti and S. Bourennane. Multidimensional signal processing using lower rank tensor approximation. In *IEEE International Conference on Acoustics Systems and Signal Processing*, Hong Kong, China, April 6-10, 2003.
- [14] L.R. Tucker. The extension of factor analysis to three-dimensional matrices. In H. Gulliksen and N. Frederiksen, editors, *Contribution to mathematical psychology*, pages 109–127. Holt, Rinehart and Winston, NY, 1964.
- [15] T. Zhang and G.H. Golub. Rank-one approximation to high order tensor. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(2) :534–550, November 2001.