

Séparation aveugle d'un mélange convolutif de sources non linéaires par une approche hiérarchique

Marc CASTELLA, Antoine CHEVREUIL, Jean-Christophe PESQUET

Institut Gaspard Monge et UMR-CNRS 5141
Université Marne-la-Vallée, Cité Descartes
5 bd Descartes, Champs-sur-Marne
77454 Marne-la-Vallée CEDEX 2
{castellm, chevreui, pesquet}@univ-mlv.fr

Résumé – Cette communication concerne la séparation aveugle de sources dans le cas de mélanges convolutifs de sources non linéaires (et donc non i.i.d.). Ce cadre général, bien que peu souvent envisagé dans la littérature, est pourtant central d'un point de vue applicatif.

Une méthode itérative a été proposée [10]; cependant la déflation entraîne une accumulation d'erreurs parfois gênante. Nous proposons une approche hiérarchique inspirée de [6] pour laquelle ce phénomène d'accumulation n'est pas sensible.

Nous démontrons le bien-fondé de la méthode et sa convergence vers un filtre séparant dans le cas général de sources non linéaires et non i.i.d. Enfin des simulations valident ces considérations théoriques pour des modèles classiques de processus non linéaires (ARCH).

Abstract – This paper deals with blind source separation of convolutive mixtures of non linear (and hence non i.i.d.) sources. This general framework, although rarely treated in literature, is of great importance in applications.

An iterative method was proposed [10]; however, the deflation procedure induces an error accumulation effect. We propose a hierarchical approach inspired from [6] which is less sensitive to error accumulation.

We prove the validity of the method and its convergence to a separating filter in the general case of non linear sources. Finally, simulations confirm our theoretical considerations for classical non linear processes (ARCH).

1 Introduction

Depuis plusieurs années, la séparation de sources est un sujet de recherche particulièrement actif. Cet engouement peut s'expliquer par le large spectre d'applications envisageables ; on peut notamment citer les télécommunications, l'acoustique, la sismologie, le domaine biomédical, . . . L'approche aveugle de la séparation, à laquelle nous nous intéressons, offre en outre l'avantage de ne requérir que des hypothèses faibles sur le mélange : en dehors de sa structure générale, souvent supposée linéaire, aucun paramètre n'est supposé connu.

Depuis plusieurs années, des méthodes efficaces existent pour la séparation des mélanges linéaires instantanés de sources [3, 2]. Le cas des mélanges convolutifs demeure en revanche plus difficile. Trois directions ont été principalement explorées.

Généralisant les contrastes introduits pour les mélanges instantanés, des méthodes de séparation par « bloc » ont été proposées pour des sources i.i.d. [4, 8]. Leur inconvénient majeur réside à la fois dans l'existence de maxima locaux parasites et dans la nécessité d'un préblanchiment temporel qui est délicat.

Malgré certaines difficultés d'estimation statistique, des approches fréquentielles ont également prouvé leur validité dans le cas des sources i.i.d. [1] puis non i.i.d. [9].

Enfin, une approche itérative de reconstruction des sources a été proposée [12, 10]. Cette méthode consiste à extraire une source, puis, par moindres carrés, à retrancher sa contribution dans le mélange. Ceci justifie le nom de déflation donné à la méthode. Le procédé est répété jusqu'à extraction de la der-

nière source, induisant de fait une accumulation des erreurs.

Inspirés par les approches proposées dans [11] et [6], nous avons mis en oeuvre une méthode où, après reconstruction d'une source, *nous ne soustrayons pas sa contribution dans le mélange* comme en déflation, mais où nous utilisons les sources précédemment extraites afin de contraindre l'espace de recherche des sources suivantes. Cette procédure, dont nous prouvons la convergence globale vers une solution séparante, peut selon les cas être qualifiée de multi-niveau [6] ou hiérarchique [11]. Notre originalité par rapport aux travaux cités se situe dans le fait que nous considérons des sources *a priori* non linéaires, *i.e.* qui ne sont pas des filtrées de sources i.i.d. Il convient de souligner que les approches existantes permettant de séparer des signaux non i.i.d. sont essentiellement limitées au cas instantané ou au cas de sources linéaires ou de spectres distincts. La méthode ici décrite ne nécessite par ailleurs aucun préblanchiment, ce qui lui confère un atout non négligeable pour une séparation en situation réelle.

2 Formalisation du problème

Le modèle classique d'un mélange convolutif de sources s'écrit :

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{M}[z]\mathbf{s}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{M}(n-k)\mathbf{s}(k), \quad (1)$$

où les composantes du signal $\mathbf{s}(n) = (s_1(n), \dots, s_N(n))^T$ sont appelées sources et sont inconnues et où le vecteur $\mathbf{x}(n) =$

$(x_1(n), \dots, x_N(n))^T$ correspond aux observations, obtenues par filtrage des sources par le filtre multivarié $\mathbf{M}[z]$.

Le but de la séparation aveugle consiste, au vu de certaines caractéristiques de la seule série temporelle $(\mathbf{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, à déterminer un filtre séparateur $\mathbf{W}[z]$ de sorte que le filtre global $\mathbf{G}[z] := \mathbf{W}[z]\mathbf{M}[z]$ soit, à une permutation près, un filtre diagonal :

$$\mathbf{G}[z] = \mathbf{P} \text{diag}(d_1[z], \dots, d_N[z]) \quad (2)$$

Ainsi, nous obtenons en sortie globale des filtrées des sources de départ.

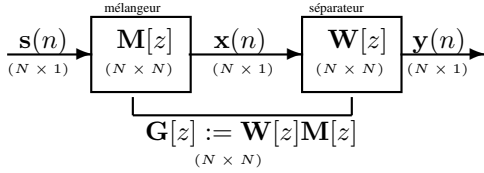


FIG. 1 – Système global

Il existe une solution à ce problème sous la condition que les hypothèses suivantes soient satisfaites :

A.1 stationnarité des sources ; existence et non nullité de leur champ d’auto-cumulants d’ordre 4. Pour chaque source, il existe un intervalle ouvert sur lequel sa densité spectrale est non nulle. Les fonctions de covariance respectives de chacune des sources s_k , $k \in \{1, \dots, N\}$ seront notées γ_k .

A.2 indépendance mutuelle des sources $(s_1(n))_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (s_N(n))_{n \in \mathbb{Z}}$.

A.3 inversibilité à gauche du filtre $\mathbf{M}[z]$.

En dehors de A.1, A.2, A.3, aucune autre information n’est supposée connue *a priori*. La séparation est par conséquent dite aveugle.

Notons que l’inversion de $\mathbf{W}[z]$, à une matrice diagonale et une permutation près, laisse une ambiguïté de filtrage scalaire. Ainsi, contrairement au cas instantané, les sources ne peuvent, dans le cas général, être reconstruites qu’à un filtrage scalaire près. Pour limiter cette ambiguïté à un simple retard, la majorité des travaux existant ne considèrent que des sources temporellement i.i.d. ou linéaires (une source est dite linéaire lorsqu’elle est la filtrée scalaire d’une source i.i.d. Dans ce cas, la séparation de source restitue alors le processus source de départ.) Notre approche reste cependant valable dans le cas général de sources non linéaires, ni *a fortiori* i.i.d. ni même décorréliées temporellement.

3 Méthode de séparation

3.1 Description théorique

Pour tout signal $(r(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, nous noterons $\kappa_r(k_1, k_2, k_3) := \text{Cum}[r(n), r^*(n+k_1), r(n+k_2), r^*(n+k_3)]$ l’auto-cumulant d’ordre 4 pris à des retards $\mathbf{k} := (k_1, k_2, k_3)$. Considérons pour $P \in \{1, \dots, N\}$ la famille de critères suivante, où \mathcal{S} représente un sous-ensemble de \mathbb{Z}^3 et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, convexe et nulle en 0 :

$$J_P(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^P \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}} f(|\kappa_{y_i}(k_1, k_2, k_3)|). \quad (3)$$

Dans le cas où $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$, et $P = 1$, nous reconnaissons le contraste considéré dans [12, 10] (un contraste est un critère dont la maximisation mène à la séparation). Compte tenu de la non-linéarité des sources et de ce que le filtre séparant peut être de réponse impulsionnelle infinie, nous ferons l’hypothèse théorique suivante, qui bien sûr ne constitue en rien une restriction dans un cadre applicatif :

A.4 Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, la quantité suivante \mathcal{M}_i est supposée finie dans \mathbb{R}_+^* :

$$0 < \mathcal{M}_i := \sup_{\|h\|_i=1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}} f(|\kappa_{h[z]s_i(n)}(k_1, k_2, k_3)|) < +\infty, \quad (4)$$

où $h[z]$ représente un filtre 1×1 et $\|h\|_i$ sa norme (indice i) définie par $\|h\|_i^2 := \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} h(k)h(l)^* \gamma_i(k-l)$. Par ailleurs, la borne supérieure est supposée atteinte pour un filtre $g_i^\# [z]$ de norme indice i unité.

Pour $P = N$ nous savons que le critère $J_P(\mathbf{y})$ ne constitue un contraste que sous contrainte de para-unitarité [7] (sa maximisation sans contrainte pourrait, en effet, donner N fois la même source). A condition d’introduire des contraintes correctement choisies, la famille de critères $J_P(\mathbf{y})$ constitue ainsi un intermédiaire entre les approches «bloc» et déflation en séparation de sources.

La procédure de séparation mise en œuvre consiste en la maximisation successive pour P variant de 1 à N du critère $J_P(\mathbf{y})$ sous les contraintes suivantes :

$$\mathbf{C.1} \quad \forall i \in \{1, \dots, P\} \quad E\{|y_i|^2\} = 1$$

$$\mathbf{C.2} \quad \forall i, 1 \leq i < P \quad E\{y_i(n)y_P^*(n-k)\} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

L’apport majeur de notre travail par rapport à [6] réside dans la possibilité de considérer des sources non i.i.d. et dans l’absence de tout préblanchiment des observations.

Proposition 1 *A l’issue des maximisations globales successives de $J_1(\mathbf{y}), J_2(\mathbf{y}), \dots, J_N(\mathbf{y})$ sous les contraintes C.1 et C.2, le filtre $\mathbf{W}[z]$ obtenu est tel que le système global $\mathbf{G}[z]$ soit séparant (i.e. diagonal à une permutation près).*

preuve : Nous supposons sans aucune perte de généralité que les sources sont rangées dans un ordre tel que $\mathcal{M}_1 \geq \mathcal{M}_2 \geq \dots \geq \mathcal{M}_N$. Réécrivons la i -ème sortie du séparateur comme :

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^N G_{ij}[z]s_j(k) = \sum_{j=1}^N \|G_{ij}\|_j \tilde{G}_{ij}[z]s_j(k) \quad (5)$$

où les $\tilde{G}_{ij}[z]$ sont de norme indice j unité (ou nuls dans le cas particulier où $G_{ij}[z]$ est lui-même nul). Par multilinéarité des cumulants, indépendance des sources et convexité de f , nous obtenons la majoration suivante :

$$J_P(\mathbf{y}) \leq \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N \|G_{ij}\|_j^4 \mathcal{M}_j. \quad (6)$$

Démontrons la proposition 1 par récurrence sur P : supposons que nous ayons pu extraire $P-1$ sources, c.à.d. que

$$\forall i \in \{1, \dots, P-1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad \|G_{ij}\|_j = \delta_{i-j}, \quad (7)$$

où δ représente le symbole de Kronecker. Une forme équivalente de la contrainte C.2 s’écrit :

$$\text{C.3 } \forall i \in \{1, \dots, P\} \quad \forall \omega \in]-\pi, \pi[\\ \sum_{j=1}^N S_j(\omega) G_{Pj}^*(\omega) G_{ij}(\omega) = 0$$

où $\sum_{j=1}^N S_j(\omega) G_{Pj}^*(\omega) G_{ij}(\omega) = S_{iP}(\omega)$ est l'interspectre de $y_i(n)$ avec $y_P(n)$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, nous obtenons donc :

$$\forall i < P \quad G_{ii}(\omega) G_{Pi}^*(\omega) S_i(\omega) = 0 \quad (8)$$

ce qui mène à :

$$\forall i < P \quad \|G_{Pi}\|_i = 0 \quad (9)$$

Utilisant (7) et (9) nous obtenons :

$$\begin{aligned} J_P(\mathbf{y}) &\leq \sum_{i=1}^{P-1} \sum_{j=1}^N \|G_{ij}\|_j^4 \mathcal{M}_j + \sum_{j=1}^N \|G_{Pj}\|_j^4 \mathcal{M}_j \\ &\leq \sum_{i=1}^{P-1} \mathcal{M}_i + \sum_{j=P}^N \|G_{Pj}\|_j^4 \mathcal{M}_j \\ &\leq \sum_{i=1}^{P-1} \mathcal{M}_i + \mathcal{M}_P \left(\sum_{j=P}^N \|G_{Pj}\|_j^4 \right) \leq \sum_{i=1}^P \mathcal{M}_i \end{aligned} \quad (10)$$

Si la P -ème étape de l'algorithme est séparante, alors $\|G_{Pi}\|_i = \delta_{P-i}$ et $J_P(\mathbf{y})$ atteint sa valeur maximale $\sum_{i=1}^P \mathcal{M}_i$. Réciproquement, si $J_P(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^P \mathcal{M}_i$, nous obtenons alors égalité dans (10) et :

$$\mathcal{M}_P = \sum_{j=P}^N \|G_{Pj}\|_j^4 \mathcal{M}_j, \quad (11)$$

ce qui donne $\forall j \in \{1, \dots, N\}$, $\|G_{Pj}\|_j = \delta_{j-j_P}$ où $j_P \geq P$ et $\mathcal{M}_P = \mathcal{M}_{j_P}$ (on peut donc supposer $j_P = P$ sans perte de généralité).

La démonstration du cas $P = 1$ est par ailleurs semblable à celle qui vient d'être faite, ce qui achève la démonstration. ■

3.2 Cas particulier sans maxima locaux parasites

La proposition précédente, quoique fort utile pour la séparation de sources non i.i.d., peut rencontrer un écueil lorsque le critère considéré présente des maxima locaux parasites. Aussi, dans le cas où $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$ et en nous inspirant de [10], nous pouvons démontrer :

Proposition 2 *En choisissant $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$ dans (3), la suite de maximisations locales successives de $J_1(\mathbf{y})$, $J_2(\mathbf{y})$, \dots , $J_N(\mathbf{y})$ sous C.1, C.2 fournit un système global séparant.*

preuve : D'après le raisonnement fait dans la preuve de la proposition 1, C.2 entraîne (9). Maximiser $J_P(\mathbf{y})$ sous les contraintes C.1 et C.2 équivaut donc à maximiser $f(|\kappa_{y_P}(0, 0, 0)|)$ en tant que fonction de $G_{PP}[z], \dots, G_{PN}[z]$ sous contrainte de norme 1. Or d'après [10], tout maximum local d'une fonction de ce type permet de séparer une source. Ainsi, la maximisation sous contrainte de $J_P(\mathbf{y})$ ne peut mener à reconstruire une source déjà obtenue. ■

3.3 Considérations pratiques

L'optimisation des critères précédents, qui doit être réalisée sous contraintes, peut être effectuée par un simple algorithme

de gradient. Une renormalisation à chaque itération permet de fixer C.1, tandis que la contrainte C.2 est linéaire lorsque les sources i telles que $i < P$ sont fixées. Ainsi, elle peut aisément être prise en compte par projection sur l'espace des contraintes, ce qui permet de se ramener à une optimisation sans contrainte.

Cependant, lorsque la longueur du filtre séparant est fixée, une étude plus attentive des contraintes introduites montre que celles-ci se trouvent en surnombre par rapport aux degrés de liberté autorisés (voir également [6]). Aussi est-il nécessaire de procéder à une réduction du nombre de contraintes en ne conservant que les valeurs singulières les plus significatives dérivées de C.2. Le nombre de contraintes à considérer est donné par le raisonnement simple suivant : C.2 est introduite afin de ne pas reconstituer à nouveau une source obtenue précédemment ; aussi peut-elle s'exprimer de façon équivalente par :

$$\text{C.4 } \forall i, 1 \leq i < P \quad \mathbf{W}_P[z] \mathbf{M}^i[z] = 0,$$

où l'on a noté $\mathbf{W}_P[z]$ est la P -ème ligne du filtre séparant et $\mathbf{M}^i[z]$ la i -ème colonne du filtre de mélange. C.4 traduit ainsi une contrainte de triangularisation du filtre global dans la mesure où cette condition peut s'écrire $G_{Pi}[z] = 0$. Le nombre de contraintes à considérer peut alors facilement être déduite de l'écriture C.4.

4 Simulations

La méthode a été testée aussi bien pour des sources i.i.d. que pour des sources non i.i.d. Dans le premier cas, les sources sont reconstituées à une permutation, un retard et un facteur multiplicatif près ; il est donc possible, après élimination de ces ambiguïtés par une méthode de corrélation, de calculer l'erreur quadratique moyenne sur chacune des sources reconstituées. Dans le cas non i.i.d. en revanche, nous ne pouvons obtenir qu'une version filtrée de chacune des sources et, afin de quantifier la qualité de séparation, nous avons considéré le critère :

$$\tau_i := \frac{\max_{j \in \{1, \dots, N\}} \|G_{ij}\|^2}{\sum_{j=1}^N \|G_{ij}\|^2} \quad (12)$$

On a $0 \leq \tau_i \leq 1$ avec égalité à 1 dans le cas d'une séparation parfaitement réussie. Ce critère peut ainsi être interprété comme un pourcentage de séparation de la i -ème source.

Les résultats dans le cas i.i.d. sont donnés sur la figure 2 et le tableau 1. La méthode proposée a été comparée à une méthode classique par déflation. On peut observer que la méthode proposée offre un résultat légèrement meilleur que celui fourni par la déflation. Le tableau 1 indique que l'amélioration est d'autant plus marquée que la source est extraite tardivement au cours de la procédure puisque les erreurs s'accumulent au cours de la déflation.

Dans le cas de signaux non i.i.d., les résultats sont donnés en fonction du nombre d'échantillons pour des signaux de type ARCH(1) (voir [5] pour une présentation de ces signaux). On n'observe pas sur la figure 3 de différences significatives de performance entre τ_1, τ_2 et τ_3 , ce qui met en évidence que les performances de la méthode proposée ne se détériorent pas au fur et à mesure des itérations.

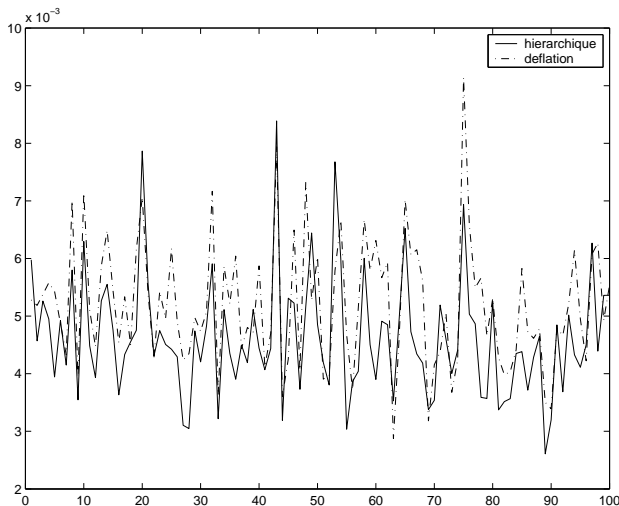


FIG. 2 – Comparaison des méthodes de séparation hiérarchique et par déflation : EQM sur les sources reconstruites, moyenné sur les 3 sources et pour 100 réalisations distinctes (filtres de mélange 3 entrées/6 capteurs et de longueur 3).

source reconstituée	1ère	2ème	3ème
déflation	0.0028	0.0051	0.0077
hiérarchique	0.0028	0.0045	0.0063

TAB. 1 – Comparaison de l’EQM sur la 1ère, 2ème et 3ème source pour les différentes méthodes de séparation (moyenne sur 100 réalisations, filtres de mélange 3 entrées/6 capteurs et de longueur 3).

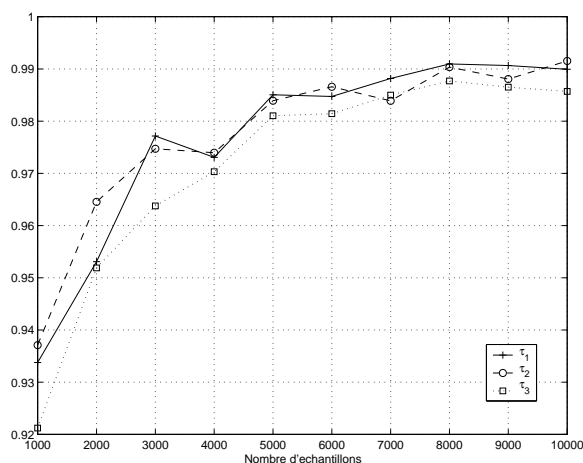


FIG. 3 – Évolution des critères τ_1, τ_2 et τ_3 en fonction du nombre d’échantillons disponibles. Résultats moyennés obtenus après tirage aléatoire de 100 systèmes 3 entrées/6 capteurs de longueur 3 et de 100 réalisations des signaux.

Références

- [1] V. Capdevielle, C. Servière, and J.-L. Lacoume. Blind separation of wide-band sources in the frequency domain. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2080–2083, Detroit, 1995.
- [2] J.-F. Cardoso. Blind signal separation : statistical principles. *Proceedings of the IEEE. Special issue on blind identification and estimation*, 9(10) :2009–2026, October 1998.
- [3] P. Comon. Independent component analysis, a new concept. *Signal Processing*, 36(3) :287–314, April 1994.
- [4] P. Comon. Contrasts for multichannel blind deconvolution. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(7) :209–211, July 1996.
- [5] D. Guégan. *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*. ECONOMICA, 1994.
- [6] Y. Inouye and T. Sato. Iterative algorithms based on multistage criteria for multichannel blind deconvolution. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(6) :1759–1764, June 1999.
- [7] R. Liu and Y. Inouye. Blind equalization of MIMO-FIR channels driven by white but higher order colored source signals. *IEEE Trans. Information Theory*, 48(5) :1206–1214, May 2002.
- [8] E. Moreau and J.-C. Pesquet. Generalized contrasts for multichannel blind deconvolution of linear systems. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(6) :182–183, June 1997.
- [9] J.-C. Pesquet, B. Chen, and A. P. Petropulu. Frequency-domain contrast functions for separation or convolutive mixtures. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, volume 5, pages 2765–2768, Salt Lake City, USA, May 2001.
- [10] C. Simon, P. Loubaton, and C. Jutten. Separation of a class of convolutive mixtures : a contrast function approach. *Signal Processing*, (81) :883–887, 2001.
- [11] A. Touzni, I. Fijalkow, M. G. Larimore, and J. R. Treichler. A globally convergent approach for blind MIMO adaptive deconvolution. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(6) :1166–1178, June 2001.
- [12] J. K. Tugnait. Identification and deconvolution of multi-channel linear non-gaussian processes using higher order statistics and inverse filter criteria. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(3) :658–672, March 1997.