

# Modélisation statistique de lignes et de points par courbes de Bézier composites

Barbara ROMANIUK<sup>1</sup>, Michel DESVIGNES<sup>2</sup>, Marinette REVENU<sup>1</sup>, Marie-Josèphe DESHAYES<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire GREYC IMAGE, Ensicaen  
6, Boulevard Maréchal Juin, 14050 Caen cedex 4, France

<sup>2</sup>Laboratoire LIS  
961, Rue de la houille blanche, BP 46 St Martin d'Herès, France

<sup>3</sup> Société Télécrâne Innovation  
<http://www.cranexplo.net>

[Barbara.Romaniuk@greyc.ismra.fr](mailto:Barbara.Romaniuk@greyc.ismra.fr), [michel.desvignes@lis.inpg.fr](mailto:michel.desvignes@lis.inpg.fr),  
[Marinette.Revenu@greyc.ismra.fr](mailto:Marinette.Revenu@greyc.ismra.fr), [deshayes@mail.cpod.fr](mailto:deshayes@mail.cpod.fr)

**Résumé** – Dans cet article nous proposons un modèle statistique non linéaire et invariant par transformations affines permettant d'apprendre un objet moyen (représenté par des points), sa variabilité et les relations spatiales existantes entre les différentes caractéristiques de l'objet étudié. La question qui se pose alors est : qu'est-ce qu'un objet ? La réponse que nous adoptons est de considérer qu'un objet est un ensemble de points et de formes. Nous mettons ici en place un formalisme permettant d'unifier les notions de point et de forme, en approximant les formes par des courbes de Bézier composites. L'ensemble de cette méthodologie a été évalué en céphalométrie dans le cadre de la modélisation de points et de structures anatomiques.

**Abstract** – In this paper we propose a non linear invariant statistical model and we learn the average object (represented by a set of points), its variability and relationships between characteristics of this object. What is an object? We consider that an object is a set of shapes and points. We establish here a formalism unifying shapes and points by approximating shape contours by composite Bézier curves. We finally evaluate our methodology in cephalometry, by modeling anatomical structures and points.

## 1 Introduction

Dans cet article nous nous intéressons à la modélisation de la variabilité de points et de courbes à des fins de reconnaissance. Les aspects originaux de ces travaux concernent aussi les relations spatiales entre objets et la localisation de ces objets dans une image. En utilisant les courbes de Bézier, le formalisme matriciel utilisé permet l'unification des représentations de lignes ou de points, facilitant leur exploitation. Nous présentons d'abord la modélisation des objets et de leur variabilité ainsi que la localisation des objets dans une image. Nous décrivons ensuite l'optimisation du processus d'approximation global des objets par des courbes de Bézier composites avant d'illustrer ces travaux par une application à la céphalométrie.

## 2 Modélisation de la variabilité d'un ensemble de points

La définition de forme souvent adoptée en reconnaissance statistique est celle d'un objet invariant par transformations du groupe Euclidien des similarités. Cette invariance est souvent obtenue par analyse de Procrustes généralisée [1]. L'apprentissage d'un modèle moyen peut ensuite être effectué par des méthodes linéaires telles que l'ACP ou non linéaires comme l'ACP à noyau [8]. Cette dernière dérive directement de l'ACP. L'idée de base dont nous nous inspirons est de transférer

les données dans un espace de caractéristiques  $F$  à l'aide d'une fonction non linéaire  $\varphi$  (non explicitée, car remplacée par les noyaux de Mercer), puis d'appliquer une ACP linéaire dans ce nouvel espace. La projection inverse dans l'espace d'origine étant difficile, les noyaux sont peu utilisés pour la reconnaissance de formes.

Deux axes principaux ont dirigé notre modélisation : capturer les non-linéarités des données grâce à une projection non linéaire et mettre en place une représentation de la variabilité des points et des relations spatiales entre ces points. La projection dans l'espace des caractéristiques est basée sur les connaissances *a priori*, se traduisant par l'existence d'une forme de référence (ensemble de points qui seront toujours visibles) [4]. Un modèle statistique permet alors d'apprendre la position moyenne de chaque objet et la variabilité associée.

### 2.1 Espace des caractéristiques

La première étape consiste en une détection de la forme de référence ( $p$  points  $P_k$ ). L'espace des caractéristiques est formé par des rapports de surfaces de triangles construits à partir des points  $P_k$ . Les coordonnées d'un point  $M(x, y)$  de l'image sont définies à l'aide des coordonnées  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  calculées pour chaque triplet de manière suivante :

$$\beta = \frac{P_j M P_k}{P_i P_j P_k} \quad \gamma = \frac{P_k M P_i}{P_i P_j P_k} \quad \delta = \frac{P_i M P_j}{P_i P_j P_k}$$

où  $\overline{P_i P_j P_k}$  est l'aire algébrique du triangle  $P_i P_j P_k$ . Si  $n$  est le nombre de triplets et  $A'$  la matrice de passage du repère cartésien au nouveau repère, les coordonnées du point  $M$  de l'image sont :

$$X' = [\beta_1 \gamma_1 \delta_1 \dots \beta_n \gamma_n \delta_n]^t = A' X.$$

## 2.2 Modèle de la variabilité et des relations spatiales

L'apprentissage est effectué sur une base de  $N$  images expertisées. Nous disposons, pour chaque image  $i$  de l'ensemble d'apprentissage, des points  $\{P_k^i\}_{k \in \{1, \dots, p\}}$  de la forme de référence, de la matrice  $A'^i$  et de l'ensemble des  $q$  coordonnées de points caractéristiques  $\{X_j^i\}$  dont on veut modéliser la position. Soit  $\vartheta^i$  le vecteur représentant un point caractéristique de l'image  $i$  dans le nouveau repère. La position moyenne  $\hat{\vartheta}$  de chacun de ces points  $\{X_j^i\}$  est apprise. La variance  $\hat{\sigma}$  des vecteurs  $\vartheta^i$  est aussi calculée. On obtient ainsi la matrice de pondération  $P$  traduisant la fiabilité des données apprises.

Lorsque l'échantillonnage de la forme de référence génère un nombre important de coordonnées, seules certaines sont informantes. Nous réalisons une ACP sur la matrice de covariance des vecteurs  $\vartheta^i$ . Seules les  $d'$  composantes les plus informantes sont conservées, et définissent ainsi la matrice  $\Phi$ .

## 2.3 Reconnaissance des formes : localisation des points

Soit  $\vartheta$  le vecteur représentant un point caractéristique  $X$ . Nous savons que :  $\vartheta = A' X$ . Retrouver le point caractéristique  $X$  sur une nouvelle image consiste à résoudre le système surdimensionné :  $\hat{\vartheta} = A' X$ , où  $\hat{\vartheta}$  est le vecteur moyen appris,  $A'$  la matrice définie par la nouvelle image. La résolution est effectuée par la méthode des moindres carrés pondérés. La position estimée  $\tilde{X}$  d'un point caractéristique  $X$  dans une nouvelle image est donnée par l'équation :

$$\tilde{X} = (A'^t P^t \Phi \Phi^t P A')^{-1} A'^t P^t \Phi \hat{\vartheta}.$$

## 3 Représentation d'une forme

Pour ramener la représentation d'une courbe ou ligne à un ensemble de points, une solution classique consiste à échantillonner régulièrement le contour de la forme. Cette solution est coûteuse car peu compacte et les caractéristiques différentielles de la courbe très peu fiables. Nous nous sommes orientés vers l'approximation par courbes de Bézier composites, en combinant lissage et interpolation. On a alors l'équivalence entre la courbe analytique et ses points de contrôle, ainsi qu'un formalisme unificateur entre les notions de point et de forme.

### 3.1 Courbes de Bézier : définition

Soit  $(P_k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$  une suite ordonnée de points du plan. Ces points, appelés points de contrôle, définissent une ligne polygonale  $\Pi$ . On peut y associer la courbe paramétrique (appelée courbe de Bézier) suivante :

$$\forall u \in [0, 1] \quad P(u) = \sum_{k=0}^n P_k B_{k,n}(u), \quad (1)$$

où les fonction  $B_{k,n}(u)$  sont les polynômes de Bernstein et l'entier  $n$  le degré de la courbe.

## 3.2 Courbes de Bézier composites

La méthode de construction d'une courbe par lissage dépend du degré  $n$  de la courbe recherchée. L'utilisateur doit donc faire un compromis entre fidélité à des données ( $n$  élevé) et "douceur" et "robustesse" ( $n$  élevé et distance entre les points à liser et la courbe forte). Une solution consiste à séparer l'ensemble des points à approximer  $\{Q_i\}_{i \in \{0, \dots, p\}}$  en plusieurs sous-ensembles, donnant ainsi naissance à plusieurs courbes de Bézier [5].

### 3.2.1 Contraintes de raccordement de deux courbes $P^{(a)}(u^{(a)})$ et $P^{(b)}(u^{(b)})$

Soient  $n^{(a)}$  et  $n^{(b)}$  les degrés respectifs des courbes  $P^{(a)}(u^{(a)})$  et  $P^{(b)}(u^{(b)})$ . Les polygones caractéristiques associés sont  $\{P_k^{(a)}\}$  et  $\{P_k^{(b)}\}$ . Lorsque l'on aborde le problème de leur raccordement, ces deux polynômes sont continus en position lorsque leurs extrémités coïncident, ont des dérivées continues en leurs extrémités et ont un rayon de courbure constant au niveau du raccordement. Ceci se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} P_{n^{(a)}}^{(a)} = P_0^{(b)} \\ n^{(a)} (P_{n^{(a)}-1}^{(a)} - P_{n^{(a)}}^{(a)}) = \alpha n^{(b)} (P_1^{(b)} - P_0^{(b)}), \alpha \in \mathbb{R} \\ (P_{n^{(a)}-2}^{(a)} - P_{n^{(a)}-1}^{(a)}) \wedge (P_{n^{(a)}-1}^{(a)} - P_{n^{(a)}}^{(a)}) = \\ \gamma [(P_2^{(b)} - P_1^{(b)}) \wedge (P_1^{(b)} - P_0^{(b)})], \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

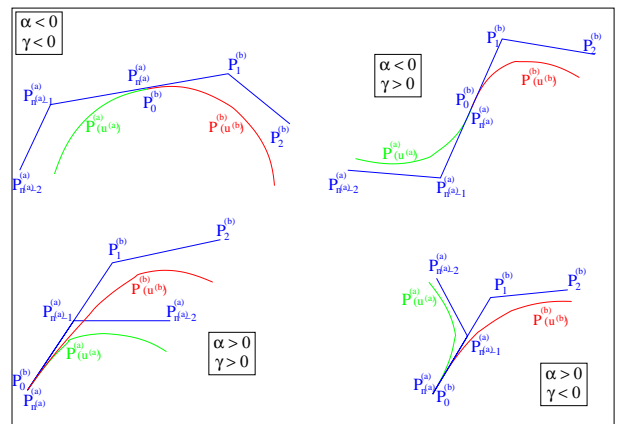


FIG. 1: Influence des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  sur les raccordements entre deux courbes

Les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  influent sur les formes des courbes. Les diverses situations de référence sont présentées par la figure 1.

### 3.2.2 Généralisation du problème de raccordement à $N$ courbes avec $\alpha < 0$ et $\gamma < 0$

Nous reformulons ici le problème de raccordement de  $N$  courbes de Bézier composites avec une détermination simultanée de tous les points de contrôle. Nous considérons ici le cas  $\alpha = -1$  et  $\gamma = -1$ . Le problème de raccordement de  $N$  courbes avec ce même critère mène à la résolution de système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}^{(1)} & \mathcal{B} & \dots & 0 \\ \mathcal{C} & \mathcal{A}^{(2)} & \mathcal{B} & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & \mathcal{C} & \mathcal{A}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}^{(1)} \\ \mathcal{P}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{P}^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}^{(1)} & \dots & 0 \\ & \mathcal{D}^{(2)} & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{D}^{(N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{(1)} \\ \mathcal{Q}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathcal{Q}^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

avec :

$$\mathcal{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}^{(N)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -1 & 2 & -2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}^{(i)} = [\mathcal{P}_j^{(i)}], \quad \mathcal{Q}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{k^{(1)}}^{(i)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}^{(1)} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \mathcal{C}^{(1)} & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & 0 & & & & \end{array} \right],$$

$$\mathcal{D}^{(N)} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}^{(N)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}^{(i)} = \left[ \begin{array}{c|ccc} \mathcal{C}^{(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & \end{array} \right],$$

$$\mathcal{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_{0,n^{(i)}}(u_0^{(i)}) & \dots & B_{n^{(i)},n^{(i)}}(u_{p^{(i)}}^{(i)}) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s^{(i)},n^{(i)}}(u_0^{(i)}) & \dots & B_{s^{(i)},n^{(i)}}(u_{p^{(i)}}^{(i)}) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$D^{(i)} = \begin{bmatrix} B_{0,n^{(i)}}(u_0^{(i)}) & \dots & B_{n^{(i)},n^{(i)}}(u_0^{(i)}) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{0,n^{(i)}}(u_{p^{(i)}}^{(i)}) & \dots & B_{n^{(i)},n^{(i)}}(u_{p^{(i)}}^{(i)}) \end{bmatrix}.$$

Les seuls points par lesquels le passage devra être modélisé sont les points  $Q_0^{(0)}$  et  $Q_{p^{(N)}}^{(N)}$  avec  $p^{(N)}$  le nombre de points à approximer par la courbe  $P^{(N)}(u^{(N)})$ . Il en résulte que  $s^{(i)} = n^{(i)} - a$  avec  $a = 1$  pour  $i \in \{1, n^{(i)}\}$ ,  $a = 2$  sinon.

## 4 Evaluation de la méthode en céphalométrie

### 4.1 Les objectifs de la céphalométrie

L'évaluation des résultats a été effectuée dans le cadre de la céphalométrie, qui est une discipline utilisée par les orthodontistes dans le cadre de la prédiction des dysharmonies dentaires des patients. Cette approche repose sur un repérage de points anatomiques sur des radiographies numériques crâniennes.

Nous nous intéressons ici uniquement au repérage des points anatomiques. L'un des objectifs de ce projet est l'automatisation du repérage des points céphalométriques sur une base de données conséquente. Ces points ont tous une définition anatomique : leur position est relative à des structures (os ou sutures), que nous avons modélisées par courbes de Bézier.

### 4.2 Connaissances *A priori*

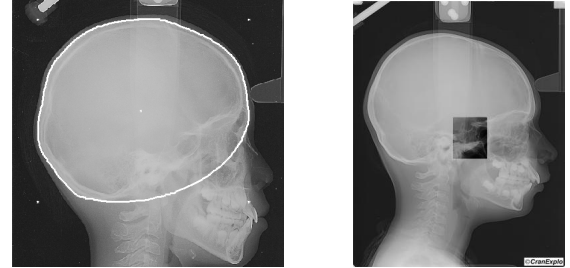


FIG. 2: Position de la selle turque par rapport à la forme de référence détectée

La première étape a permis d'identifier l'ensemble des structures nécessaires à la localisation des points anatomiques ainsi que la forme de référence. Ceci a été possible grâce aux connaissances *a priori* du médecin. Selon sa théorie la position des points recherchés dépend de la dynamique crânienne. Nous avons donc décidé que la forme de référence de notre modèle sera le contour extérieur du crâne. Une méthode automatique [4] nous permet alors de détecter ce contour (figure 2 (a)).

### 4.3 Approximation et apprentissage de la selle turque

L'expert nous a aussi fourni l'expertise des structures anatomiques recherchées. Dans cet article nous nous intéressons uniquement à l'exemple de la selle turque (figure 2 (b)) et aux points anatomiques recherchés TPS et CLP (figure 3 (c)).

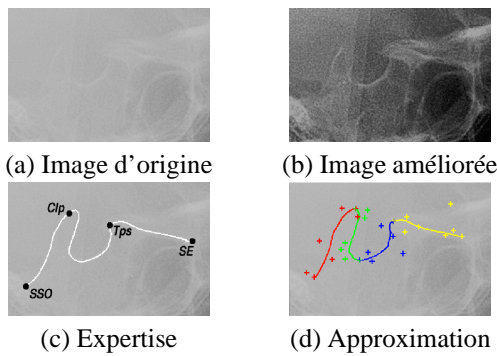


FIG. 3: Approximation de l'expertise de la selle turcique

La figure 3 présente l'expertise de la selle turcique. Les images (a) et (b) correspondent à la région de la structure, l'image (c) présente l'expertise de la selle ainsi que les points anatomiques recherchés qui lui sont relatifs et l'image (d) est le résultat de l'approximation de la selle par 4 courbes de Bézier composites (28 points de contrôle).

Une fois les structures approximées, l'apprentissage peut être effectué simultanément sur les structures et les points anatomiques recherchés.

#### 4.4 Résultats

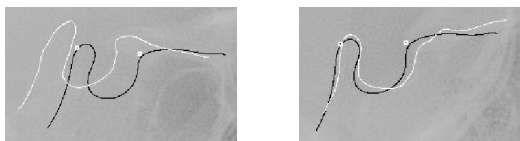


FIG. 4: Position du modèle (noir) par rapport à l'expertise (blanc) sur deux images

Cette étude a été évaluée sur 80 images expertisées. La figure 4 présente les résultats obtenus avec notre modèle. Ces deux exemples permettent de comparer la différence de position entre le modèle moyen et l'expertise. Il est intéressant de constater que notre modèle est adaptatif. Les formes moyennes ne sont pas les mêmes suivant les images étudiées, même si elles le sont dans l'espace des caractéristiques.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une solution au problème de modélisation de la variabilité des formes. Nous avons mis en place un modèle statistique non linéaire composé d'une configuration moyenne de points, de sa variabilité ainsi que des relations spatiales existantes entre les caractéristiques de l'objet appris. Ce modèle repose sur la détection d'une forme de référence. Celle-ci permet de définir la projection dans l'espace des caractéristiques, dans lequel nous apprenons notre modèle. Le deuxième aspect que nous avons étudié est celui d'approximation d'une forme par un ensemble de points. Nous avons proposé d'approximer cette forme par les courbes de Bézier composites. Cette approximation est invariante et fournit un ensemble de points représentatif de la forme approximée. Le formalisme adopté permet d'unifier les notions de points et de formes. Notre méthodologie a été évaluée en céphalométrie et

donne de bons résultats. Le modèle mis en place et appris sur un ensemble de points et de structures peut être utilisé dans le cadre de l'identification des données partiellement occultées en utilisant les relations spatiales apprises et la partie visible dans l'image.

#### Remerciements

Nous tenons à remercier le Dr Marie-Josèphe Deshayes et la société Telecrane Innovation pour la base d'images de test, l'expertise et les connaissances *a priori*.

#### Références

- [1] F.L. Bookstein. *Landmark methods for forms without landmarks: Morphometrics of group differences in outline shape*.
- [2] C. Campbell. *Kernel Methods: a Survey of Current Techniques*. 2000.
- [3] T.F. Cootes, C.J. Taylor. *Statistical Models of Appearance for Computer Vision*. Report, 2001.
- [4] M. Desvignes, B. Romaniuk, J. Robiaille, M. Revenu, M.J. Deshayes. *Détection et modélisation du contour crânien sur des céphalogrammes* GRETSI 2001, Toulouse, France, 2001.
- [5] J.C. Léon. *Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO*. Hermès, Paris, 1991.
- [6] B. Romaniuk, M. Desvignes, J. Robiaille, M. Revenu, M.J. Deshayes. *Une approche non linéaire pour la reconnaissance des formes statistiques: application à la céphalométrie*. RFIA 13e Congrès Reconnaissance des formes et intelligence artificielle, Angers, Vol. III, pp. 829-838, Janvier 2002.
- [7] B. Scholkopf, S. Mika, C. Burges, P. Knirsch, K.-R. Muller, G. Ratsch, A. Smola. *Input space vs. feature space in kernel-based methods*. IEEE Trans. Neural Networks, Vol. 10(5), pp. 1000-1017, 1999.
- [8] S. Sclaroff, A.P. Pentland. *Modal Matching for Correspondence and Recognition*. IEEE Transactions on PAMI, Vol. 17(6), pp. 545-561, 1995.