

Détection statistique d'une anomalie à partir de projections tomographiques

Lionel FILLATRE, Florent RETRAINT, Igor NIKIFOROV

Laboratoire de Modélisation et Sécurité des Systèmes
12, rue Marie Curie, B.P. 2060, 10010 Troyes Cedex, France
Lionel.Fillatre@utt.fr, Florent.Retraint@utt.fr
Igor.Nikiforov@utt.fr

Résumé – La détection d'une anomalie à partir de quelques projections tomographiques bruitées est considérée d'un point de vue statistique. La scène bidimensionnelle étudiée est composée d'un environnement inconnu, considéré comme un paramètre de nuisance, et d'une éventuelle anomalie. Un test invariant optimal est alors proposé pour détecter l'anomalie.

Abstract – The problem of detecting an anomaly from a limited number of noisy tomographic projections is addressed from the statistical point of view. We study an unknown two-dimensional scene composed of an environment, considered as a nuisance parameter set, with a possibly hidden anomaly. An optimal statistical invariant test is proposed to solve such a problem.

1 Introduction

La tomographie numérique permet de sonder l'intérieur des objets de manière non-invasive, ce qui explique sa popularité dans le domaine du contrôle non destructif. La reconstruction d'une scène à partir de quelques projections constitue un problème inverse mal posé et a déjà fait l'objet de nombreuses études [3, 4, 7, 9]. Cependant, la détection d'une anomalie (ou cible) dans un environnement inconnu à partir d'un nombre de projections très limité reste un problème ouvert.

La détection d'une (ou plusieurs) anomalie a déjà été étudiée par Rossi et Willsky [9]. Les auteurs estiment la position d'une anomalie dans une projection par maximum de vraisemblance. Plus récemment, Frakt, Karl et Willsky [3] proposent de détecter et localiser une forme géométrique élémentaire sur une grille cartésienne mais une telle approche implique un test statistique entre un très grand nombre d'hypothèses. Les auteurs proposent alors une approche multi-échelle pour réduire le coût calculatoire. Enfin, un tel problème peut également être traité comme un problème de reconnaissances de formes [10]. Il s'agit alors de générer des hypothèses pertinentes sur la nature géométrique de la scène à la vue d'une projection, puis de les vérifier au prix d'un coût calculatoire assez élevé.

Dans certaines applications, comme le contrôle de bagages et plus généralement le contrôle non destructif, le nombre de projections reste très limité et une reconstruction satisfaisante devient impossible [2, 4]. Dans une telle situation, la détection d'une anomalie cachée dans une scène reste pourtant envisageable. Dans un premier temps, nous décrivons notre modèle d'observation. Ensuite, nous introduisons un test optimal qui permet de détecter au mieux l'anomalie. Enfin, nous proposons un exemple numérique qui illustre l'efficacité de la règle de décision proposée.

2 Modélisation du problème

Dans cette section, nous introduisons la modélisation du problème abordé. Pour simplifier la présentation, nous considérons une scène originale bidimensionnelle (2D) mais la généralisation au cas tridimensionnelle (3D) est immédiate. La scène est entièrement caractérisée par son coefficient d'atténuation surfacique s considéré comme une fonction numérique :

$$s : (x, y) \mapsto s(x, y),$$

de carré intégrable, et défini en tout point (x, y) d'un ensemble compact \mathcal{D} du plan : $s \in L_2(\mathcal{D})$. La projection $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de la scène s suivant l'angle de vue $\alpha \in [-\pi, \pi[$ (voir Fig. 1) est alors définie par :

$$g(t, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} s(t \cos \alpha - l \sin \alpha, t \sin \alpha + l \cos \alpha) dl. \quad (1)$$

Après un échantillonnage numérique pertinent, nous disposons d'un vecteur d'observations :

$$Y_{\alpha, n} = (g(t_1, \alpha), \dots, g(t_n, \alpha))^T \in \mathbb{R}^n,$$

où $t_k \in \mathbb{R}$ désigne une position d'échantillonnage sur le détecteur linéaire pour tout indice k .

La scène originale, supposée bornée dans \mathbb{R}^2 , est composée d'un environnement $h \in L_2(\mathcal{D})$ défini sur un ensemble compact \mathcal{D} connu (Fig. 1) et d'une anomalie $f_{\theta} \in L_2(\mathcal{D})$, paramétrée par un vecteur $\theta \subset \mathbb{R}^p$, nulle sur \mathcal{D} sauf sur un compact d (Fig. 1) strictement inclus dans \mathcal{D} . La fonction f_{θ} représente une *contraste local*, c'est-à-dire une variation locale du coefficient d'atténuation surfacique de l'environnement, assimilable à la présence d'une anomalie. L'environnement h est supposé être linéairement paramétré :

$$h_{\mu}(x, y) = \sum_{k=1}^m \mu_k h_k(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D},$$

où (h_1, \dots, h_m) désigne une famille de fonctions de $L_2(\mathcal{D})$ connues et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur inconnu assimilé à un paramètre de nuisance.

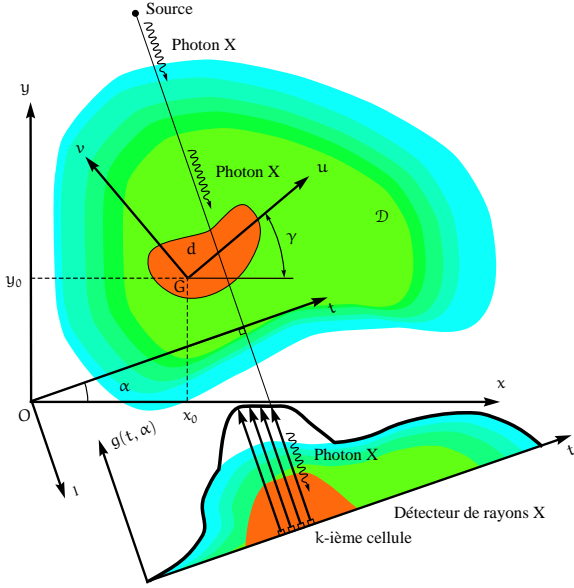


FIG. 1 – Géométrie du système d'acquisition.

Finalement, sous l'hypothèse d'additivité de l'environnement et de l'anomalie, la scène s est décrite par :

$$s(x, y) = \begin{cases} h_\mu(x, y), & (x, y) \in \mathcal{D} \text{ sous } \mathcal{H}_0 \\ f_\theta(x, y) + h_\mu(x, y), & (x, y) \in \mathcal{D} \text{ sous } \mathcal{H}_1 \end{cases},$$

où \mathcal{H}_0 correspond à une scène dépourvue d'anomalie et \mathcal{H}_1 correspond à la présence d'une anomalie. En considérant la linéarité de la projection tomographique (1), on obtient le vecteur d'observations Y :

$$Y = Y_{\alpha, n} = M(\theta, \alpha) + H(\alpha)\mu + \xi, \quad (2)$$

où $M(\theta, \alpha)$ est la projection de f_θ suivant l'angle α , $H(\alpha) = (H_\alpha^1, \dots, H_\alpha^m)$ est une matrice de taille $(n \times m)$, en définissant H_α^k comme la projection de h_k suivant l'angle α pour $k = 1, \dots, m$, et $\xi \in \mathbb{R}^n$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma^2 I_n$ avec $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$ connu. Enfin, si on dispose de plusieurs projections, il est toujours possible de se ramener au modèle (2) en regroupant judicieusement les mesures.

À la vue de l'observation (2), nous souhaitons détecter la présence de l'anomalie $M = M(\theta, \alpha)$. Ce problème est alors équivalent au test d'hypothèses :

$$\mathcal{H}_0 = \{M = 0, \mu \in \mathbb{R}^m\} \text{ et } \mathcal{H}_1 = \{M \neq 0, \mu \in \mathbb{R}^m\}, \quad (3)$$

où μ joue le rôle d'un paramètre de nuisance *inconnu*.

3 Test d'hypothèses statistique

La résolution du problème (3) reste délicate puisque les hypothèses envisagées sont dépendantes d'un vecteur de nuisance μ inconnu. Cependant, il est naturel de rechercher une règle de décision $\Lambda(Y)$ indépendante de la valeur du paramètre μ et de recourir alors à la théorie des tests invariants [6]. Suivant les travaux [1, 8], le problème (3) est invariant [6] par rapport au groupe des translations G :

$$G = \{g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \mid g(Y) = Y + HX, X \in \mathbb{R}^m\}.$$

Soit H une matrice de rang plein colonne ($m < n$). Notons $W \in \mathcal{M}_{n-m, n}(\mathbb{R})$ la matrice réelle de taille $(n - m) \times n$ dont les lignes engendrent le noyau à gauche de la matrice H et telle que :

$$WH = 0, W^T W = P_H, WW^T = I_{n-m},$$

où $P_H = I_m - H(H^T H)^{-1} H^T$ représente la matrice de projection sur l'espace engendré par H . Si la matrice H est de rang $q < m$, alors la matrice inverse $(H^T H)^{-1}$ est remplacée par une matrice inverse généralisée $(H^T H)^-$ [5, Ch. 1.5.3]. Le vecteur $Z = Z(Y) = WY$, appelé vecteur de parité, est un invariant maximal relativement au groupe G . Le problème (3) peut alors être réécrit sous la forme :

$$\mathcal{H}_0 = \{WM = 0\} \text{ et } \mathcal{H}_1 = \{WM \neq 0\}, \quad (4)$$

étant donné l'observation $Z = WM + W\xi$. Le problème (4) peut alors être résolu par un test du χ^2 [8]. Finalement, en définissant préalablement la fonction $\Lambda(Y) = \frac{1}{\sigma^2} Y^T P_H Y$, nous obtenons la règle de décision $\delta : \mathbb{R}^n \mapsto \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}$ suivante :

$$\delta(Y) = \begin{cases} \mathcal{H}_0 & \text{si } \Lambda(Y) < b_{\alpha_0} \\ \mathcal{H}_1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (5)$$

où le seuil b_{α_0} est choisi tel que :

$$\mathbb{P}_0(\delta(Y) = \mathcal{H}_1) \leq \alpha_0,$$

avec \mathbb{P}_0 la loi de probabilité de $Y = H\mu + \xi$. Le test δ est invariant et uniformément le plus puissant avec une puissance $\beta(M) = \mathbb{P}_M(\delta(Y) = \mathcal{H}_1 \mid M \neq 0)$ constante relativement à la famille de surfaces

$$\mathcal{S} = \{S_c : \frac{1}{\sigma^2} M^T P_H M = c^2, c \in]0; +\infty[\}.$$

Enfin, la statistique Λ est distribuée suivant une loi du χ_{n-m}^2 centrée avec $n - m$ degrés de liberté sous \mathcal{H}_0 et suivant une loi du $\chi_{n-m, \lambda}^2$ non-centrée sous \mathcal{H}_1 avec un paramètre de non-centralité $\lambda = \frac{1}{\sigma^2} M^T P_H M$.

4 Exemples numériques

Pour illustrer l'utilisation de la fonction de décision (5), nous considérons une scène 2D, sans (Fig. 2.(a)) ou avec une anomalie (Fig. 2.(d)), simulée numériquement avec Matlab. L'environnement h_μ est constitué d'une combinaison linéaire, à coefficients inconnus, de fonctions polynomiales, à deux variables x et y , de degré 2 et le vecteur $\mu \in \mathbb{R}^6$ est naturellement constitué des coefficients inconnus. L'anomalie f_θ correspond à un petit disque homogène placé dans le coin supérieur gauche de l'image avec $\theta = (x_0, y_0, R, d)$ où (x_0, y_0) correspond au centre du disque, $R > 0$ désigne son rayon et $d > 0$ est son coefficient d'atténuation surfacique. L'atténuation du disque est localement contrastée avec l'environnement mais son coefficient d'atténuation ne domine pas la scène. Nous considérons par la suite les projections d'angle 75° pour la scène dépourvue d'anomalie (Fig. 2.(b)) et la scène présentant une anomalie (Fig. 2.(e)) où chaque projection est dégradée par un bruit blanc gaussien de variance fixée. Il faut noter que, pour augmenter le contraste visuel, la valeur moyenne des projections a été ramenée à zéro. Visuellement, on constate que le pic d'atténuation induit par l'anomalie est à peine perceptible, voire invisible.

Par contre, suite à l'élimination de l'environnement, le vecteur de parité $Z = WY$ révèle clairement un pic d'intensité identifiant la présence de l'anomalie (Fig. 2.(c) et 2.(f)) et confirme ainsi l'augmentation de la quantité $\Lambda(Y)$ associée au test δ .

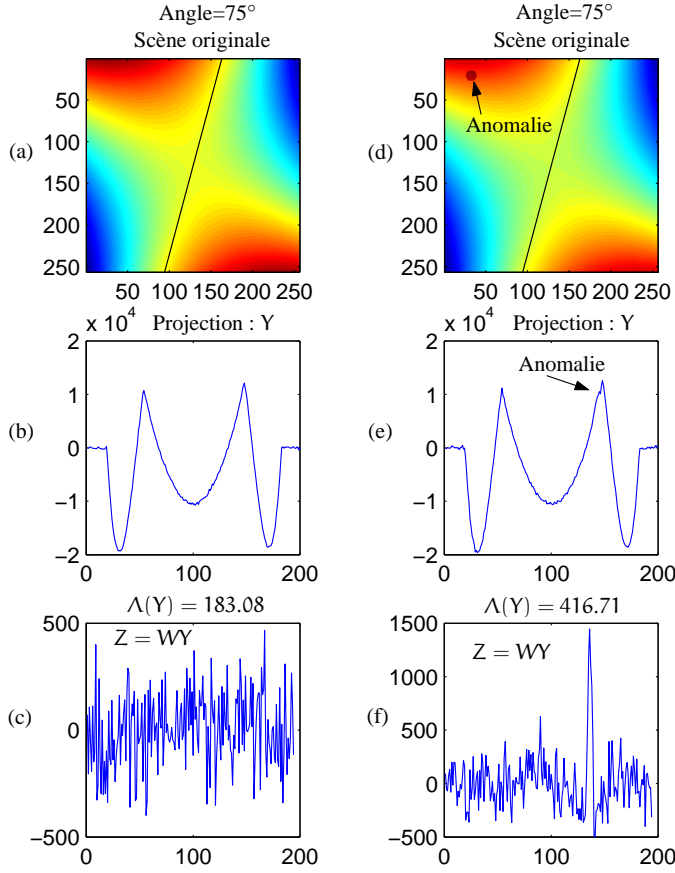


FIG. 2 – (a) Scène originale sans anomalie. (b) Projection de (a) à 75° . (c) Vecteur de parité calculé à partir de (b). (d) Scène originale avec une anomalie. (e) Projection de (d) à 75° . (f) Vecteur de parité calculé à partir de (e).

Étudions plus précisément les qualités statistiques du test proposé sur cet exemple numérique. Le taux de fausse alarme du test est fixé à 1% : $\mathbb{P}_0(\delta(Y) = \mathcal{H}_1) = 0.01$. La variance σ^2 du bruit est d'un niveau constant et connu. Le taux de non-détection peut alors être tracé comme une fonction de la position de l'anomalie dans la scène originale. Cette position est repérée dans le plan par une abscisse x_0 variant entre -10 cm et 10 cm et une ordonnée y_0 variant également entre -10 cm et 10 cm. La surface ainsi calculée (Fig. 3) est représentée en échelle logarithmique afin de mettre en évidence ses variations. Un “bassin” de bonne détection apparaît clairement sur la surface. Il correspond aux endroits où l'environnement est éliminé de manière très satisfaisante. À l'opposé, les bords du “bassin” correspondent à des positions où l'environnement dissimule mieux l'anomalie. Pour mieux cerner ce phénomène, étudions les variations du coefficient de non-centralité $\lambda = \frac{1}{\sigma^2} M^T P_H M$ de la loi du $\chi_{n-m, \lambda}^2$ suivie par la fonction $\Lambda(Y)$ sous l'hypothèse \mathcal{H}_1 (Fig. 4). Le paramètre λ s'écrit encore $\lambda = \frac{1}{\sigma^2} M^T (I_n - \tilde{H}) M$ où $\tilde{H} = H(H^T H)^{-1} H^T$. En supposant que l'anomalie M est non nulle sur seulement k positions contiguës (l'anoma-

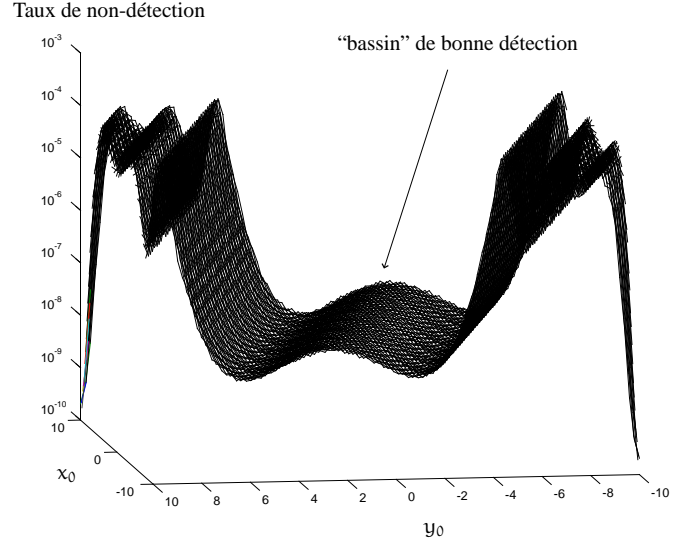


FIG. 3 – Variations du taux de non-détection pour différentes positions de la cible dans la scène originale.

lie est “compacte”), on peut écrire $M = \sum_{i=p}^{p+k-1} m_i e_i$ où $M = (0, \dots, 0, m_p, \dots, m_{p+k-1}, 0, \dots, 0)^T$, p est l'indice de la première composante m_p de M non nulle et (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . On en déduit alors les égalités :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=p}^{p+k-1} m_i^2 - \sum_{i=p}^{p+k-1} \sum_{j=p}^{p+k-1} m_i m_j \tilde{H}_{i,j} \right) \\ &= A(M, \sigma^2) - E(M, \tilde{H}, \sigma^2, p), \end{aligned}$$

en notant $\tilde{H} = (\tilde{H}_{i,j})$, $A(M, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=p}^{p+k-1} m_i^2$ et $E(M, \tilde{H}, \sigma^2, p) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=p}^{p+k-1} \sum_{j=p}^{p+k-1} m_i m_j \tilde{H}_{i,j}$. Ainsi, le paramètre λ est la différence de deux termes positifs (la matrice \tilde{H} est semi-définie positive). Pour un angle d'observation α donné, quelque soit la position de l'anomalie dans la scène, la projection du contraste f_θ possède un profil constant, ce qui signifie que la suite finie de composantes non nulles $m_p, m_{p+1}, \dots, m_{p+k-1}$ ne dépend pas de l'indice de début p . Le terme $A(M, \sigma^2)$ représente alors la contribution constante de l'anomalie pour le paramètre λ . À l'opposé, le second terme $E(M, \tilde{H}, \sigma^2, p)$ dépend clairement des indices $p, p+1, \dots, p+k-1$ par l'intermédiaire des coefficients $\tilde{H}_{i,j}$. Ainsi, une translation de l'anomalie dans la scène peut modifier l'indice p et provoquer une variation importante de la quantité $E(M, \tilde{H}, \sigma^2, p)$. Par conséquent, un changement dans la position de l'anomalie peut entraîner une variation non négligeable du taux de non-détection du test δ . En particulier, selon le choix de l'angle d'observation et la nature de l'environnement, des “bassins” de bonne (ou mauvaise) détection (Fig. 3) peuvent apparaître.

Enfin, étudions la capacité du test à détecter le disque selon les valeurs de son rayon R et de son contraste d par rapport à l'environnement (Fig. 5). Le rayon varie entre 0.1 et 0.45 cm pour une scène mesurant 20 cm \times 20 cm et le contraste varie entre 10^2 et 10^4 pour une scène présentant un coefficient d'atténuation surfacique variant entre -6×10^5 et 4×10^5 . La projection est échantillonnée avec un pas de 0.15 cm, ce qui ex-

Paramètre de non-centralité

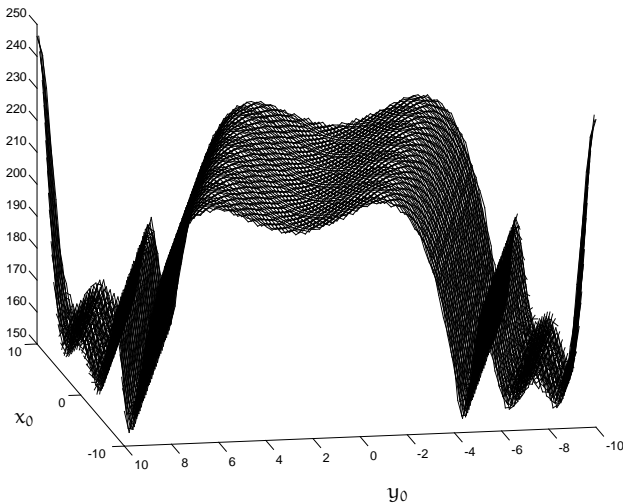


FIG. 4 – Variations du paramètre de non-centralité λ du $\chi^2_{n-m,\lambda}$ suivant les positions de l’anomalie dans la scène originale.

plique l’aspect légèrement “saccadé” de la surface associée au taux de non-détection. Comme l’intuition le laissait présager,

Taux de non-détection

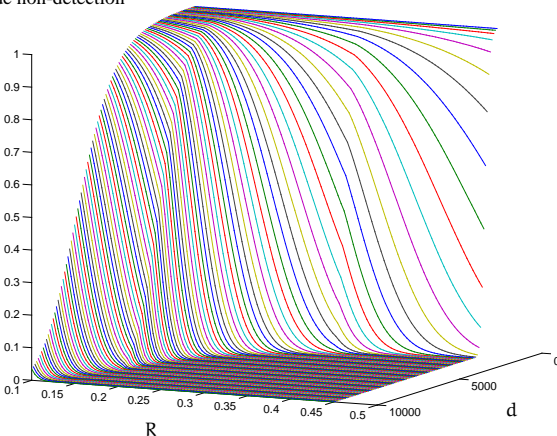


FIG. 5 – Variations du taux de non-détection pour différents couples (R,d) caractérisant la cible dans la scène originale.

le taux de non-détection diminue à mesure que le rayon et/ou l’intensité du disque augmentent. Il est à noter que le test prend presque toujours la bonne décision lorsque le rayon et/ou l’intensité deviennent relativement importants par rapport à l’environnement.

5 Conclusion et perspectives

La détection d’une anomalie noyée dans un environnement inconnu et indiscernable à l’oeil nu a été traitée d’un point de vue statistique. Sous l’hypothèse d’un environnement linéairement paramétré, l’anomalie peut être détectée de façon optimale au moyen d’un test du χ^2 invariant.

Lorsque les propriétés physiques et géométriques de l’anomalie sont suffisamment connues *a priori*, cette dernière peut être décrite par une fonction paramétrique où seul le vecteur de paramètres reste inconnu. Ce vecteur est composé simultanément de paramètres informatifs (descriptif géométrique dans le repère local (G, u, v) (Fig. 1), atténuation surfacique,...) et de paramètres de nuisance (position (x_0, y_0) du point G (Fig. 1), orientation d’angle γ (Fig. 1),...) concernant l’objet, la distinction entre ces paramètres découlant naturellement des motivations suscitant le besoin de détection. Nous envisageons alors de proposer un test d’hypothèses distinguant différentes combinaisons des paramètres informatifs et éliminant l’impact des paramètres de nuisance. Cependant, la fonction associée à l’anomalie est souvent non-linéaire suivant son vecteur de paramètres et la conception d’un test optimal reste un problème ouvert.

Références

- [1] M. Basseville and I. V. Nikiforov. Fault isolation for diagnosis : Nuisance rejection and multiple hypothesis testing. In *Survey Paper, 15 th IFAC World Congress, Barcelona, Spain 21 th - 26 th July, 2002*, pages 179–190, 2002.
- [2] U. Ewert. Upheaval in industrial radiology. In *8th ECNDT Proceedings, Barcelona, Spain, 2002*.
- [3] A.B. Frakt, W.C. Karl, and A.S. Willsky. A multiscale hypothesis testing approach to anomaly detection and localization from noisy tomographic data. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(6) :825–837, june 1998.
- [4] J. Idier (Ed.). *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Traitement du signal et de l’image. Hermès, Lavoisier (Traité IC2), 2001.
- [5] K.-R. Koch. *Parameter estimation and hypothesis testing in linear models*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 19939.
- [6] E.L. Lehman. *Testing Statistical Hypotheses, Second Edition*. Chapman & Hall, 1986.
- [7] F. Natterer. *The Mathematics Of Computerized Tomography*. Editions Wiley, 1986.
- [8] I. Nikiforov. Eléments de théorie de la décision statistique II : compléments, Chap. 2. In *Décision et reconnaissance des formes en signal*, pages 43–84. Hermes Science Publications (Traité IC2), Edited by R. Lengellé, 2002.
- [9] David J. Rossi and Alan S. Willsky. Reconstruction from projections based on detection and estimation of objects - parts I and II : performance analysis and robustness analysis. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 32(4) :886–906, august 1984.
- [10] Mark D. Wheeler and Ikeuchi Katsushi. Sensor modeling, probabilistic hypothesis generation, and robust localization for object recognition. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, 17(3) :252–265, march 1995.