

De l'Estimation des Exposants des Loïs d'Échelle

Bruno LASHERMES¹, Patrice ABRY¹, Pierre CHAINAIS²

¹CNRS UMR 5672, Laboratoire de Physique, ENS Lyon, France

²ISIMA-LIMOS UMR 6158 - Université Blaise Pascal, Aubière, France

bruno.lashermes@ens-lyon.fr, patrice.abry@ens-lyon.fr pchainai@isima.fr,
www.ens-lyon.fr/~pabry

Résumé – Nous nous intéressons dans cet article à l'estimation multirésolution (boîte, accroissement, ondelette) des exposants $\zeta(q)$ des lois d'échelle de processus multiplicatifs. Nous observons, à partir de quatre types de processus présentant des lois d'échelle prescrites a priori, que ces estimateurs ne rendent compte des $\zeta(q)$ que dans un intervalle de valeurs de q et se comportent nécessairement comme une fonction linéaire de q en dehors. Nous étudions cet effet et le relierons au fait que les cascades multiplicatives sont des martingales.

Abstract – In this article, we address the issue of multiresolution based estimations (box, increment, wavelet) for the $\zeta(q)$ scaling exponents of multiplicative processes. From four different types of processes possessing a priori prescribed and controlled scaling laws, we observe that such estimators correctly measure the $\zeta(q)$ exponents, for a limited range of values of q only and necessarily behave as a linear function of q outside this range. We study this phenomenon and relate it to the martingale nature of these multiplicative processes.

1 Introduction

Au cours de cette dernière décennie, des comportements en loi d'échelle, des phénomènes d'invariance d'échelle ont été observés dans de nombreuses applications de natures très différentes.

Le plus souvent, l'étude des comportements en loi d'échelle repose sur le principe suivant. Soit $X(t)$ la quantité physique d'intérêt, et soit $T_X(a, t)$ une quantité multirésolution, à l'échelle a , construite sur X . Par exemple, $T_X(a, t)$ peut désigner les accroissements du processus, $X(t + a\tau_0) - X(t)$ (où τ_0 est une constante arbitraire), ou bien ses coefficients d'ondelettes. L'invariance d'échelle se manifeste à travers le fait que les moments d'ordre q (pour une gamme de valeurs de q) se comportent en loi de puissance selon les échelles, pour une gamme d'échelle :

$$\mathbb{E}|T_X(a, t)|^q = c_q |a|^{\zeta(q)}. \quad (1)$$

L'analyse des phénomènes d'invariance d'échelle, sur des données expérimentales, consiste à mettre en évidence (détection) ces lois de puissance et à mesurer (estimation) les exposants $\zeta(q)$ correspondants.

Communément, l'estimation des exposants est réalisée à partir de la mesure de la pente d'une droite observée dans un diagramme $\ln a$ versus $\ln S_n(a, q)$, où $S_n(a, q)$ consiste en une estimation (par moyenne temporelle) du moment d'ordre q de $|T_X(a, t)|$. Pour les processus autosimilaires, caractérisés par un comportement linéaire en q des $\zeta(q)$, $\zeta(q) = qH$, cette procédure d'estimation a déjà été largement étudiée et ses performances analysées. Expérimentalement, cependant, de nombreuses situations correspondent à un comportement non linéaire, $\zeta(q) \neq qH$. Elles peuvent alors être modélisées par des processus multiplicatifs (des cascades) qui permettent de modéliser à volonté la forme de la fonction $\zeta(q)$. Un nombre restreint de travaux [1, 9, 10] s'est intéressé à l'étude des performances des estimateurs des $\zeta(q)$ pour les processus multiplicatifs, essentiellement parce que les seuls processus multiplica-

tifs dont les propriétés étaient connues théoriquement ont longtemps été les célèbres cascades de Mandelbrot. Ont été proposés récemment plusieurs types de processus dont les comportements en lois d'échelle sont connus théoriquement et peuvent être prescrits a priori.

Dans cet article, nous nous intéressons uniquement à la question de l'estimation des exposants $\zeta(q)$ de processus multiplicatifs (pour lesquels les $\zeta(q)$ ne sont pas a priori égaux à qH). Nous caractérisons les performances d'estimation de trois types d'estimateurs multirésolution (boîte, accroissement, ondelette), appliqués à quatre catégories de processus multiplicatifs connus et documentés dans la littérature. Cette caractérisation est essentiellement obtenue par applications des estimateurs à un grand nombre de réalisations de processus synthétiques dont les propriétés sont prescrites a priori. Nous mettons en évidence un effet générique de *linéarisation* du comportement des estimateurs : ils ne rendent compte des $\zeta(q)$ que pour un intervalle de valeurs de $q \in [q_*, q^*]$ et se comportent nécessairement comme une fonction linéaire de q en dehors. Cet effet, déjà étudié dans des cas particuliers dans [10, 15, 14, 18], semble être une propriété essentielle des estimateurs utilisés alors qu'il est trop souvent ignoré. Nous le relierons au fait que les cascades multiplicatives sont des martingales.

2 Estimateurs

Définissons d'abord $\beta_0(u) = 1/\tau_0$ si $0 \leq u < \tau_0$ et $= 0$ sinon, et $I_0(u) = \delta(t + \tau_0) - \delta(t)$, où τ_0 est une constante arbitraire. Soit $\psi_0(t)$ une ondelette-mère usuelle et $X(t)$ le processus étudié. On définit les quantités multirésolutions $T_X(a, t; f_0)$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T_X(a, t; f_0) &= \int_{\mathbb{R}} X(u) f_{a,t}(u) du, \\ f_{a,t}(u) &= (1/a) f_0((u-t)/a). \end{aligned} \quad (2)$$

Les choix suivants des fonctions-mères définissent trois catégories d'estimateurs :

$$\begin{aligned} \text{EI : Agrégation} & \quad f_0(u) = (\beta_0(u))^{*N}, \\ \text{EII : Accroissement} & \quad f_0(u) = (I_0(u))^{*N}, \\ \text{EIII : Ondelette} & \quad f_0(u) = \psi_0(u), \end{aligned} \quad (3)$$

où $(f(u))^{*N}$ indique que la fonction f est convoluée N -fois avec elle-même. Ces trois catégories d'estimateurs sont caractérisés par un ordre N qui peut être choisi arbitrairement. Pour l'estimateur en ondelette, N correspond au nombre de moments nuls de l'ondelette.

On définit ensuite les fonctions de partition sur une grille dyadique $a = 2^j, t = 2^j k$ par :

$$S_n(q, 2^j; f_0) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |T_X(2^j, k2^j; f_0)|^q \quad (4)$$

où n désigne la longueur de l'observation et n_j le nombre de coefficients $T_X(2^j, k2^j; f_0)$ effectivement disponibles à l'échelle $a = 2^j$. Les estimateurs $\hat{\zeta}(q, n)$ des $\zeta(q)$ sont alors obtenus par régressions linéaires de $\log_2 S_n(q, j)$ en fonction de $\log_2 2^j = j$ [1]. Nous n'abordons pas ici la question de la sélection de la gamme d'échelle. Nous n'abordons pas non plus la question de l'existence des moments d'ordre q des $|T_X(a, t; f_0)|$. Pour tous les processus étudiés ici, il est possible de montrer que $\mathbb{E}S_n(q, a) < \infty$ pour $q \in \mathbb{R}$, avec EI, et $q > -1$ avec EII et EIII. Nous utiliserons systématiquement ces valeurs de q , l'évaluation de la nature finie des moments est discutée de façon intéressante par exemple dans [8].

3 Processus

Nous allons nous intéresser à quatre classes de processus multiplicatifs aux propriétés statistiques connues et présentant des lois d'échelle prescrites a priori (ce qui épuise quasiment, à notre connaissance, la liste des processus proposés dans la littérature) : les cascades multiplicatives conservatives de Mandelbrot (CMC) [12, 16], les processus de Poisson composés (CPC) [5], les cascades infiniment divisibles (IDC) [7, 6, 3, 4], les marches aléatoires multifractales (MRW) [2]. Par manque de place, il n'est pas possible de donner les définitions et constructions de ces processus. Indiquons simplement que pour tous les processus une densité $Q_r(t)$, à la résolution r , est explicitement définie par le produit d'un nombre, d'ordre $\sim \log r$, de variables aléatoires strictement positives W indépendantes et identiquement distribuées. Ces multiplicateurs sont, de plus de valeur moyenne égale à 1 (d'où le terme de conservatif) et sont choisis tels que $\forall q \in \mathbb{R}, \mathbb{E}|W|^q < \infty$. Pour les CMC, CPC et IDC, on définit à partir de cette densité $Q_r(t)$ deux processus aléatoires :

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^t Q_r(u) du, \\ V_H(t) &= B_H(A(t)), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

où $B_H(t)$ désigne le mouvement brownien fractionnaire de paramètre H (voir, par exemple, [17]). Le processus V_H est connu sous le nom de mouvement brownien fractionnaire à temps multifractal (voir, par exemple, [16]). Pour définir les $\zeta(q)$, on désigne par $\varphi(q)$ une fonctionnelle de $\mathbb{E}|W|^q$ (dont l'expression dépend du détail de chaque processus) et on peut montrer

que ces processus satisfont, pour les CMC, d'une part,

$$\left. \begin{aligned} \text{Pour } Q_r(t), \mathbb{E}S_n(q, a; \beta_0) &= c_q |a|^{\varphi(q)}, \\ \text{Pour } A(t), \mathbb{E}S_n(q, a; I_0) &= c'_q |a|^{q-\varphi(q)}, \\ \text{Pour } V_H(t), \mathbb{E}S_n(q, a; I_0) &= c''_q |a|^{qH-\varphi(qH)}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

pour les CPC et IDC, d'autre part,

$$\left. \begin{aligned} \text{Pour } Q_r(t), \mathbb{E}|T_Q(a, t; \beta_0)|^q &= c_q |a|^{\varphi(q)}, \\ \text{Pour } A(t), \mathbb{E}|T_A(a, t; I_0)|^q &= c'_q |a|^{q-\varphi(q)}, \\ \text{Pour } V_H(t), \mathbb{E}|T_{V_H}(a, t; I_0)|^q &= c''_q |a|^{qH-\varphi(qH)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Les processus MRW, quoiqu'a priori assez différents, ont un statut comparable à celui des processus V_H des constructions précédentes, puisque leurs définitions impliquent également des mouvements browniens fractionnaires. Ils satisfont, avec $1 > H > 0$ et $\lambda > 0$:

$$\mathbb{E}|T_{V_H}(a, t; I_0)|^q = c''_q |a|^{(H+\lambda^2)q-\lambda^2 q^2/2}. \quad (8)$$

Ces équations ((6), (7) et (8)) sont à mettre en regard de la relation (1), qui définit qualitativement la notion de comportement en loi d'échelle.

4 Résultats

• **MÉTHODOLOGIE.** Pour les densités Q , les trois types d'estimateurs peuvent être utilisés. Aux processus A et V_H à accroissements stationnaires seuls EII et EIII peuvent être appliqués. Les performances statistiques des estimateurs sont étudiées par simulation numérique. Pour chaque estimateur, pour chaque type de processus, pour chaque fonction $\zeta(q)$, on effectue l'estimation $\hat{\zeta}(q, n)$ sur n_{breal} réalisations de longueur n synthétisées numériquement. On étudie les comportements de la moyenne et de la variance de ces estimées en fonction de q et n . Dans ce travail, on a utilisé $n_{breal} = 1000$ et $2^{14} \leq n \leq 2^{21}$. Les régressions linéaires sont effectuées dans une gamme d'échelles $a_m = 2^{j_m} \leq a = 2^j \leq a_M = 2^{j_M}$ bien contrôlée et commune à toutes les expériences.

• **LINÉARISATION DES ESTIMÉES.** Les études conduites montrent le résultat fondamental suivant : lorsque q appartient à un certain intervalle $[q_-^*, q_+^*]$, les estimées $\hat{\zeta}(q, n)$ atteignent les $\zeta(q)$; en dehors de cet intervalle, elles suivent nécessairement un comportement linéaire en q . Un aspect essentiel de ce résultat réside dans le fait qu'il est obtenu **pour les trois estimateurs** choisis et **pour tous les types de processus** envisagés. Plus précisément, on obtient respectivement :

$$EI : \left\{ \begin{aligned} \hat{\zeta}(q, n) &\rightarrow \alpha_- + \beta_- q & q \leq q_-^*, \\ \hat{\zeta}(q, n) &\rightarrow \zeta(q) & q_-^* \leq q \leq q_+^*, \\ \hat{\zeta}(q, n) &\rightarrow \alpha_+ + \beta_+ q & q_+^* \leq q. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$EII\&III \left\{ \begin{aligned} \hat{\zeta}(q, n) &\rightarrow \zeta(q) & -1 < q \leq q_+^*, \\ \hat{\zeta}(q, n) &\rightarrow \alpha_+ + \beta_+ q & q_+^* \leq q. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Cet effet de linéarisation est illustré sur la figure 4 (a & b). Nous insistons, d'une part, sur le fait que cet exemple (CMC log-normal) est représentatif des observations obtenues pour EI, EII et EIII pour les 4 types de processus (CMC, CPC, IDC et MRW) et différents choix de $\zeta(q)$; d'autre part, sur le fait que ce phénomène de *linéarisation* est essentiellement indépendant de la longueur des observations (on l'observe quel que soit n et

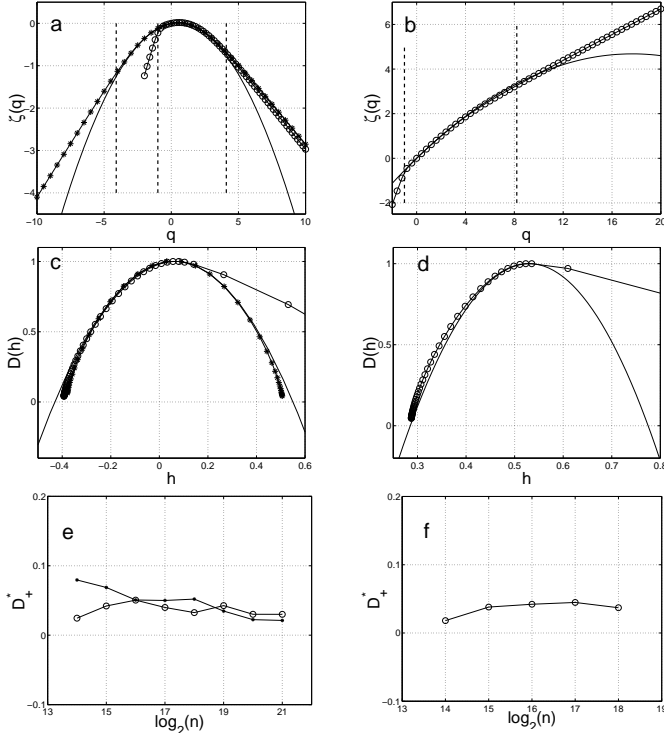


FIG. 1 – **Effet de linéarisation des $\hat{\zeta}(q, n)$.** (a) $\hat{\zeta}(q, n)$ pour Q avec EI (*) et EIII (o) comparés à $\zeta(q)$ (trait plein) pour une CMC log-normale ($\zeta(q) = m(q - q^2)$, $m = 0.06$); (b) $\hat{\zeta}(q, n)$ pour V_H ($H = 1/2$) avec EIII (o), $n = 2^{18}$. Les valeurs $q = q_{\pm}^*$ ou $q = -1$ sont repérées par des lignes verticales. (c) & (d) : transformées de Legendre correspondantes. (e) & (f) : estimées \hat{D}_+^* en fonction de n (e) pour Q avec EI (*) et EIII (o), (f) pour V_H avec EIII.

l'estimation des paramètres associés q_{\pm}^* , α_{\pm} , β_{\pm} est faiblement dépendante de n).

L'effet de linéarisation des $\hat{\zeta}(q, n)$ se visualise de façon claire lorsqu'on trace leur transformée de Legendre¹ $\hat{D}_n(h)$ et la compare à celle $D(h)$ des $\zeta(q)$. En effet, la transformée de Legendre change une droite en un point, et donc, le(s) comportement(s) linéaire(s) asymptotique(s) des $\hat{\zeta}(q, n)$ en point(s) d'accumulation (\hat{h}_{\pm}^* , \hat{D}_{\pm}^*), avec $\hat{h}_{\pm}^* = \beta_{\pm}$ et $\hat{D}_{\pm}^* = 1 - \alpha_{\pm}$. L'existence de ces points d'accumulation est illustrée sur la figure 4 (c & d). En notant \overline{D}_{\pm}^* la moyenne sur n_{breal} réalisations de \hat{D}_{\pm}^* , on observe expérimentalement que $\overline{D}_{\pm}^* = \overline{D}_{\pm}^* = 0$, pour toutes les situations où $D(h) \rightarrow -\infty$ quand $h \rightarrow \pm\infty$. Tout se passe donc comme si $\hat{D}_n(h)$ doit essentiellement rester à valeurs positives. On observe enfin que la position de ce point d'accumulation est indépendante de n , cf. figure 4 dernière ligne pour \hat{D}_+^* (comportements similaires pour \hat{D}_-^* et \hat{h}_{\pm}^*).

Enfin, nous notons, à partir des observations ci-dessus et de la connaissance a priori de $D(h)$, qu'il est possible de définir les coordonnées *théoriques* des points d'accumulation (h^* , D^*) et des valeurs critiques q^* par :

$$D^* = D(h^*) = 0, \quad h^* = (d\zeta(q)/dq)_{q=q^*}. \quad (11)$$

Les q^* définis implicitement par ces équations sont positionnés

¹La transformée de Legendre est définie par [16] : $D(h) = 1 + \min_q (qh - \zeta(q))$, qui s'écrit lorsque $\zeta(q)$ est une fonction continûment dérivable : $D(h) = q(h) \frac{d\zeta}{dq}(q(h)) - \zeta(q(h))$, où $q(h)$ est la solution de $h = \frac{d\zeta}{dq}(q)$.

sur la figure 4. La détermination de leurs valeurs à partir des exposants estimés $\hat{\zeta}(q, n)$ est à l'étude.

• **BIAIS ET VARIANCE.** Lorsque $q \in [q_-^*, q_+^*]$, pour EI, ou $q \in]-1, q_+^*]$, pour EII et EIII, on constate que les estimateurs $\hat{\zeta}(q, n)$ sont entachés d'un biais systématique dont l'ampleur dépend de l'écart de $\zeta(q)$ à un comportement linéaire, en d'autres termes $|\hat{\zeta}(q, n) - \zeta(q)|$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, contrairement à ce qui était observé pour les processus auto-similaires [1]. Cette question délicate est en cours d'examen et sera développée ultérieurement. La variance des $\hat{\zeta}(q, n)$, elle, présente toujours une décroissance en loi de puissance en fonction de n , la longueur des observations : $\text{Var} \hat{\zeta}(q, n) \sim \lambda_q n^{\gamma(q)}$. Pour caractériser cette décroissance, on trace $\gamma(q)$ (cf. figure 2) en fonction de q . On constate que l'on n'obtient pas le comportement usuel en $1/n$, observé pour les processus auto-similaires par exemple [1]. Pour $q \geq q_+^*$, on n'enregistre quasiment aucune réduction de variance avec l'augmentation de n ($\gamma(q) \simeq 0$), un comportement analogue à celui des situations où les moments n'existent pas ($q \leq -1$). Pour $q \in [q_-^*, q_+^*]$ (EI) ou $q \in]-1, q_+^*]$ (EII et EIII), $\gamma(q)$ raccorde continûment la décroissance en $1/n$ quand $q \simeq 0$ à une décroissance lente (cf. figure 2).

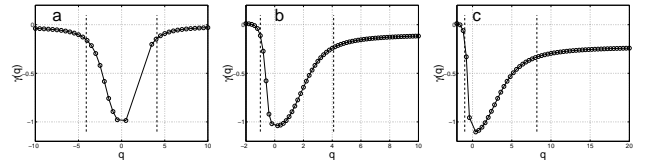


FIG. 2 – **Variance des estimateurs.** Décroissance $\gamma(q)$ ($\text{Var} \hat{\zeta}(q, n) \sim \lambda_q n^{\gamma(q)}$) de la variance, estimé par régression linéaire de $n = 2^{14}$ à $n = 2^{21}$, pour (a) : Q avec EI, (b) et (c) : V_H avec EI et EIII, CMC log-normal $m = 0.06$, $H = 1/2$.

5 Interprétations

• **FORMALISME MULTIFRACTAL.** Les 4 catégories de processus utilisés ici peuvent toutes être caractérisées par leurs propriétés multifractales [16]. Il est donc naturel d'envisager ce point de vue pour interpréter les résultats obtenus. Dans ce cadre, la fonction $D(h) = 1 + q(h)\zeta'(q(h)) - \zeta(q(h))$ s'interprète comme la dimension fractale du support de l'ensemble des points d'exposant de singularité locale h du signal scalaire étudié [16]. En résulte ainsi une explication intuitive simple au phénomène de linéarisation des exposants $\zeta(q)$: on ne peut estimer correctement $\zeta(q)$ en dehors de l'intervalle $[q_-^*, q_+^*]$ sur lequel² $D(q)$ prend des valeurs positives, car il faudrait pour cela sonder des ensembles de dimension fractale négative. Une telle interprétation a déjà été formulée plus ou moins explicitement dans [13, 16]. Une poursuite possible de ce raisonnement pourrait consister à supposer l'existence d'une résolution minimale, dépendant de la longueur n des observations, au delà de laquelle une dimension fractale ne peut plus être estimée. En pratique, il n'en est rien puisque le point d'accumulation est concentré en $\hat{D}_+^* \simeq 0$, quelque soit n . De plus, les observations de la section 4 restent valides même si les

²Si $\zeta(q)$ est strictement convexe, ie $\frac{d^2\zeta}{dq^2}(q) < 0$, ce qui est toujours le cas ici, la relation $h = \frac{d\zeta}{dq}(q)$ définit une bijection entre h et q , et l'on peut alors indifféremment paramétrer D par h ou q .

régressions linéaires permettant les estimations sont réalisées dans des gammes d'échelles $a_m \leq a \leq a_M$ qui excluent la limite des petites échelles ($a \rightarrow 0$). L'utilisation du formalisme multifractal n'épuise pas la compréhension de ce phénomène de linéarisation.

• **MARTINGALES.** S'appuyant sur les théorèmes de Kahane et Peyrière [11] relatifs aux martingales multiplicatives que constituent les CMC, Ossiander et Waymire ont récemment donné des résultats théoriques concernant l'estimation des exposants $\zeta(q)$ pour les densités Q des CMC par la méthode EI avec $f_0 = \beta_0$ [15]. Ces résultats prévoient théoriquement l'effet de linéarisation des estimées $\hat{\zeta}(q, n)$, et les valeurs critiques q^* et h^* . Les résultats obtenus ici sont en accord avec ces prévisions théoriques, les illustrent et complètent pour les densités Q des CMC et les étendent i) aux processus A et V_H , ii) aux familles de processus CPC, IDC et MRW, iii) à d'autres types d'estimateurs : EI avec f_0 possiblement différentes de β_0 , EII, EIII. Bien que ces généralisations reposent sur des observations expérimentales, elles peuvent se comprendre par les arguments suivants. D'abord, EII et EIII reposent, comme EI, essentiellement sur l'évaluation de quantités multirésolution, et présentent donc naturellement les mêmes propriétés ; le choix spécifique $f_0 = \beta_0$ ou $f_0 = (\beta_0)^{*N}$ n'est qu'une adaptation adéquate à la nature toujours positive de la densité Q et n'est plus pertinent pour l'analyse de A ou V_H . Ensuite, les densités Q sous-jacentes aux CPC, IDC et MRW constituent également des martingales [5, 3, 4, 6], de sorte qu'on peut envisager l'extension de la validité des arguments utilisés dans [15] à ces nouveaux processus.

L'effet de linéarisation des $\hat{\zeta}(q, n)$ est donc fondamentalement dû à la structure de construction, multiplicative, des processus et à leur nature de martingales plutôt qu'à leurs propriétés multifractales.

6 Conclusion

Nous montrons, à partir de quatre types de processus multiplicatifs présentant des lois d'échelle connues et prescrites a priori, que les estimateurs *multirésolution* (boîte, accroissement, ondelette) des exposants des lois d'échelle ne peuvent en rendre compte correctement que pour une gamme finie de valeurs de q . Ces observations sont également valides pour des données expérimentales de turbulence hydrodynamique et de télétrafic informatique ; ces faits sont en cours d'étude.

Références

- [1] P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, and D. Veitch. *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, chapter Wavelets for the analysis, estimation, and synthesis of scaling data. Wiley, 2000.
- [2] E. Bacry, J. Delour, and J.F. Muzy. Multifractal random walk. *Phys. Rev. E*, 64 :026103, 2001.
- [3] E. Bacry and J.F. Muzy. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E*, 66, 2002.
- [4] E. Bacry and J.F. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Comm. in Math. Phys.*, 2003. to appear.
- [5] J. Barral and B. Mandelbrot. Multiplicative products of cylindrical pulses. *Probab. Theory Relat. Fields*, 124 :409–430, 2002.
- [6] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. On non scale invariant infinitely divisible cascades. In *XIXème colloque GRETSI, Paris, France*, 2003.
- [7] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. Scale invariant infinitely divisible cascades. In *Int. Symp. on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France*, 2003.
- [8] P. Gonçalvès and Riedi R. Diverging moments and parameter estimation. *preprint*.
- [9] P. Gonçalvès, Riedi R, and Baraniuk R. A simple statistical analysis of wavelet-based multifractal spectrum estimation. In *Proc. of the 32nd Conf. on Signals, Systems and Computers, Asilomar, USA*, 1998.
- [10] V.K. Gupta and E.C. Waymire. A statistical analysis of mesoscale rainfall as a random cascade. *Journal of Applied Meteorology*, 32(2) :251–267, Feb. 1993.
- [11] J.P. Kahane and J.Peyrière. Sur certaines martingales de benoit mandelbrot. *Adv. in Math.*, 22 :131–145, 1976.
- [12] B. B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self similar cascades : Divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid. Mech.*, 62 :331, 1974.
- [13] B. B. Mandelbrot. Negative fractal dimensions and multifractals. *Physica A*, 163 :306–315, 1990.
- [14] G.M. Molchan. Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades. *Comm. Math. Phys.*, 179, 1996.
- [15] M. Ossiander and E.C. Waymire. Statistical estimation for multiplicative cascades. *Ann. Statistics*, 28(6) :1533–1560, 2000.
- [16] R. Riedi. *Lois d'échelle, fractales et ondelettes, vol. 2*, Editeurs : P. Abry, P. Gonçalvès, J. Lévy Vehel, chapter Lois d'échelles multifractales : fondements et approche par ondelettes. Lavoisier, 2002.
- [17] G. Samorodnitsky and M. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes*. Chapman and Hall, New York, 1994.
- [18] D. Schretzer and S. Lovejoy. Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes. *J. of Geoph. Research*, 92(8) :9693–9714, 1987.