

Etude analytique de l'impact des erreurs de calibration sur les performances d'estimateurs de direction d'arrivées : cas de la méthode MUSIC

A. FERREOL^(1,2) et P. LARZABAL⁽²⁾

⁽¹⁾ THALES-Communications, 66 rue du Fossé Blanc 92231 GENNEVILLIERS

⁽²⁾ SATIE UMR CNRS n°8029-Ecole Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du président Wilson, 94235 CACHAN Cedex

anne.ferreol@fr.thalesgroup.com pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr

Résumé – Cet article fournit une expression analytique du biais et de l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) des estimées des directions d'arrivée en fonction des erreurs de calibration des chaînes de réception plus précise (et plus simple) que celles des références [3][4][5]. Nous montrons que les erreurs d'estimations des directions peuvent s'écrire sous la forme d'un rapport de formes hermitiennes de vecteurs aléatoires composés des paramètres d'erreurs. Nous en déduisons alors les liens analytiques précis entre les performances (biais et EQM) et les moments des erreurs de calibration. Nous pouvons ainsi montrer que les résultats de [3][4][5] concernant l'influence de ces erreurs sont exagérément pessimistes.

Abstract – This paper proposes an analytic expression of the bias and RMS (Root Mean Square) of the estimated DOA (Direction Of Arrival) in function of the calibration distortion of the channel receivers more accurate (and compact) than the expressions of papers [3][4][5]. We show that the DOA estimation errors can be written as a ratio of hermitian forms with a stochastic multi-variate vector composed by the error parameters. We deduce a closed form expression between the performances (bias and RMS) and statistical moments of the calibration errors. We then observe that the results of [3][4][5] are pessimist.

1. Introduction

Il est bien connu que les méthodes à haute résolution [1] sont sensibles à une inadéquation du modèle de réception [3]. Peu de travaux se sont intéressés à la quantification analytique de la dégradation introduite par des erreurs de calibration de chaînes de réception. En première approximation les analyses de Marcos [5], Swindlhurst & Kailath [4] et Friedlander [3] établissent que l'estimateur MUSIC est non biaisé et que son EQM dépend des statistiques d'ordre 2 des erreurs de calibration. Or en confrontant ces résultats théoriques à des simulations représentatives de la réalité on s'aperçoit qu'en situation multi-sources l'estimateur MUSIC est biaisé et qu'en présence de sources proches les expressions théoriques proposées dans [3][4][5] ne rendent pas bien compte des EQM obtenues par simulations. Une relation plus précise entre les erreurs de calibration et les performances en localisation permettrait de spécifier le matériel puis de définir la qualité requise pour la calibration afin d'atteindre les performances souhaitées. L'objet de ce travail est d'établir ce lien de manière précise.

Dans ce travail nous nous placerons dans un contexte non bruité ou avec une matrice de covariance des signaux connue. Les erreurs de calibration dépendront des sources et des capteurs et seront considérées comme des variables aléatoires, sans restriction sur leur loi de probabilité contrairement aux travaux cités précédemment. Nous montrons dans ce papier que les estimateurs présentent un biais dépendant des

statistiques d'ordre 2 des erreurs de calibration et une EQM dépendant des statistiques d'ordre 4 de ces mêmes erreurs.

Les calculs ont été développés plus particulièrement pour la méthode MUSIC. Nous exprimons tout d'abord le pseudo-spectre de MUSIC en fonction des erreurs de calibration. Nous montrons que l'estimation des performances se réduit à la détermination des statistiques d'un rapport de formes hermitiennes de variables aléatoires multi-dimensionnelles complexes (erreurs de calibration).

2. Modèle et formulation du problème

Un réseau composé de N capteurs reçoit à l'instant t un vecteur observation $\mathbf{x}(t)$ dont la composante $x_n(t)$ ($1 \leq n \leq N$) est l'enveloppe complexe du signal reçu en sortie du $n^{\text{ième}}$ capteur. En présence de M sources d'incidences θ_m ($1 \leq m \leq M$), le vecteur observation s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) s_m(t) + \mathbf{b}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{s}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (1)$$

où $\tilde{\mathbf{a}}(\theta)$ est le vecteur directeur d'une source d'incidence θ , $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1) \dots \tilde{\mathbf{a}}(\theta_M)]$, $\mathbf{b}(t)$ est le vecteur de bruit supposé spatialement blanc et $s_m(t)$ est l'enveloppe complexe de la $m^{\text{ième}}$ source. En notant $\mathbf{a}(\theta)$ le vecteur directeur utilisé dans l'algorithme (modèle de réception), on définit l'erreur de calibration pour la $m^{\text{ième}}$ source par :

$$\mathbf{e}_m = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) - \mathbf{a}(\theta_m) = \tilde{\mathbf{a}}_m - \mathbf{a}_m \quad (2)$$

où $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_m) = \tilde{\mathbf{a}}_m$ et $\mathbf{a}(\theta_m) = \mathbf{a}_m$. La méthode MUSIC [1] est basée sur l'exploitation des propriétés de la matrice de covariance $\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H]$ des observations $\mathbf{x}(t)$ afin d'en déduire un critère $c(\theta)$ vérifiant $c(\theta_m) = 0$ lorsque $\mathbf{a}(\theta_m) = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_m)$ pour $1 \leq m \leq M$. En utilisant les vecteurs $\mathbf{a}(\theta)$ et en supposant que \mathbf{R}_x est estimée de façon parfaite le pseudo-spectre s'écrit de la façon suivante :

$$c(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \Pi_b \mathbf{a}(\theta) \quad (3)$$

avec $\Pi_b = \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^\#$ et $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \dots \tilde{\mathbf{a}}_M]$,

où \mathbf{I}_N est la matrice identité de dimension $N \times N$, H désigne le transposé-conjugué et $^\#$ désigne la pseudo-inverse tel que : $\mathbf{A}^\# \mathbf{A} = \mathbf{I}_M$. Lorsque $\mathbf{a}_m \neq \tilde{\mathbf{a}}_m$, le critère ne vérifie plus $c(\theta_m) = 0$ et présente un minimum local $\hat{\theta}_m$ différent de l'incidence exacte θ_m . L'écart $\Delta\theta_m = \hat{\theta}_m - \theta_m$ est l'erreur d'estimation de l'incidence de la $m^{\text{ième}}$ source dont on cherche à évaluer le biais $E[\Delta\theta_m]$ et l'EQM noté EQM_m : $\text{EQM}_m^2 = E[\Delta\theta_m^2]$. L'objectif de cet article est tout d'abord d'évaluer le lien analytique entre $\Delta\theta_m$ et les erreurs de calibration \mathbf{e}_m ($1 \leq m \leq M$) pour en déduire ensuite les expressions du biais et de l'EQM dépendant de la moyenne et la variance de cette variable aléatoire $\Delta\theta_m$.

3. Lien entre les erreurs d'estimation et les erreurs de calibration

En réalisant un développement limité à l'ordre 2 du critère de l'expression (3) on déduit que :

$$\Delta\theta_m = -\frac{\dot{c}(\theta_m)}{\ddot{c}(\theta_m)} \quad (4)$$

où $\dot{c}(\theta)$ et $\ddot{c}(\theta)$ désignent respectivement les dérivées 1^{ière} et 2^{ième} du critère $c(\theta)$ par rapport à θ . Les expressions de $\dot{c}(\theta)$ et $\ddot{c}(\theta)$ sont les suivantes en utilisant l'expression (3) :

$$\dot{c}(\theta_m) = 2 \Re \left\{ \dot{\mathbf{a}}_m^H \Pi_b \mathbf{a}_m \right\} \quad (5)$$

et $\ddot{c}(\theta_m) = 2 \Re \left\{ \ddot{\mathbf{a}}_m^H \Pi_b \mathbf{a}_m \right\} + 2 \dot{\mathbf{a}}_m^H \Pi_b \dot{\mathbf{a}}_m$

où $\Re \{ \}$ désigne la partie réelle, $\dot{\mathbf{a}}_m$ et $\ddot{\mathbf{a}}_m$ désignent respectivement les dérivées 1^{ière} et 2^{ième} du vecteur directeur $\mathbf{a}(\theta_m)$ par rapport à θ_m . D'après (3) le projecteur Π_b dépend de la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ et non de la matrice \mathbf{A} contenant les vecteurs \mathbf{a}_m . D'après (2), on pose les notations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{E} \quad \text{où } \mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_M] \quad \text{et } \Pi_{b_0} = \mathbf{I}_N - \mathbf{A} \mathbf{A}^\# \quad (6)$$

3.1 Calcul de $\Delta\theta_m$ par un développement limité à l'ordre 1 de Π_b en $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$

En notant que la différentielle de $\tilde{\mathbf{A}}$ s'écrit $\partial\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$, on montre que la relation entre les projecteurs Π_b et Π_{b_0} des expressions (3) et (6) au voisinage de $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ est la suivante :

$$\Pi_b \mathbf{A} = \Pi_{b_0} (\mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}^\#) \mathbf{A} \quad \text{où } \mathbf{A}^\# = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \quad (7)$$

Démonstration :

En réalisant un développement à l'ordre 1 du projecteur Π_b au voisinage de $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ on obtient :

$$\Pi_b = \Pi_{b_0} + \partial\Pi_b \quad (8)$$

Comme d'après (3), $\Pi_b = \mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^\#$ on en déduit que la différentielle $\partial\Pi_b$ au voisinage de $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ s'écrit :

$$\partial\Pi_b = -\partial\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{A}^\# - \mathbf{A} \partial\tilde{\mathbf{A}}^\# \quad (9)$$

Sachant que $\tilde{\mathbf{A}}^\# \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_M$ on en déduit que $\partial\tilde{\mathbf{A}}^\# \tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{A}}^\# \partial\tilde{\mathbf{A}}$, dans ces conditions on obtient :

$$\partial\Pi_b \mathbf{A} = -\partial\tilde{\mathbf{A}} (\mathbf{A}^\# \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\partial\tilde{\mathbf{A}}^\# \mathbf{A}) = -\partial\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{A} (\mathbf{A}^\# \partial\tilde{\mathbf{A}}) \quad (10)$$

Comme $\Pi_{b_0} = \mathbf{I}_N - \mathbf{A} \mathbf{A}^\#$, l'équation (10) devient $\partial\Pi_b \mathbf{A} = -\Pi_{b_0} \partial\tilde{\mathbf{A}}$. Sachant que $\Pi_b \mathbf{A} = \Pi_{b_0} \mathbf{A} + \partial\Pi_b \mathbf{A}$ et que $\Pi_{b_0} \mathbf{A} = \mathbf{0}_N$ ($\mathbf{0}_N$: matrice nulle de dimension $N \times N$), on en déduit la relation de l'équation (7) ■

En notant $\mathbf{v}_m = \Pi_b \mathbf{a}_m$, l'équation (7) donne $\mathbf{v}_m = \mathbf{B} \mathbf{a}_m$ avec $\mathbf{B} = \Pi_{b_0} (\mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}^\#)$. Sachant que $\Pi_b \Pi_b = \Pi_b$, l'équation (5) s'écrit en fonction du vecteur \mathbf{v}_m de la manière suivante :

$$c(\theta_m) = \mathbf{v}_m^H \mathbf{v}_m \quad \text{et} \quad \dot{c}(\theta_m) = 2 \Re \left\{ \dot{\mathbf{v}}_m^H \mathbf{v}_m \right\} \quad (11)$$

et $\ddot{c}(\theta_m) = 2 \Re \left\{ \ddot{\mathbf{v}}_m^H \mathbf{v}_m \right\} + 2 \dot{\mathbf{v}}_m^H \dot{\mathbf{v}}_m$

où $\dot{\mathbf{v}}_m = \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}}_m$ et $\ddot{\mathbf{v}}_m = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{a}}_m$. On remarque que l'expression (11) fait apparaître les termes $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ d'expression : $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{B} \mathbf{v})^H (\mathbf{B} \mathbf{u})$. On montre en annexe que cette fonction s'écrit sous la forme hermitienne suivante :

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^H (\mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}^\#)^H \Pi_{b_0} (\mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}^\#) \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

où $\mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^H \Pi_{b_0} \mathbf{u} & -\left((\mathbf{A}^\# \mathbf{u})^* \otimes (\Pi_{b_0} \mathbf{v})^H \right) \\ -(\mathbf{A}^\# \mathbf{v})^* \otimes (\Pi_{b_0} \mathbf{u}) & \left((\mathbf{A}^\# \mathbf{v})^* (\mathbf{A}^\# \mathbf{u})^H \right) \otimes \Pi_{b_0} \end{bmatrix}$

où $\boldsymbol{\varepsilon} = [1 \quad \mathbf{e}_1^T \dots \quad \mathbf{e}_M^T]^T$ est le vecteur contenant tous les paramètres d'erreurs de calibration et \otimes désigne le produit de Kronecker. D'après les équations (11) et (12), les fonctions $\dot{c}(\theta_m)$ et $\ddot{c}(\theta_m)$ s'écrivent sous les formes hermitiennes suivantes :

$$\dot{c}(\theta_m) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \dot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \ddot{c}(\theta_m) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

où $\dot{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \dot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m)$
 $\ddot{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{Q}(\mathbf{a}_m, \ddot{\mathbf{a}}_m) + \mathbf{Q}(\ddot{\mathbf{a}}_m, \mathbf{a}_m) + 2\mathbf{Q}(\dot{\mathbf{a}}_m, \dot{\mathbf{a}}_m)$

Des équations (4) et (13) on déduit que l'erreur $\Delta\theta_m$ de l'estimation de l'incidence de la $m^{\text{ième}}$ source s'écrit sous le rapport de formes hermitiennes suivant :

$$\Delta\theta_m = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^H \dot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{\varepsilon}^H \ddot{\mathbf{Q}}_m \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [1 \quad \mathbf{e}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{e}_M^T]^T \quad (14)$$

3.2 Expression de $\Delta\theta_m$ dans [3][4][5]

L'expression de $\Delta\theta_m$ utilisée dans [3][4][5] est celle de l'équation (4) qui est issu d'un développement limité à l'ordre 2 du pseudo-spectre $c(\theta)$ au voisinage de $\theta = \theta_m$. Toutefois les expressions des dérivées de $c(\theta)$ en fonction des erreurs de calibration diffèrent. On notera par $\dot{c}_0(\theta_m)$ et $\ddot{c}_0(\theta_m)$ les

dérivées 1^{ière}, respectivement 2^{ième} approchées du critère $c(\theta_m)$. Les expressions sont les suivantes :

$$\dot{c}_0(\theta_m) = 2 \Re \left\{ \mathbf{e}_m^H \Pi_{b0} \dot{\mathbf{a}}_m \right\} = \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \ddot{c}_0(\theta_m) = 2 \dot{\mathbf{a}}_m^H \Pi_{b0} \dot{\mathbf{a}}_m$$

$$\text{où } \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\left((\mathbf{A}^\# \mathbf{a}_m)^* \otimes (\Pi_{b0} \dot{\mathbf{a}}_m) \right)^H \\ -\left((\mathbf{A}^\# \mathbf{a}_m)^* \otimes (\Pi_{b0} \dot{\mathbf{a}}_m) \right) & \mathbf{0}_{NM} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Ces expressions montrent que $\ddot{c}_0(\theta_m)$ est supposé indépendant des erreurs de calibration $\boldsymbol{\varepsilon}$ et que $\dot{c}_0(\theta_m)$ dépend de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et plus précisément des erreurs \mathbf{e}_m de la $m^{\text{ième}}$ source. La différence entre $\dot{c}_0(\theta_m)$ et $\dot{c}(\theta_m)$ est la suivante :

$$\dot{c}(\theta_m) - \dot{c}_0(\theta_m) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{dQ} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{avec}$$

$$\mathbf{dQ} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^H \\ \mathbf{0} & \left((\mathbf{A}^\# \dot{\mathbf{a}}_m)^* (\mathbf{A}^\# \dot{\mathbf{a}}_m)^T + (\mathbf{A}^\# \dot{\mathbf{a}}_m)^* (\mathbf{A}^\# \mathbf{a}_m)^T \right) \otimes \Pi_{b0} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ainsi $\dot{c}(\theta_m)$ fait intervenir des termes d'ordre 2 $\mathbf{e}_m^H \Pi_{mm}$, \mathbf{e}_m , qui sont négligés dans $\dot{c}_0(\theta_m)$. L'expression de l'erreur $\Delta\theta_m$ de l'estimation de l'incidence de la $m^{\text{ième}}$ source est alors la suivante d'après (15):

$$\Delta\theta_m = -\frac{\Re \left\{ \mathbf{e}_m^H \Pi_{b0} \dot{\mathbf{a}}_m \right\}}{\dot{\mathbf{a}}_m^H \Pi_{b0} \dot{\mathbf{a}}_m} = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\varepsilon}}{2 \dot{\mathbf{a}}_m^H \Pi_{b0} \dot{\mathbf{a}}_m} \quad (17)$$

4. Détermination du biais et de l'EQM

La référence [6] donne l'expression exacte des moments de ratio de forme hermitiennes comme celui de l'expression (14). Le biais pour estimer l'incidence de la $m^{\text{ième}}$ source s'écrit alors de la manière suivante :

$$E[\Delta\theta_m] = -\frac{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\varepsilon)}{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m \mathbf{R}_\varepsilon)} \quad \text{avec } \mathbf{R}_\varepsilon = E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^H] \quad (18)$$

Sachant que $\boldsymbol{\varepsilon} = [1 \ \mathbf{e}_1^T \dots \ \mathbf{e}_M^T]^T$, on remarque que le biais $E[\Delta\theta_m]$ de l'expression (18) n'a pas de raison particulière de s'annuler lorsque $E[\mathbf{e}_m] = 0$. Toutefois l'expression (17) issue des références [3][4][5] établit que $E[\Delta\theta_m] = 0$ car $\Delta\theta_m$ dépend linéairement de \mathbf{e}_m . On déduit de la référence [6] que l'EQM de la $m^{\text{ième}}$ source a l'expression suivante :

$$\text{EQM}_m = \sqrt{\frac{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\varepsilon^4)}{\text{trace}(\dot{\mathbf{Q}}_m^{\otimes 2} \mathbf{R}_\varepsilon^4)}} \quad \text{avec } \mathbf{R}_\varepsilon^4 = E[\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes 2} \boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes 2H}] \quad (19)$$

où $\mathbf{A}^{\otimes 2} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$. En supposant que $\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{e}_1^T \dots \ \mathbf{e}_M^T]^T$ est un vecteur gaussien circulaire et centré, on montre que le moment d'ordre 4 \mathbf{R}_ε^4 de $\boldsymbol{\varepsilon} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$ s'écrit de la manière suivante en fonction de son moment d'ordre 2.

$$\mathbf{R}_\varepsilon^4 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \dots & \mathbf{R}_{1,1+NM} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{1+NM,1} & \dots & \mathbf{R}_{1+NM,1+NM} \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{R}_\varepsilon(i,j) + \mathbf{r}_\varepsilon(j) \mathbf{r}_\varepsilon(i)^H - \mathbf{1}_{NM+1} \mathbf{1}_{NM+1}^H \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j \quad (20)$$

où $\mathbf{1}_K = [1 \ \mathbf{0}_{K-1}^T]^T$, $\mathbf{R}_\varepsilon = [\mathbf{r}_\varepsilon(1) \dots \ \mathbf{r}_\varepsilon(NM+1)]$ et $\mathbf{R}_\varepsilon(i,j)$ la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne de \mathbf{R}_ε et $\boldsymbol{\delta}_i = 1$ pour $i=1$ et 0 sinon.

Démonstration :

Pour calculer la matrice $\mathbf{R}_{i,j} = E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^H \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j^*]$, on utilise l'inverse de la formule dite de Leonov et Shirayayev [2] qui donne les moments en fonction des cumulants. Sachant que sous l'hypothèse gaussienne les cumulants d'ordre strictement supérieur à 2 sont nuls, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i,j} = & \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \\ & + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H, \boldsymbol{\varepsilon}_i) + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \\ & + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \\ & + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \\ & + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H, \boldsymbol{\varepsilon}_i) + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \end{aligned}$$

où $\text{cum}(\dots)$ désigne le cumulants. Comme $\boldsymbol{\varepsilon}$ est circulaire $\text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{1+NM}$. Sachant de plus que $\text{cum}(x) = E[x]$ et que $\text{cum}(x,y) = E[xy] - E[x]E[y]$ on peut réaliser les factorisations suivantes :

$\text{cum}(x,y) \text{cum}(u,v) + \text{cum}(x) \text{cum}(y) \text{cum}(u,v) = E[x,y] \text{cum}(u,v)$. Comme de plus $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{1}_{1+NM}$ et donc que $E[\boldsymbol{\varepsilon}_i] = \boldsymbol{\delta}_i$ la formule de Leonov et Shirayayev devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i,j} = & \mathbf{R}_\varepsilon \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) + \mathbf{r}_\varepsilon(j) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H, \boldsymbol{\varepsilon}_i) \\ & + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \\ & + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_j^*) + \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_j^*) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}^H) \text{cum}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \\ = & \mathbf{R}_\varepsilon (\mathbf{R}_\varepsilon(i,j) - \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j) + (\mathbf{R}_\varepsilon - \mathbf{1}_{1+NM} \mathbf{1}_{1+NM}^H) \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j \\ & + \mathbf{r}_\varepsilon(j) (\mathbf{r}_\varepsilon(i) - \mathbf{1}_{1+NM} \boldsymbol{\delta}_i)^H + (\mathbf{r}_\varepsilon(j) - \mathbf{1}_{1+NM} \boldsymbol{\delta}_j) \mathbf{1}_{1+NM}^H \boldsymbol{\delta}_i \\ & + \mathbf{1}_{1+NM} \mathbf{1}_{1+NM}^H \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j \\ = & \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{R}_\varepsilon(i,j) - \mathbf{1}_{1+NM} \mathbf{1}_{1+NM}^H \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j \\ & + \mathbf{r}_\varepsilon(j) \mathbf{r}_\varepsilon(i)^H - \mathbf{1}_{1+NM} \boldsymbol{\delta}_j \mathbf{1}_{1+NM}^H \boldsymbol{\delta}_i \\ & + \mathbf{1}_{1+NM} \mathbf{1}_{1+NM}^H \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j \\ = & \mathbf{R}_\varepsilon \mathbf{R}_\varepsilon(i,j) + \mathbf{r}_\varepsilon(j) \mathbf{r}_\varepsilon(i)^H - \mathbf{1}_{1+NM} \mathbf{1}_{1+NM}^H \boldsymbol{\delta}_i \boldsymbol{\delta}_j \end{aligned}$$

L'expression (20) est ainsi vérifiée ■

5. Simulations

Sur les figures FIG-1 et FIG-2 on compare les performances estimée de la 1^{ière} source (biais respectivement EQM) par simulation sur 200 réalisations, avec les performances théoriques proposées dans cet article ainsi que celles des références [3][4][5] en présence de $M=2$ sources d'incidences $\theta_1 = 0$ degré et θ_2 . Le réseau de capteurs est circulaire de rayon $R/\lambda = 0.5$ avec $N=5$ capteurs. La comparaison est effectuée en fonction du niveau σ des erreurs de calibration tel que $\mathbf{R}_\varepsilon = \sigma^2 \mathbf{I}_{1+NM}$. Cette modélisation correspond à des erreurs de calibration aléatoires de même puissance, indépendantes de capteur à capteur et de source à source.

Sur la figure FIG-1 on s'intéresse au biais de la 1^{ière} source en présence d'une 2^{ième} source d'incidence $\theta_2 = 14.2$ degrés. Le biais théorique de cet article ainsi que celui des simulations sont en adéquation. On observe que ainsi que le biais $E[\Delta\theta_1]$ est non nul contrairement aux prévisions des références [3][4][5].

Sur la figure FIG-2, la comparaison est en EQM et l'incidence de la 2^{ième} source vérifie $\theta_2 = 8.2$ degrés. On remarque que pour des erreurs fortes les références [3][4][5] surestiment l'influence dégradante des erreurs de calibration.

Il faut noter que lorsque les deux sources ne sont pas résolues $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ et que l'EQM converge vers une asymptote à 4.1 degrés. Même dans ce cas asymptotique de non résolution, contrairement aux prévisions théoriques de [3][4][5] l'algorithme MUSIC estime correctement l'incidence moyenne des deux sources, comme démontré par les moments que nous avons établis.

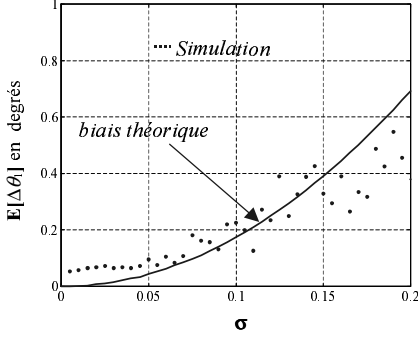


FIG. 1 : $E[\Delta\theta]$ en fonction du niveau de l'erreur de calibration : $\theta_2 - \theta_1 = 14.2$ degrés

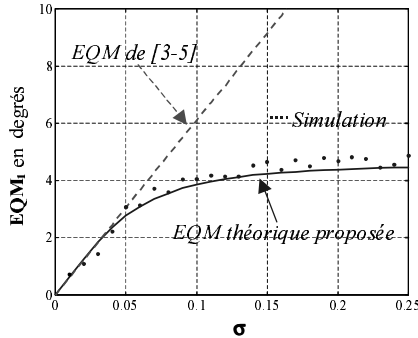


FIG. 2 : EQM_1 en fonction du niveau de l'erreur de calibration : $\theta_2 - \theta_1 = 8.2$ degrés

6. Conclusion

Dans cet article nous avons établi les performances analytiques de la méthode MUSIC en présence d'erreurs de calibration. Les résultats établis ne font aucune hypothèse sur la loi des erreurs de calibration. Les simulations effectuées sont en adéquation avec les résultats théoriques. Ces travaux ont mis en évidence l'existence d'un biais dépendant du moment d'ordre 2 des erreurs et d'une EQM dépendante des moments d'ordre 4.

7. Annexe : $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\varepsilon}^H \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \boldsymbol{\varepsilon}$

Sachant que $\Pi_{b0} \Pi_{b0}^H = \Pi_{b0}$ et que $\mathbf{B} = \Pi_{b0} (\mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}^\#)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{B} \mathbf{v})^H (\mathbf{B} \mathbf{u}) = \mathbf{v}^H (\mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}^\#)^H \Pi_{b0} (\mathbf{I}_N - \mathbf{E} \mathbf{A}^\#) \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v}^H \Pi_{b0} \mathbf{u} + (\mathbf{A}^\# \mathbf{v})^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{E} (\mathbf{A}^\# \mathbf{u}) \\ &\quad - (\mathbf{A}^\# \mathbf{v})^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{u} - \mathbf{v}^H \Pi_{b0} \mathbf{E} (\mathbf{A}^\# \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (I)$$

En posant $\mathbf{u}_a = \mathbf{A}^\# \mathbf{u}$, $\mathbf{v}_a = \mathbf{A}^\# \mathbf{v}$ et $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T \dots \mathbf{e}_M^T]^T$, on peut montrer que :

$$\mathbf{v}_a^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{u} = \mathbf{e}^H (\mathbf{v}_a^* \otimes (\Pi_{b0} \mathbf{u})) \quad (II)$$

Démonstration-1 :

Sachant que $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_M]$ et $\mathbf{v}_a = [\mathbf{v}_a(1) \dots \mathbf{v}_a(M)]^T$, on en déduit que :

$$\mathbf{v}_a^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{u} = \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m^H (\mathbf{v}_a(m)^* \Pi_{b0} \mathbf{u})$$

or sachant que $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T \dots \mathbf{e}_M^T]^T$ et que $\mathbf{v}_a^* \otimes (\Pi_{b0} \mathbf{u}) = [\mathbf{v}_a(1)^* (\Pi_{b0} \mathbf{u})^T \dots \mathbf{v}_a(M)^* (\Pi_{b0} \mathbf{u})^T]^T$, on en déduit que $\mathbf{v}_a^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{u} = \mathbf{e}^H (\mathbf{v}_a^* \otimes (\Pi_{b0} \mathbf{u}))$ ■

On montre aussi que :

$$\mathbf{v}_a^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{E} \mathbf{u}_a = \mathbf{e}^H \left((\mathbf{v}_a^* \mathbf{u}_a^T) \otimes \Pi_{b0} \right) \mathbf{e} \quad (III)$$

Démonstration-2 :

Sachant que $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_M]$, $\mathbf{u}_a = [\mathbf{u}_a(1) \dots \mathbf{u}_a(M)]^T$ et $\mathbf{v}_a = [\mathbf{v}_a(1) \dots \mathbf{v}_a(M)]^T$, on en déduit que :

$$\mathbf{v}_a^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{E} \mathbf{u}_a = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \mathbf{e}_m^H (\mathbf{u}_a(m') \mathbf{v}_a(m)^* \Pi_{b0}) \mathbf{e}_{m'}$$

or sachant que $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1^T \dots \mathbf{e}_M^T]^T$ et que :

$$(\mathbf{v}_a^* \mathbf{u}_a^T) \otimes \Pi_{b0} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \Pi_{b0} & \dots & \alpha_{M1} \Pi_{b0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1M} \Pi_{b0} & \dots & \alpha_{MM} \Pi_{b0} \end{bmatrix}$$

en posant que $\alpha_{m'm} = \mathbf{u}_a(m') \mathbf{v}_a(m)^*$ on en déduit que $\mathbf{v}_a^H \mathbf{E}^H \Pi_{b0} \mathbf{E} \mathbf{u}_a = \mathbf{e}^H \left((\mathbf{v}_a^* \mathbf{u}_a^T) \otimes \Pi_{b0} \right) \mathbf{e}$ ■

En utilisant les expressions (II) et (III) dans (1) on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{v}^H \Pi_{b0} \mathbf{u} + \mathbf{e}^H \left((\mathbf{A}^\# \mathbf{v})^* (\mathbf{A}^\# \mathbf{u})^T \right) \otimes \Pi_{b0} \mathbf{e} \\ &\quad - \mathbf{e}^H \left((\mathbf{A}^\# \mathbf{v})^* \otimes (\Pi_{b0} \mathbf{u}) \right) - \left((\mathbf{A}^\# \mathbf{u})^* \otimes (\Pi_{b0} \mathbf{v}) \right)^H \mathbf{e} \end{aligned} \quad (IV)$$

En posant $\boldsymbol{\varepsilon} = [1 \ \mathbf{e}^T]^T$, on obtient la forme hermitienne de l'expression (12).

Références

- [1] RO.Schmidt. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*, November 1981.
- [2] D.R. Brillinger. *Times Series, Data Analysis and Theory*. Holden-Day, 1981.
- [3] B.Friedlander. *A sensitivity analysis of the MUSIC Algorithm*, IEEE trans on Acoustic speech and SP, vol 38, n°10, July 1990, pp1740-1751.
- [4] AL.Swindlehurst and T.Kailath. *A performance Analysis of Subspace-Based Methods in the Presence of Model Errors, Part I: The MUSIC Algorithm*, IEEE trans on Signal processing, vol 40, n°3, July 1992, pp1758-1773.
- [5] S.Marcos. Sensibilité des méthodes HR aux perturbations de modèle, Chapitre 11, Les méthodes à haute résolution, traitement d'antennes et analyse spectrale, Hermès, Paris 1998, ISBN 2-86601-662-9, pp 322-342.
- [6] A.Ferréol et P.Larzabal. *The exact moments of a ratio of real hermitian forms in stochastic variables*. Rapport SATIE-ENS-CACHAN, www.satie.ens-cachan.fr, 2003.