

# Cophasage des Pupilles d'un Télescope Multi-pupilles

F. BARON, F. CASSAING, L. MUGNIER

Office National d'Etude et de Recherche Aérospatiales  
BP 72 - 29 avenue de la Division Leclerc  
92322 CHATILLON CEDEX, FRANCE

Fabien.Baron@onera.fr, Frederic.Cassaing@onera.fr, Laurent.Mugnier@onera.fr

**Résumé** – La mise en phase, ou cophasage, des pupilles d'un télescope Multi-pupilles nécessite la connaissance des aberrations différentielles de piston entre les pupilles. Un premier estimateur simple de piston peut être obtenu par analyse directe de la Fonction de Transfert Optique. Nous présentons ici la dérivation d'un second estimateur par une approche Moindres Carrés, et nous comparons les performances des deux estimateurs.

**Abstract** – Aperture phasing on a Multi-aperture Telescope requires the knowledge of the differential piston aberrations between apertures. A first simple piston estimator is obtained by direct analysis of the Optical Transfer Function. We derive here a second estimator using a Least Squares approach, and the performance of both estimators is compared.

## 1 Position du problème

Pour gagner en résolution, il est possible de réaliser l'équivalent d'un télescope de grand diamètre par recombinaison interférométrique de plusieurs télescopes de diamètre inférieur. Un tel Télescope Multi-pupilles (TMP, voir Figure 1) permet l'observation à très haute résolution de l'espace ou de la Terre, tout en respectant les contraintes de lancement (encombrement, masse). Cette solution est envisagée pour des instruments spatiaux, notamment pour la mission DARWIN de recherche de planètes hors du Système Solaire [1]. La principale difficulté opérationnelle de ce système est la mise en phase des pupilles, appelée cophasage, c'est-à-dire l'égalisation des trajets parcourus dans les différents bras de l'interféromètre afin de stabiliser l'image obtenue au foyer commun.

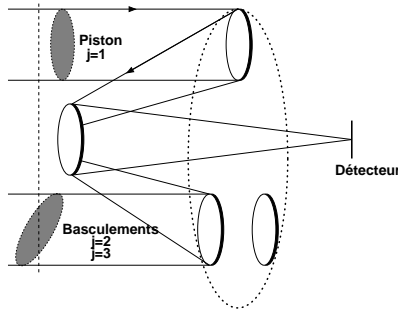


FIG. 1 – Principe d'un Télescope Multi-pupilles.

Les aberrations des pupilles peuvent se décomposer sur une base de modes, tels les modes de Zernike [2] illustrés en Figure 2. Les modes d'ordre supérieur ou égal à 4, correspondent aux aberrations propres de chaque pupille et peuvent se mesurer avec des senseurs développés pour les instruments monolithiques [3]. Par contre, l'alignement relatif des pupilles est un problème spécifique aux TMP, qui ne concerne que les trois premiers modes de Zernike, le piston ( $j = 1$ ) et les bascule-

ments ( $j = 2$  ou 3). Nous décrivons ici le principe d'un senseur destiné à la mesure du défaut de piston différentiel à partir de l'image d'un objet connu, par exemple ponctuel. Un tel objet peut être soit une étoile dans le champ pour une observation astronomique, soit une source interne.

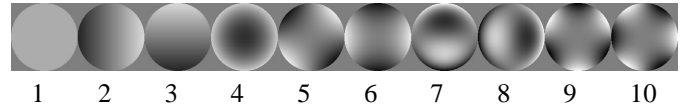


FIG. 2 – Les 10 premiers polynômes de Zernike  $Z_i$ , orthonormés sur le disque unité.

Cette communication rappelle tout d'abord la formation d'une image au foyer d'un TMP. Un premier estimateur de piston en est déduit. Un deuxième estimateur est ensuite obtenu par une approche Moindres Carrés. Enfin nous comparons leurs performances à l'aide de simulations numériques.

## 2 Estimateur de cophasage

### 2.1 Modèle direct

Notre étude est effectuée en bande spectrale étroite et les grandeurs sont discrétisées. Soit  $h$  la réponse impulsionnelle de l'instrument, supposée constante dans le champ. L'image  $i$  est modélisée par la convolution discrète (notée  $\star$ ) de l'objet observé  $o$  avec  $h$  à laquelle s'ajoute un bruit  $n$  :

$$i = h \star o + n \quad \text{avec} \quad n = g + P(h \star o) \quad (1)$$

Nous avons considéré  $n$  constitué d'une part d'un bruit additif  $g$ , blanc, Gaussien et stationnaire, et d'autre part d'un bruit de photons de type Poissonnien appliqué au produit de convolution.

La pupille globale est formée de  $N_T$  pupilles circulaires, de positions  $u_n$  et dont les transmissions hors aberrations sont modélisées par la fonction porte circulaire  $\Pi$ . La phase est décom-

posée sur chaque pupille dans la base des polynômes de Zernike, notés  $Z_i$ , de sorte que la transmission complexe  $p$  de la pupille globale s'écrit :

$$p = \sum_{n=1}^{N_T} p_n \star \delta_{u_n} \text{ avec } p_n = \Pi e^{i\phi_n} \text{ et } \phi_n = \sum_{j=1}^3 a_{jn} Z_j \quad (2)$$

où  $i = -1$ , et où le coefficient  $a_{jn}$  est l'amplitude en radians du mode d'ordre  $j$  sur la pupille  $n$ . Nous nous limiterons aux trois premiers polynômes pour chaque pupille, les pistons et basculements (voir Fig. 2).

La Fonction de Transfert Optique (FTO) est la transformée de Fourier de  $h$  et s'exprime alors en fonction de  $p$  :

$$\text{TF}(h) = \tilde{h} = p \otimes p = \sum_{n=1}^{N_T} \sum_{m=1}^{N_T} (p_n \otimes p_m) \star \delta_{u_n - u_m} \quad (3)$$

où  $\otimes$  est l'opérateur produit de corrélation, et  $\text{TF}(f)$  ou  $\tilde{f}$  désignent la Transformée de Fourier de la fonction  $f$ . Notons que le modèle direct est très non linéaire en les coefficients  $\{a_{in}\}$ .

## 2.2 Problème inverse

L'estimation de la phase pupillaire à partir de  $h$ , appelée *phase retrieval*, n'a pas de solution unique même si l'objet est connu [4]. Le problème de la mesure de phase à partir d'une image focale peut être résolu notamment par la méthode de diversité de phase, introduite par Gonsalves [5] et étendue aux instruments multi-pupilles par Paxman et coll.[6]. Deux images déphasées sont alors nécessaires dans le cas général. Mais si l'objet est connu et si les pics de la FTO ne se chevauchent pas, nous montrerons qu'une seule image suffit. Nous nous placerons dans ce cas dans le reste de cette communication. Le critère de distance à l'image, défini plus loin, peut alors se minimiser numériquement par une méthode de gradients conjugués [3] pour une phase quelconque, mais son implantation en temps réel est difficile.

Néanmoins le piston est mesurable sur une seule image dans le cas de pupilles diluées, et deux estimateurs sont décrits ci-dessus.

### 2.2.1 Méthode rustique

Pour un objet ponctuel, la transformée de Fourier de l'image est la FTO bruitée. Si le bruit est blanc Gaussien et stationnaire, alors la relation (3) permet de montrer que la FTO se présente sous la forme d'un pic central entouré de plusieurs pics satellites (Fig. 3, gauche), résultants de l'intercorrélation des différentes pupilles. Nous nous placerons par la suite dans l'hypothèse où la pupille est diluée, afin que les pics ne se chevauchent pas.

Un piston sur une pupille n'affecte pas le module des  $2(N_T - 1)$  pics concernés mais se traduit par des constantes de phase sur ceux-ci. En première approximation, les autres aberrations sont supposées du second ordre et leurs influences négligeables sur la FTO, de sorte que :

$$p_m \otimes p_n = e^{i(a_{1m} - a_{1n})} \Lambda f(\text{aber.}) \simeq e^{i(a_{1m} - a_{1n})} \Lambda \quad (4)$$

où  $f$  est une fonction des aberrations du second ordre et où  $\Lambda = \Pi \otimes \Pi$  est le module du pic, de forme caractéristique conique (cf Figure 3).

Un premier estimateur, dit "rustique" a donc été développé empiriquement afin de retrouver directement les pistons à partir de la phase des pics [7, 8]. Soit  $D_{nm}$  le domaine du pic d'intercorrélation des pupilles  $n$  et  $m$ , et  $\Phi_{nm}$  sa phase. Le piston moyen n'ayant pas d'effet sur l'image, il est choisi nul afin de fixer une référence. L'estimateur rustique s'écrit alors :

$$\Phi_{nm} = a_{1m} - a_{1n} \Rightarrow a_{1m} = \frac{1}{N_T} \sum_{n=1}^{N_T} \Phi_{nm} \quad (5)$$

L'estimation du piston est donc réalisable avec seulement une image. Seul le pixel central de chaque pic est utilisé pour le calcul de la phase par l'estimateur rustique. Il apparaît cependant plus optimal d'exploiter tout le pic, en utilisant une porteuse sur le pic en fonction du rapport Signal sur Bruit. Le choix de cette porteuse reste un degré de liberté important, et afin d'obtenir une fonction de pondération optimale la méthode des Moindres Carrés a été mise en œuvre.

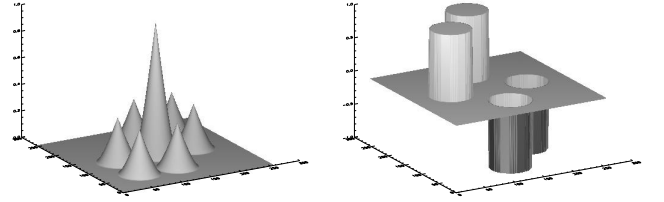


FIG. 3 – Module de la FTO (à gauche) et phase (à droite) pour un TMP à trois pupilles en présence d'un piston sur une pupille.

### 2.2.2 Méthode des Moindres Carrés

Un deuxième estimateur a été obtenu en utilisant l'approche des Moindres Carrés. Notons que dans le cas où le bruit est un pur bruit blanc Gaussien stationnaire, elle s'avère identique à celle du Maximum de Vraisemblance, et les estimées des aberrations  $\{a_{in}\}$  sont alors celles qui maximisent la vraisemblance des données. Le problème consiste en la minimisation du critère  $L$  de distance à l'image  $i$  par rapport aux pistons  $\{a_{n1}\}$ . Soit  $s(x)$  la variance du bruit au point  $x$ , le critère s'écrit :

$$\begin{aligned} L &= \sum_x s(x) |[h \star o](x) - i(x)|^2 \\ &= \sum_\nu \left( \tilde{s} \star |\tilde{h}\tilde{o} - \tilde{i}|^2 \right) (\nu) \text{(th. Parseval)} \\ &= \sum_\nu \text{TF} \left( \text{TF}^{-1} [\tilde{s}] \text{TF}^{-1} \left[ |\tilde{h}\tilde{o} - \tilde{i}|^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Pour des aberrations faibles, le bruit est au premier ordre indépendant des aberrations, car  $i$  reste pratiquement constant, et  $\partial s / \partial a_{1m} = 0$ . Le gradient du critère est alors :

$$\frac{\partial L}{\partial a_{1m}} = \sum_\nu \text{TF} \left( \text{TF}^{-1} [\tilde{s}] \text{TF}^{-1} \left[ (\tilde{h}\tilde{o} - \tilde{i}) \frac{\partial \tilde{h}^*}{\partial a_{1m}} \tilde{o}^* + c.c. \right] \right) \quad (7)$$

Exprimons  $\tilde{h}$  et sa dérivée en fonction de la pupille :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial a_{1m}} = \frac{\partial p}{\partial a_{1m}} \otimes p + p \otimes \frac{\partial p}{\partial a_{1m}} \quad (8)$$

Ce qui donne pour le critère :

$$\frac{\partial L}{\partial a_{1m}} = \sum_{\nu} \text{TF} (\text{TF}^{-1} [\tilde{s}] \text{TF}^{-1} [A + B + A^* + B^*]) \quad (9)$$

avec :

$$A = (\tilde{h}\tilde{o} - \tilde{i})^* \tilde{o} \left[ \frac{\partial p}{\partial a_{1m}} \otimes p \right] \quad (10)$$

$$B = (\tilde{h}\tilde{o} - \tilde{i})^* \tilde{o} \left[ p \otimes \frac{\partial p}{\partial a_{1m}} \right] \quad (11)$$

Or  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{o}$ ,  $\tilde{i}$ ,  $\tilde{h}$  sont des transformées de Fourier de fonctions réelles positives, donc sont Hermitiques. Notons respectivement  $\Re$  et  $\Im$  les opérateurs prise de partie réelle et imaginaire. A l'aide de l'Hermiticité, l'équation (9) se réécrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_{1m}} &= 8\Re \left\{ \sum_{\nu} \Re \{ \tilde{s} \} \star A \right\} \\ &= -8\Im \left\{ \sum_{\nu} \Re \{ \tilde{s} \} \star [(\tilde{h}\tilde{o} - \tilde{i})^* \tilde{o} [p_m \otimes p]] \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

car  $\frac{\partial p}{\partial a_{1m}} = \imath Z_1 p_m = \imath p_m$ ,  $Z_1$  valant l'unité sur toute la pupille. Deux termes apparaissent, dont un dépend de l'image :

$$\begin{aligned} &\Im \left\{ (\tilde{h}\tilde{o} - \tilde{i})^* \tilde{o} [Z_j p_m \otimes p] \right\} \\ &= \Im \left\{ |\tilde{o}|^2 \tilde{h}^* [p_m \otimes p] \right\} - \Im \left\{ \tilde{i}^* \tilde{o} [p_m \otimes p] \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3), exprimons alors  $\tilde{h}^*$  en fonction des pupilles :

$$\begin{aligned} \tilde{h}^* [p_m \otimes p] &= \left( \sum_{n'=1}^{N_T} \sum_{n''=1}^{N_T} [p_m \otimes p_n] \star \delta_{n'n''} \right) \\ &\quad \times \left( \sum_{n=1}^{N_T} [p_m \otimes p_n] \star \delta_{nm} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

La pupille étant supposée diluée, les pics sont non chevauchants dans la FTO. Par conséquent, les seuls pics contribuant au produit sont tels que  $n' = n$  et  $n'' = m$ . Donc :

$$\begin{aligned} &\Im \left\{ |\tilde{o}|^2 \tilde{h}^* [p_m \otimes p] \right\} \quad (15) \\ &= \Im \left\{ |\tilde{o}|^2 \sum_{n''} (p_m \otimes p_{n''})^* (p_m \otimes p_{n''}) \star \delta_{mn''} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Le gradient prend finalement la forme :

$$\frac{\partial L}{\partial a_{mj}} = 8 \sum_n \Im \left\{ \sum_{D_{nm}} \Re \{ \tilde{s} \} \star \tilde{i}^* \tilde{o} (p_m \otimes p_n) \right\} \quad (16)$$

et l'annulation du critère correspond à :

$$\sum_n \text{Arg} \left\{ \sum_{D_{nm}} \Re \{ \tilde{s} \} \star \tilde{i}^* \tilde{o} (p_m \otimes p_n) \right\} = 0 \pmod{\pi} \quad (17)$$

Les équations suivantes sont alors obtenues modulo  $\pi$  :

$$\sum_{n=1}^{N_T} \text{Arg} \left\{ e^{\imath(a_{1m} - a_{1n})} \sum_{D_{nm}} \Re \{ \tilde{s} \} \star \tilde{i}^* \tilde{o} \Lambda \right\} = 0 \quad (18)$$

$$\sum_{n=1}^{N_T} \left( a_{1m} - a_{1n} + \text{Arg} \left\{ \sum_{D_{nm}} \Re \{ \tilde{s} \} \star \tilde{i}^* \tilde{o} \Lambda \right\} \right) = 0 \quad (19)$$

L'estimation de piston est finalement donnée par :

$$a_{1m} = \frac{1}{N_T} \sum_{n=1}^{N_T} \text{Arg} \left\{ \sum_{D_{nm}} \Re \{ \tilde{s} \} \star \tilde{i}^* \tilde{o} \Lambda \right\} \quad (20)$$

Nous constatons que la phase est pondérée par  $\Lambda$  sur le pic, donc par un poids fort au centre du pic où le rapport signal sur bruit est le meilleur, et plus faible au bord où le bruit est plus important. Dans le cas d'un bruit stationnaire de variance constante, et pour un objet ponctuel, l'estimateur MC se comporte comme l'estimateur rustique pondéré :

$$a_{1m} = \frac{1}{N_T} \sum_{n=1}^{N_T} \text{Arg} \left\{ \sum_{D_{nm}} \tilde{i} \Lambda \right\} = 0 \quad (21)$$

### 3 Simulations numériques

Des simulations numériques ont été effectuées afin de comparer les performances des estimateurs rustique, MC, et d'un estimateur fonctionnant par minimisation numérique du critère. La minimisation se fait selon la méthode itérative des gradients conjugués, et est extrêmement coûteuse en temps de calcul. Elle permet de tester la validité de l'expression analytique approchée, qui dans le cas idéal produit les mêmes résultats en temps réel.

L'objet est considéré comme une source ponctuelle de flux total donné, entre  $10^2$  et  $10^8$  photons. La pupille globale choisie pour les simulations est composée de trois pupilles circulaires de même rayon, disposées aux sommets d'un triangle équilatéral (cf Fig. 3). Elle est échantillonnée sur  $128 \times 128$  pixels, et la phase appliquée aux pupilles est la phase nulle.

Une image de  $256 \times 256$  pixels est calculée par FFT à partir de l'objet et de la pupille, de façon à respecter le critère de Shannon. 200 tirages de bruit sont effectués pour chaque image, comportant un bruit de photons Poissonnien et un bruit Gaussien d'écart-type égal à 100 photons par pixel.

L'écart-type et le biais des trois estimateurs sur ces tirages sont présentés sur la figure 4. A très faible flux ( $10^3$  à  $10^4$  photons), l'estimation de piston devient une distribution uniforme entre  $[-\pi, \pi]$ , et le biais et l'écart-type tendent vers des constantes pour les estimateurs rustique et MC. A cause de la présence de minima locaux, la minimisation numérique du critère diverge et son exploitation est impossible.

A faible flux ( $10^4$  à  $10^6$  photons), le bruit Gaussien est dominant. La comparaison des résultats de la minimisation numérique avec ceux de l'estimateur MC confirment que l'approximation analytique est valide.

Par rapport à l'estimateur rustique, une amélioration significative des performances est constatée, de l'ordre d'un facteur 10 en écart-type et biais. A fort flux ( $10^6$  à  $10^8$ ), le bruit de photons devient dominant et la différence entre les estimateurs rustique et MC diminue. Lorsque le flux atteint des valeurs très élevées ( $10^8$  photons et plus), l'image et la FTO sont quasi-identiques. Ce comportement favorise l'estimateur rustique pour lequel le bruit de calcul est moindre par rapport à l'estimateur MC, ou à la méthode itérative de minimisation numérique.

Ces résultats démontrent par conséquent la possibilité d'effectuer à l'aide de l'estimateur MC un cophasage précis ( $10^{-5}$  radians pour  $10^6$  photons par image) à faible coût de calcul.

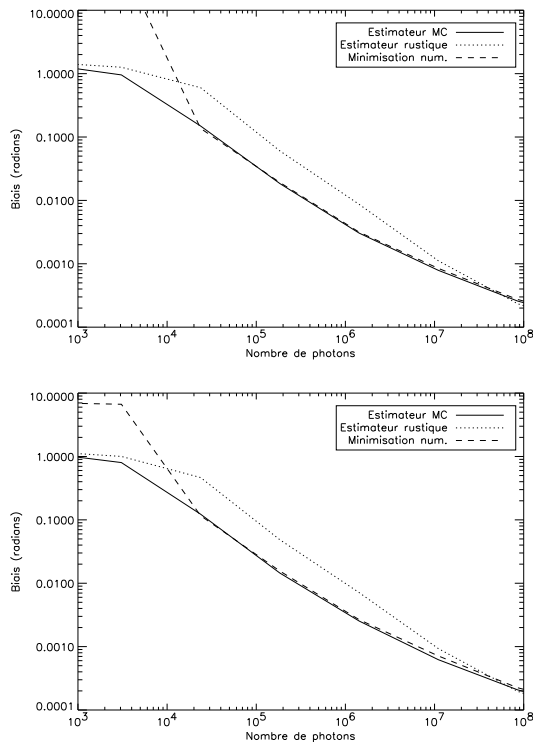


FIG. 4 – Ecart-type et biais en radians en fonction du nombre de photons.

## 4 Conclusion

Les performances de l'estimateur MC permettent d'obtenir un cophasage très satisfaisant. Le coût en temps de calcul est faible et l'implantation en temps réel possible car seules des opérations non-itératives et relativement simples sont mises en œuvre (solution linéaire en  $\tilde{i}$  exceptée la prise d'argument complexe).

Cet estimateur sera employé en tant que module de calibration au sein d'un système de cophasage de TMP fonctionnant sur scène étendue développé à l'ONERA. Par ailleurs son utilisation est prévue pour la mission spatiale DARWIN [9] de recherche de planètes habitables hors du Système Solaire, afin de cophaser les différentes pupilles de l'instrument.

## Références

- [1] <http://sci.esa.int/home/darwin/index.cfm>.
- [2] R. J. Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," *J. Opt. Soc. Am.* **66**, pp. 207–211, Mar. 1976.
- [3] A. Blanc, L. M. Mugnier, and J. Idier, "Estimation des aberrations d'un telescope optique par diversité de phase," in *17ième Colloque sur le Traitement du Signal et des Images*, vol. 1, pp. 63–66, GRETSI, Sept. 1999.
- [4] R. A. Gonsalves, "Small phase solution to the phase retrieval problem," *Opt. Lett.* **26**, pp. 684–685, May 2001.
- [5] R. A. Gonsalves, "Phase retrieval and diversity in adaptive optics," *Optical Engineering* **21**(5), pp. 829–832, 1982.
- [6] R. G. Paxman, T. J. Schulz, and J. R. Fienup, "Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity,"

*Journal of the Optical Society of America A* **9**(7), pp. 1072–1085, 1992.

- [7] F. Cassaing, *Analyse d'un instrument à synthèse d'ouverture optique : méthodes de cophasage et imagerie à haute résolution angulaire*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, Dec. 1997.
- [8] F. Cassaing, L. Mugnier, G. Rousset, and B. Sorrente, "Éléments-clés de la conception d'un instrument spatial à synthèse d'ouverture optique," in *International Conference on Space Optics*, CNES, (Toulouse (France)), Dec. 1997.
- [9] F. Cassaing, F. Baron, E. Schmidt, S. Hofer, L. M. Mugnier, M. Barillot, G. Rousset, T. Stuffer, and Y. Salvadé, "DARWIN Fringe Sensor (DWARF) : Concept study," in *Towards Other Earths*, vol. SP-539, ESA, 2003. Date conférence : Apr. 2003.