

# Une nouvelle méthode de filtrage par approche intégrro-différentielle

Luc KLAINE<sup>1</sup>, Benoit VOZEL<sup>1</sup>, Kacem CHEHDI<sup>1</sup>, Marie-Paule VANDECANDELAERE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Analyse des Systèmes de Traitement de l'Information  
ENSSAT, 6, Rue de Kerampon, B.P. 447, 22305 Lannion Cedex, France

[luc.klaine@enssat.fr](mailto:luc.klaine@enssat.fr), [benoit.vozel@enssat.fr](mailto:benoit.vozel@enssat.fr), [kacem.chehdi@enssat.fr](mailto:kacem.chehdi@enssat.fr),  
[vandecan@enssat.fr](mailto:vandecan@enssat.fr)

**Résumé** – Le problème traité dans cet article est celui d'une image dégradée par un bruit additif. La méthode développée est basée sur une nouvelle formalisation par l'intermédiaire de la résolution d'une équation intégrro-différentielle d'évolution et une amélioration du filtre de Lee itéré. Elle intègre notamment l'estimation locale des supports des statistiques locales intervenant dans l'équation en fonction de la nature des pixels (appartenant aux contours ou aux zones homogènes) conformément aux méthodes anisotropes classiques. L'existence et l'unicité de la solution sont démontrées. L'efficacité de la méthode est testée en simulation et comparée aux filtres éprouvés afin de confirmer les attentes théoriques.

**Abstract** – In this paper, we present a new and original mathematical statement of the filtering problem. We only consider adaptive filtering of an image degraded by an additive noise. The proposed method is stated with an evolution equation of the problem of interest. It achieves an improvement of the efficiency of the well-known iterated Lee filter. Mainly, it incorporates the local determination of the extent used to estimate the different local statistics, we consider in the differential equation. This estimation is carried out differently according to the nature of the processed pixel. An adapted criteria decides if the pixel belongs either to an edge or to an homogeneous zones, following the idea used in the classical anisotropic methods. Then, the existence and the uniqueness of the solution of our proposed differential equation are shown. Its efficiency is assessed in simulation. The results are compared to the well-known filters in order to confirm the theoretical waitings.

## 1 Introduction

Les images numériques sont soumises à des perturbations dues au système ou aux conditions d'acquisition. Ces perturbations engendrent des dégradations qui pénalisent les applications telles que la segmentation, l'analyse et l'interprétation de l'image. Il est donc nécessaire d'effectuer un prétraitement sur l'image dégradée afin de reconstruire au mieux l'image originale. Dans cet article, nous ne considérons que le cas du filtrage, autrement dit la restauration d'une image dégradée par un bruit additif. Si on note  $u_\infty$  l'image originale et  $u_0$  l'image observée de support relativement compact  $\Omega$  alors on modélise cette perturbation par :

$$u_0 = u_\infty + b \quad (1)$$

où  $b$  est un bruit additif décorrélié de  $u_\infty$  tel que  $E[b] = 0$  et  $\text{var } b = \sigma^2$ . Parmi les méthodes éprouvées, on distingue celles optimales, structurelles, adaptatives et plus récemment celles basées sur les équations différentielles. Dans les méthodes optimales, on peut citer le filtre présenté par Lee [7] dont les performances ont été évaluées dans [4]. S'il est considéré comme un filtre performant, celui-ci présente deux défauts majeurs. La solution est obtenue à partir d'un traitement unique, ainsi un pixel mal traité ne peut pas être rectifié ultérieurement. Les statistiques locales sont estimées sur des masques prédéfinis qui ne reflètent pas la configuration locale de l'image. A l'inverse, la plupart des méthodes basées sur des équations différentielles génèrent itérativement une séquence d'images en traitant différemment les pixels de contour des autres [11] [1] [3] [13] [14] [10].

## 2 Rappels sur le filtre de Lee

Afin d'atténuer le bruit additif, Lee propose un filtre optimal complètement déterminé par le gain  $\mathbb{K}$  obtenu en minimisant l'erreur moyenne quadratique :  $\mathbb{T}_{\text{Lee}}[u_0] = E[u_0] +$

$\mathbb{K}(u_0 - E[u_0])$ . Le gain optimal  $\mathbb{K}_{\text{Lee}}^+$  est donné par :

$$\mathbb{K}_{\text{Lee}}^+ \triangleq \max \left\{ 0, 1 - \frac{\text{var } b}{\text{var } u_0} \right\}. \quad (2)$$

Le calcul du gain dépend directement de la variance du bruit (dont l'estimation est donc fondamentale) et de la variance de l'image observée. Pour préserver les contours, le gain doit être calculé localement dans une fenêtre de taille  $R \times R$  centrée sur  $\vec{x}$  le pixel à traiter. Lee utilise huit masques prédéfinis notés  $[M]_{\vec{\xi}}$  et indexés par chaque direction  $\vec{\xi}$  du voisinage 8-connexes  $\mathcal{V}_8$ .

## 3 Formulation intégrro-différentielle du filtre de Lee itéré

### 3.1 Equation d'évolution

Si on note  $E_{\text{loc}}[u, t]$  et  $\text{var}_{\text{loc}}[u, t]$  la moyenne et la variance locales, alors on peut définir le gain local  $\mathbb{K}_{\text{loc}}[u, t]$  par :

$$\mathbb{K}_{\text{loc}}[u, t] \triangleq \left( 1 - \frac{\sigma(t)^2}{\text{var}_{\text{loc}}[u, t]} \right)^+ \quad (3)$$

avec  $(x)^+ = xH(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  où  $H$  est une approximation régulière de la fonction de Heaviside.

**Définition 3.1** On appelle équation d'évolution de Lee itéré l'équation différentielle définie par :

$$\dot{u}(t) + u(t) = \mathbb{P}[u(t), t] \triangleq \left( 1 - \mathbb{K}_{\text{loc}}[u(t), t] \right) E_{\text{loc}}[u(t), t] + \mathbb{K}_{\text{loc}}[u(t), t] u(t) \quad (4)$$

où  $\dot{u}$  est la dérivée de  $u$  par rapport au temps et  $\mathbb{P}[u, t]$  est un opérateur de perturbation de l'identité [6].

Afin de prendre en compte le comportement du bruit au cours du temps, la modélisation suivante est proposée :

**Définition 3.2** Soit  $g \in L^1(\mathbb{R}^+, [0, 1])$  tel que  $\|g\|_{L^1} = 1$  alors le bruit  $b(t)$  potentiellement présent à l'instant  $t$  est donné par

$$b(t) \triangleq b \int_t^{+\infty} g(s) ds.$$

Cela permet d'avoir  $b(0) = b$  à l'instant initial et signifie que à chaque instant on enlève une proportion  $g(s)$  de bruit (par exemple  $g(s) = 2^{-s} \ln(2)$ ). Les statistiques du bruit à l'instant  $t$  sont simplement données par :

$$E[b(t)] = 0 \text{ et } \text{var } b(t) = \sigma(t)^2 = \left( \sigma \int_t^{+\infty} g(s) ds \right)^2. \quad (5)$$

On considère alors la suite de Lee correspondant aux itérations successives du filtre de Lee sur l'image  $u_0$  définie par  $u^{n+1} \triangleq \mathbb{T}_{\text{Lee}}[u^n]$  et  $u^0 \triangleq u_0$ .

**Lemme 3.1** Si on suppose dans un premier temps que le pas de discrétisation temporelle  $\Delta t = 1$  alors on peut mettre la relation de récurrence de la suite de Lee itérée sous la forme :

$$\frac{u^{n+1}(\vec{x}) - u^n(\vec{x})}{\Delta t} = \left( 1 - \mathbb{K}_{\text{loc}}^n(\vec{x}) \right) \left( \widehat{E} \Big|_{\vec{x}+[M]_{\xi_{\text{loc}}^n(\vec{x})}} [u^n] - u^n(\vec{x}) \right) \quad (6)$$

où  $\xi_{\text{loc}}^n(\vec{x})$  est l'indice du masque de Lee et  $\mathbb{K}_{\text{loc}}^n(\vec{x})$  le gain local de l'image  $u^n$  et  $\widehat{E} \Big|_{\vec{x}+[M]_{\xi_{\text{loc}}^n(\vec{x})}} [u]$  l'espérance locale calculée sur le masque de Lee centré en  $\vec{x}$ .

Pour établir la correspondance entre les masques de Lee et le vecteur  $\vec{\xi}$ , il suffit simplement de considérer les points de la fenêtre dont le produit scalaire avec  $\vec{\xi}$  est positif (fig. 1). Si un point est à la frontière de deux zones homogènes séparées par un contour linéaire alors l'image coïncide exactement avec le masque de Lee indexé par la direction opposée au gradient  $\vec{\xi}_{\text{loc}}(\vec{x})$ .

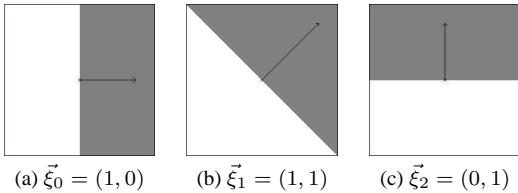


FIG. 1: Exemples de masques de Lee indexés par  $\vec{\xi} \in \mathcal{V}_8$ .

Le lien entre les statistiques continues sur un support relativement compact  $K$  et les statistiques discrètes sur  $[K]$  l'ensemble fini discrétisant le support  $K$  est obtenu en considérant  $\Phi$  la fonction de troncature sur  $K$  comme étant une approximation régulière de la fonction caractéristique de  $K$ . Les moments locaux continus et discrets d'ordre  $k$  sont alors définis par  $M_K^k[u] \triangleq \int_{\Omega} \Phi(\vec{y}) u(\vec{y})^k d\vec{y}$  et  $\widehat{M}_{[K]}^k[u] \triangleq \sum_{\vec{y} \in [K]} u(\vec{y})^k \Delta \vec{x}$

où  $\Delta \vec{x}$  est le pas de discrétisation spatiale. La moyenne et la variance sont ensuite définies de manière classique en normalisant les moments locaux (continus ou discrets) d'ordre 1 et 2 par celui d'ordre 0.

De manière similaire, on peut modéliser les masques adaptatifs locaux à l'aide d'un opérateur  $\Phi[u, t]$  à deux variables  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\Omega$  appelé *noyau des statistiques locales*.  $\Phi[u, t]$  est choisi de manière à être suffisamment régulier et tel que  $\Phi[u, t](\vec{x}, \vec{y})$  vaut 1 si  $\vec{y}$  est un pixel du masque centré en  $\vec{x}$  et 0 dans le cas contraire.

**Lemme 3.2** On peut écrire  $\Phi_{\text{Lee}}[u]$  le noyau des statistiques locales du filtre de Lee par :

$$\Phi_{\text{Lee}}[u](\vec{x}, \vec{y}) = W(\vec{y} - \vec{x}) H \left( -\vec{\nabla} u_{\sigma}(\vec{x}) \cdot (\vec{y} - \vec{x}) \right) \quad (7)$$

avec  $W$  fonction de troncature sur le carré de côté  $R \geq 3$  et  $u_{\sigma} = G_{\sigma} * u$  où  $G_{\sigma}$  est le noyau d'un filtre lissant de type moyenneur ou gaussien.

On constate alors que l'équation (6) correspond à la discrétisation suivant les différences finies de l'équation (4) où les statistiques locales du filtre sont calculées à partir du noyau des statistiques locales  $\Phi_{\text{Lee}}[u]$ .

## 3.2 Estimation locale des supports

L'amélioration proposée ici consiste à estimer de manière plus pertinente les supports des statistiques locales en fonction de la nature des pixels (de contour ou de zone homogène) conformément aux méthodes anisotropes classiques (détectés par seuillage du gradient). Toutefois, l'opération de filtrage est effectuée au travers de l'utilisation d'opérateurs intégraux adaptatifs plutôt que de dérivées spatiales orientées du second ordre.

Le masque du *filtre moyenneur sélectif* défini par Asano et al dans [2] sélectionne les pixels dont le contraste est inférieur à la discontinuité. Par conséquent, ce filtre réhausse correctement les contours mais le lissage peut s'avérer insuffisant dans les zones homogènes, ce qui est généralement confirmé par les tests. Il sera utilisé pour les pixels de contours.

Le masque du *filtre moyenneur adaptatif* décrit par Po-malaza-Raes et al dans [12] [5] ne prend en compte que les pixels dont le contraste est inférieur à un seuil dépendant de la variance du bruit. Le filtre effectue un bon lissage dans les zones homogènes mais introduit parfois quelques distorsions à proximité des contours. Il sera utilisé pour les pixels de zone homogène.

Ces deux filtres sont du type moyenneur : ils fournissent une base pour le calcul des statistiques locales et peuvent être modélisés par des noyaux des statistiques locales  $\Phi_{\text{Sel}}[u]$  et  $\Phi_{\text{Ada}}[u, t]$ . Le principe du filtre consiste à sélectionner localement le filtre le plus adapté, en fonction de la nature du pixel déterminée par l'opérateur de détection de contour  $\Psi_{\text{Edg}}[u]$  (qui vaut 1 sur les contours et 0 sinon) et suivant les propriétés des filtres rappelées ci-dessus. Le basculement entre les deux filtres est modélisé conformément à l'idée introduite par Alvarez et al dans [1] grâce au noyau des statistiques locales  $\Phi_{\text{Tot}}[u, t]$  défini par :

$$\Phi_{\text{Tot}}[u, t](\vec{x}, \vec{y}) \triangleq \Psi_{\text{Edg}}[u](\vec{x}) \Phi_{\text{Sel}}[u](\vec{x}, \vec{y}) + \left( 1 - \Psi_{\text{Edg}}[u](\vec{x}) \right) \Phi_{\text{Ada}}[u, t](\vec{x}, \vec{y}), \quad (8)$$

$\Phi_{\text{Tot}}[u, t]$  est ensuite adapté afin de supprimer les pixels isolés si le nombre de pixels sélectionnés dans la fenêtre de taille  $R \times R$  est inférieur à un seuil conformément au filtre  $2\sigma$  introduit par Lee dans [9].

## 3.3 Étude de l'équation d'évolution

### 3.3.1 Equation intégrale équivalente

Les noyaux des statistiques locales sont définis à partir d'une combinaison d'opérateurs intégraux du type  $T_{\Phi}$  défini par :

$$T_{\Phi}[\vec{a}, \vec{b}, c](\vec{x}) \triangleq \int_{\Omega} \Phi[\vec{a}, \vec{b}](\vec{x}, \vec{y}) c(\vec{y}) d\vec{y}. \quad (9)$$

avec  $\Phi[\vec{a}, \vec{b}](\vec{x}, \vec{y}) \triangleq \Phi(\vec{a}(\vec{x}), \vec{b}(\vec{y}), \vec{x}, \vec{y})$  où  $\Phi : \mathcal{D}(\Phi) = \mathbb{R}^{m+n} \times \Omega^2 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $\vec{b} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  et  $c \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$

Par exemple, si  $\Phi[u] = \Phi_{Lee}[u]$  est le noyau des statistiques locales du filtre de Lee alors le moment local d'ordre  $k$  associé est défini par  $M_{\Phi_x[u]}^k[u] = T_\Phi[\vec{a}, \vec{b}, c](\vec{x})$  où  $\vec{a} = \vec{\nabla}u_\sigma$ ,  $\vec{b} \equiv \vec{0}$  et  $c = u^k$ .

**Théorème 3.1** Si  $\Phi \in C^2 \cap W^{2,\infty}(\mathcal{D}(\Phi), \mathbb{R})$  alors  $T_\Phi \in C^1(\mathcal{D}(T_\Phi), L^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$  et  $T_\Phi$  est lipschitzienne et bornée sur les boules centrées où  $W^{s,p}$  sont les espaces de Sobolev.

Le théorème 3.1 nous assure que la perturbation satisfait aux hypothèses suivantes :

1.  $\mathbb{P} \in C^1(L^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$ ,
2.  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}), [\mathbb{P}[u, t], \overline{\mathbb{P}}[u, t]] \subset [\underline{u}_0, \overline{u}_0]$ ,
3.  $\forall R > 0, \exists M(R)$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall u, v \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ , si  $\|u\|_{L^\infty}, \|v\|_{L^\infty} \leq R$  alors  $\|\mathbb{P}[u, t] - \mathbb{P}[v, t]\|_{L^\infty} \leq M(R)\|u - v\|_{L^\infty}$

où  $\overline{u} = \sup_{\text{ess}} u$  et  $\underline{u} = \inf_{\text{ess}} u$ .

Soit  $X_k(\Omega, \mathbb{R}) = C^0(\mathbb{R}^+, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$  l'espace de Banach muni de la norme  $\|u\|_{X_k} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{-kt} \|u(t)\|_{L^\infty}$ , on définit l'opérateur  $\mathcal{U} : X_k(\Omega, \mathbb{R}) \mapsto X_k(\Omega, \mathbb{R})$  par :

$$\mathcal{U}[u](t) \triangleq e^{-t} \left( u_0 + \int_0^t e^s \mathbb{P}[u(s), s] ds \right). \quad (10)$$

**Proposition 3.1** Trouver une solution de (4) est équivalent à trouver un point fixe de  $\mathcal{U}$ .

### 3.3.2 Existence et unicité de la solution

**Lemme 3.3** Si  $u \in C^1(\mathbb{R}^+, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$  est une solution du problème de la proposition 3.1 alors elle satisfait :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, [\underline{u}(t), \overline{u}(t)] \subset [\underline{u}_0, \overline{u}_0]. \quad (11)$$

#### Preuve

La dérivée de  $\underline{u}(t)$  est positive d'après l'hypothèse 2 donc  $\underline{u}(t)$  est croissante. On en déduit que  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \underline{u}(t) \geq \underline{u}_0$ .  $\square$

**Théorème 3.2** Le problème de la proposition 3.1 admet une unique solution  $u \in C^1(\mathbb{R}^+, L^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$ .

#### Preuve

La démonstration est identique au théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard. On cherche à montrer la convergence d'une suite vers un point fixe où la constante de Lipschitz est obtenue d'après l'hypothèse 3 pour  $R = \|u_0\|_{L^\infty}$  et est indépendante de l'itération grâce au lemme 3.3.  $\square$

## 4 Résultats expérimentaux

Pour effectuer les tests, nous avons choisi l'image réelle [bateau] pour la diversité de son contenu et dont les détails sont très fins. Celle-ci a été dégradée par un bruit additif d'écart-type 10, puis traitée successivement par le filtre de Lee classique [7] (Lee<sup>1</sup>), de Lee itéré (Lee<sup>2</sup>), par variation totale de Rudin et al [13] (TV<sup>1</sup>), par variation totale de Chan et al [3] (TV<sup>2</sup>), de Perona et Malik [11] avec la fonction de conduction  $(1 + (s/k)^2)^{-1}$  (PM) et enfin de Lee itéré et amélioré (Lee<sup>3</sup>). Afin de comparer les performances de ces filtres, les erreurs moyenne absolue (L<sup>2</sup>), moyenne quadratique (L<sup>1</sup>), maximale (L<sup>∞</sup>) ainsi que l'amélioration du signal (SNRI) ont été regroupées dans le tableau (tab. 1). La figure 2 donne une vue globale des résultats des différents filtres appliqués à l'image [bateau]. Dans la figure 3, nous visualisons une partie zoomée de l'image

présentant suffisamment de détails fins pour distinguer localement les effets des filtres.

Les résultats du filtre (Lee<sup>3</sup>) sont globalement les plus intéressants. D'un point de vue subjectif (observation visuelle), les images traitées par le filtre (Lee<sup>3</sup>) semblent de meilleure qualité. Concernant le filtre (Lee<sup>1</sup>), un seul traitement n'est pas suffisant et il reste des résidus notamment à proximité des contours (fig. 3). De plus, l'utilisation de masques prédéfinis dans le filtre engendre également des effets destructeurs (phénomène de mosaïque) ce que l'on retrouve également avec (Lee<sup>2</sup>). Les dérivées spatiales secondes orientées intervenant dans les filtres anisotropes classiques (TV<sup>1</sup>), (TV<sup>2</sup>) et (PM) présentent le même défaut. En effet, les masques prédéfinis ou la direction tangente aux lignes de niveau ne correspondent pas toujours exactement à la structure locale de l'image. Cela se traduit par un lissage parfois trop prononcé à proximité des contours confiné sur les images tests (fig. 2) tandis que l'observation visuelle montre que les textures de la mer et les détails des câbles sont mieux restitués sur l'image issue du filtre (Lee<sup>3</sup>) (fig. 2 et 3). La forme du filtre de Lee repris dans notre modèle permet par l'intermédiaire du gain de limiter les écarts entre le masque local et la configuration locale réelle de l'image. D'un point de vue objectif, les valeurs numériques des critères confirment les remarques précédentes et soulignent l'amélioration significative apportée par notre filtre (tab. 1).

Signalons également que la méthode est relativement simple à mettre en oeuvre, que les temps d'exécution de l'ordre d'une quinzaine de secondes sont légèrement plus longs que pour les méthodes anisotropes classiques à schéma numérique explicite.

Les résultats expérimentaux énoncés ont été confirmés pour différents niveaux de bruit et pour différentes images.

	L <sup>1</sup>	L <sup>2</sup>	L <sup>∞</sup>	SNRI
Lee <sup>1</sup>	5.51971	7.22575	42	3.22608
Lee <sup>2</sup>	5.31592	7.02446	44	3.50861
TV <sup>1</sup>	5.43227	7.36676	77	3.03281
TV <sup>2</sup>	5.58414	7.56124	46	2.77224
PM	5.43625	7.35782	81	3.04496
Lee <sup>3</sup>	<b>4.90152</b>	<b>6.52125</b>	44	<b>4.25193</b>

TAB. 1: Filtrage du bruit sur l'image bateau

## 5 Conclusion

La formalisation originale du filtre de Lee itéré proposée ici conduit à l'écriture d'une équation intégro-différentielle d'évolution pour laquelle on démontre l'existence et l'unicité de la solution. Le filtre obtenu décide localement entre l'application de deux filtres : un filtre moyennneur sélectif bien adapté au traitement des pixels de contours et insuffisant dans les zones homogènes et un filtre moyennneur adaptatif aux effets complémentaires. Le critère de décision entre ces deux filtres est effectué par l'intermédiaire de l'opérateur de détection de contour. L'efficacité de la méthode est vérifiée en simulation par comparaison aux filtres éprouvés de la littérature.

## Références

- [1] L. Alvarez, P.-L. Lions, J.-M. Morel, "Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion (ii)," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 39, No. 3, pp. 845-866, June 1992.

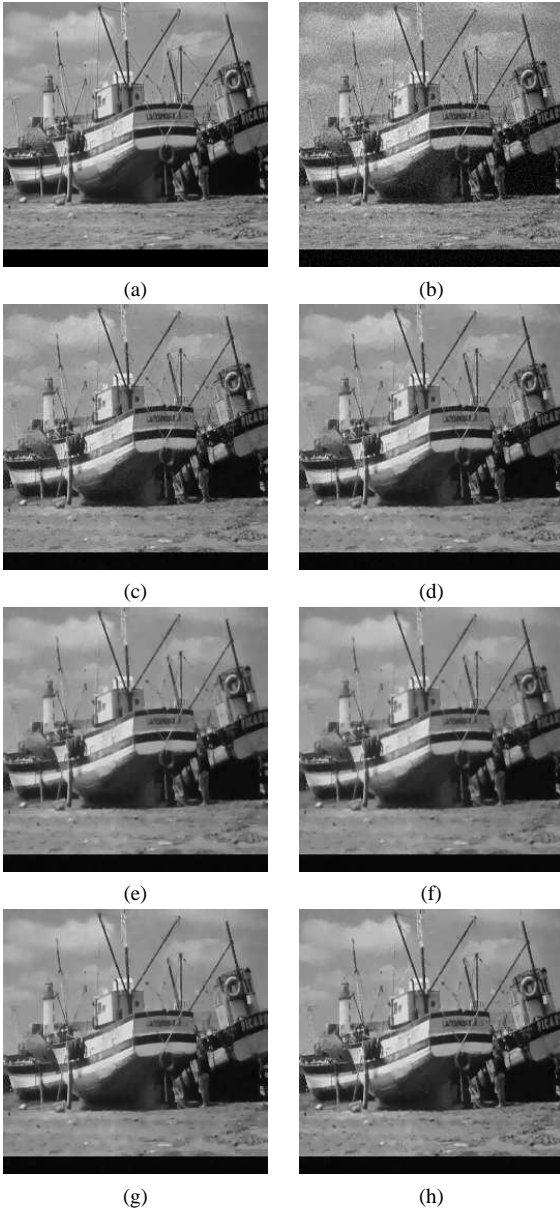


FIG. 2: Filtrage du bruit sur l'image [bateau]: (a) image originale, (b) image bruitée, (c) (Lee<sup>1</sup>), (d) (Lee<sup>2</sup>), (e) (TV<sup>1</sup>), (f) (TV<sup>2</sup>), (g) (PM), (h) (Lee<sup>3</sup>)

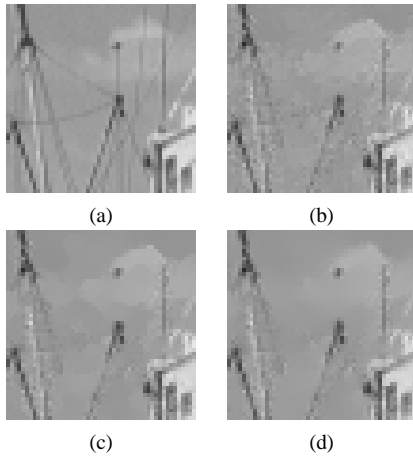


FIG. 3: Filtrage du bruit sur l'image [bateau]: (a) image originale, (b) (Lee<sup>1</sup>), (c) (Lee<sup>2</sup>), (d) (Lee<sup>3</sup>)

- [2] T. Asano, N. Yokoga, "Image segmentation scheme for low level computer vision," *Pattern Recognition*, 1981.
- [3] T. F. Chan and S. Osher and J. Shen, "The Digital TV Filter and nonlinear denoising," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 10, No. 2, pp. 231-241, Febr. 2001.
- [4] K. Chehdi, B. Vozel, C. Kermad, V. Piturescu, "Système aveugle de filtrage d'images numériques," *GRETSI 99*, Vannes, 13-17 Septembre 1999.
- [5] Y. S. Fong, C. A. Pomalaza-Raes, X. H. Wang, "Comparaison Study of Nonlinear Filters in Image Processing Applications," *Optical Engineering*, Vol. 28, No. 7, pp. 749-760, 1989.
- [6] T. Kato, "Perturbation Theory for Linear Operators," *Springer-Verlag, Classics in Mathematics*, 1976.
- [7] J. S. Lee, "Digital Image Enhancement and Noise Filtering by Use of Local Statistics," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intel.*, Vol. PAMI-2, No. 2, pp. 165-168, March 1980.
- [8] J. S. Lee, "Refined Filtering of Image Noise using Local Statistics," *Computer Graphics and Image Processing*, Vol. 15, pp. 380-389, 1981.
- [9] J. S. Lee, "Digital Image Smoothing and the Sigma Filter," *Computer Graphics and Image Processing*, No. 24, pp. 259-269, 1983.
- [10] A. Marquina, S. Osher, "A new time dependant model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal," *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1682, pp. 429-434, 1999.
- [11] P. Perona, J. Malik, "Scale space and edge detection using anisotropic diffusion," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intel.*, Vol. 12, No. 7, pp. 629-639, 1990.
- [12] C. A. Pomalaza-Raes, C. D. McGillem, "An Adaptive Nonlinear Edge Preserving Filter," *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, ASSP*, Vol. 32, No. 3, pp. 571-576, 1984.
- [13] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D*, Vol. 60, pp. 259-268, 1992.
- [14] J. Weickert, B. M. ter Haar Romeny, M. A. Viergever "Efficient and reliable Schemes for nonlinear diffusion filtering," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 7, No. 3, pp. 398-410, March 1998.