

# Segmentation non supervisée des images par arbres de Markov couple.

E. MONFRINI<sup>1</sup> et W. PIECZYNSKI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ISFA, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 Bd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne.

<sup>2</sup> GET/INT Dépt. CITI, CNRS UMR 5157, 9, rue Charles Fourier, 91000 Evry.

[monfrini@univ-lyon1.fr](mailto:monfrini@univ-lyon1.fr), [Wojciech.Pieczynski@int-evry.fr](mailto:Wojciech.Pieczynski@int-evry.fr)

**Résumé** – Nous traitons dans cet article de la segmentation statistique non supervisée d’images de synthèse en utilisant le modèle récent des arbres de Markov couple. L’objectif de cet article est de montrer que la stricte généralisation du modèle des arbres de Markov cachés apporte, notamment dans le cas non supervisé où un algorithme original de type ICE est proposé, un gain appréciable au niveau de la qualité de la segmentation. Les exemples traités montrent en effet que le modèle des diarbres de Markov couple permet d’améliorer les résultats obtenus pour les diarbres de Markov cachés.

**Abstract** – We are here interested in applying the recent pairwise Markov tree model to the unsupervised segmentation of noisy synthetic pictures. In fact we theoretically know that the pairwise model strictly generalizes the classical hidden Markov tree one. We propose an original application of the ICE algorithm to estimate the parameters of the pairwise Markov ditree model and show, via simulations, that the results of the restorations based on pairwise model improve the results obtained with the classical one.

## 1. Introduction.

La problématique de la segmentation statistique d’images est la suivante : on considère deux processus aléatoires  $X = (X_s)_{s \in S}$  et  $Y = (Y_s)_{s \in S}$ , où  $S$  est l’ensemble des pixels.  $X_s$  est à valeurs dans un ensemble fini de classes  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  et chaque  $Y_s$  est à valeurs dans  $R$ . Il s’agit d’estimer la réalisation inobservable  $x$  de  $X$  à partir de l’observation  $y$  de  $Y$ .

Pour cela, on choisit généralement de modéliser le processus caché  $X$  sous forme markovienne (champs, chaînes ou arbres de Markov) et de restreindre la famille des lois de  $Y$  conditionnelle à  $X$  qui modélisent le bruit, de façon à ce que la loi de  $X$  conditionnelle à  $Y$  soit encore markovienne (de tels modèles sont dits modèles de Markov cachés). Il devient alors possible d’appliquer les méthodes bayésiennes d’estimation MPM ou MAP. Les modèles de Markov cachés qui ont fait leurs preuves sont depuis peu généralisés aux modèles de Markov couple (champs [9], chaînes [1,8] et arbres [7]), pour lesquels la modélisation du bruit et surtout des textures est moins limitative. En effet, la markoviannité du couple  $Z = (X, Y)$  assure la markoviannité *a posteriori* de  $X$ , sans restriction supplémentaire sur les lois de  $Y$  conditionnelles à  $X$ .

Nous proposons dans ce travail une application originale de l’algorithme général Iterative Conditional Estimation (ICE) dans le cas particulier où  $Z$ , Arbre de Markov Couple (AMC couple), coïncide avec un  $X$  arbre de Markov caché (AMC), ce qui n’est pas nécessairement le cas. Le choix de

ce type de modèle à la limite entre les AMC et les AMC couple permet d’illustrer par l’exemple la stricte généralisation de AMC par les AMC couple.

## 2. Arbres de Markov couple.

### 2.1 Présentation du modèle

Soit  $X = (X_s)_{s \in S}$ , le processus des classes et  $Y = (Y_s)_{s \in S}$  la variable observable. Soit  $S^1, \dots, S^n$  une partition de  $S$  représentant les différentes « générations » du processus sur arbre. A chaque  $s \in S^i$ ,  $i < n$ , correspond  $s^+ \subset S^{i+1}$  appelé l’ensemble des « enfants » de  $s$ ; les ensembles des enfants des éléments de  $S^i$  forment une partition de  $S^{i+1}$ . Par ailleurs, on suppose que  $S^1$  admet un seul élément appelé « racine »; on note par  $s^{++}$  l’ensemble de tous les descendants de  $s$ , et par  $s^-$  son unique « père ».

Le processus  $X$  est un arbre de Markov si sa loi est donnée par :

$$p(x) = p(x_1) \prod_{s \in S - S^n} \prod_{t \in s^+} p(x_t | x_s). \quad (1)$$

En supposant les variables  $(Y_s)$  indépendantes conditionnellement à  $X$  et  $p(y_s | x) = p(y_s | x_s)$ , la loi  $p(x, y)$  du couple  $(X, Y)$  s’écrit :

$$p(x, y) = p(x_{s^1}) p(y_{s^1} | x_{s^1}) \prod_{s \in S - S^n} \prod_{t \in s^+} p(x_t | x_s) p(y_t | x_t). \quad (2)$$

On montre alors que la loi de  $X$  a posteriori reste une loi d'arbre de Markov. De plus, les transitions « père-fils » a posteriori sont calculables ainsi que les solutions explicites des décisions Bayésiennes MPM et MAP [3, 10].

Notons que les observations  $Y_t$  peuvent exister pour certains  $t$  et ne pas exister pour d'autres. Pour les  $t$  « sans observation » on pose  $p(y_t|x_t)=1$  et la formule (2) reste valable. Nous nous trouvons ainsi en présence d'un modèle capable de modéliser un grand nombre de situations en imagerie. En particulier, il peut être appliqué à la segmentation d'images, aussi bien mono-capteur que multi-capteur et multi-résolution [3, 10].

L'arbre de Markov Couple est obtenu en considérant que la structure (1) est vérifiée par le processus couple  $Z = (Z_s)_{s \in S}$ , avec  $Z_s = (X_s, Y_s)$  :

$$p(z) = p(z_1) \prod_{s \in S-S^n} \prod_{t \in s^+} p(z_t|z_s). \quad (3)$$

On montre alors qu'un tel modèle est strictement plus général que le modèle AMC défini par (1) et (2), tout en autorisant des traitements bayésiens (MPM, MAP) similaires [7].

Cette plus grande généralité apparaît également au niveau des transitions « père-fils » : dans le modèle classique nous avons :

$$p(z_t|z_s) = p(x_t, y_t|x_s, y_s) = p(x_t, y_t|x_s) = p(y_t|x_t)p(x_t|x_s),$$

et dans le modèle général nous avons :

$$p(z_t|z_s) = p(x_t, y_t|x_s, y_s) = p(y_t|x_t, x_s, y_s)p(x_t|x_s, y_s). \quad (4)$$

Ainsi nous constatons que:

(i)  $p(y_t|x_t, x_s, y_s)$  peut être exploitée dans AMCCouple et cette expression devient  $p(y_t|x_t)$  dans AMC classique. Nous montrons par le biais des simulations que cette simplification peut s'avérer forte dans certaines situations et la perte de précision impliquée peut influencer sur la qualité des segmentations bayésiennes.

(ii)  $p(x_t|x_s, y_s)$  peut être exploitée dans AMCCouple et cette expression devient  $p(x_t|x_s)$  dans AMC classique, ce qui constitue une nouvelle perte d'information qui ne sera pas discutée ici.

## 2.2 Diarbres de Markov évolutifs-couple.

Le type d'arbre de Markov caché que nous allons prendre comme référence et que nous allons étendre au modèle couple est le diarbre de Markov caché (dAMC) évolutif [4]. Ce type d'arbre qui « concentre » progressivement l'information est moins brutal dans ces transitions à deux fils que le quadarbre, tout en conservant les propriétés de rapidité des algorithmes qu'il induit. Nous choisissons de travailler avec un diarbre droit et nous n'aurons d'observation qu'à la résolution la plus fine.

Pour définir le diarbre de Markov couple (dAMCCouple),  $Z$ , que nous prenons aussi avec des transitions droites, il est nécessaire de préciser les quantités  $p(x_t|x_s, y_s)$  et  $p(y_t|x_t, x_s, y_s)$  de (4) qui diffèrent du modèle habituel.

D'après [7],  $Z$  est un diarbre de Markov avec  $X$  vérifiant (1) si et seulement si pour tout  $s \in S-S^n$  et  $t \in s^+$ ,  $p(x_t|x_s, y_s) = p(x_t|x_s)$ . Nous conservons donc le modèle de probabilité de transition « père-fils » évolutif de [4] et l'aspect « couple » du modèle sera entièrement porté par les  $p(y_t|x_t, x_s, y_s)$ . Comme nous avons fait le choix d'une étude mono-résolution, pour tout  $t$  n'appartenant pas aux deux résolutions les plus fines, nous choisirons, comme pour le modèle classique  $p(y_t|x_t, x_s, y_s) = 1$ . Pour les deux résolutions les plus fines nous choisissons :

$$\forall s \in S^{n-2}, \forall t \in s^+,$$

$$p(y_t|x_t, x_s, y_s) = p(y_t|x_t) = N(\mu_{n-1}(x_t), \sigma_{n-1}^2(x_t)),$$

$$\text{et } \forall s \in S^{n-1}, \forall t \in s^+,$$

$$p(y_t|x_t, x_s, y_s) = N(\mu_n(x_t) - y_s + \mu_{n-1}(x_s), \sigma_n^2(x_t)).$$

Ce choix de paramétrisation du bruit permet de modéliser de manière plus complète le bruitage du couple « père-fils ». De plus, il permet d'introduire une corrélation entre deux frères de la résolution la plus fine. En effet, si les deux frères sont associés à une même classe  $\omega_i$ , leur covariance sera  $\sigma_{n-1}^2(\omega_i)$  et s'ils sont associés à deux classes différentes  $\omega_i$  et  $\omega_j$ , leur covariance sera  $\sigma_{n-1}(\omega_i)\sigma_{n-1}(\omega_j)$ . Notons dès maintenant que le cas du diarbre de Markov caché classique peut être assimilé au cas particulier où les variances des bruits de la résolution  $n-1$  sont « nulles » dans le sens où l'on associerait comme observation à cette résolution l'image non bruitée des classes. La généralisation du modèle AMC est alors évidente.

Le calcul des probabilités de transition a posteriori  $p^{y=y}(x_t|x_s)$  nécessaires au calcul du MPM se fait alors grâce aux probabilités « backward »  $\beta(x_s) = p(y_{s^+}|z_s)$ , calculables de façon récursive, par les formules :

$$\beta(x_s) = 1, \text{ si } s \in S^n,$$

$$\beta(x_s) = \prod_{t \in s^+} \left( \sum_{x_t \in \Omega} \beta(x_t) p(z_t|z_s) \right) \text{ sinon,}$$

$$\text{et } p^{y=y}(x_t|x_s) = \frac{\beta(x_s) p(z_s|z_{s^-})}{\sum_{\omega_s \in \Omega} \beta(\omega_s) p(\omega_s, y_s|z_{s^-})}, \forall s \in S-S^1.$$

Les probabilités « backward » sont ainsi calculées lors d'une passe « montante », et les probabilités de transition à posteriori lors d'une passe « descendante ».

### 2.3 Estimation de paramètres.

Lorsque l'on s'intéresse à la segmentation non supervisée d'images, on doit estimer les paramètres du modèles à partir des seules observations  $Y=y$  qui se résument ici à  $Y_{S^n} = y_{S^n}$ . La difficulté supplémentaire à laquelle on se trouve confronté dans l'adaptation de la méthode générale ICE [6] aux dAMCouple est qu'il faut « reconstituer » l'observation associée à la résolution  $n-1$ . Ceci n'est possible que si les informations concernant les paramètres du bruit à cette résolution ( $\forall \omega \in \Omega, \mu_{n-1}(\omega)$  et  $\sigma_{n-1}^2(\omega)$ ) sont entièrement contenus dans  $Y_{S^n} = y_{S^n}$ , ce qui est le cas. En effet, on peut, sans perte de généralité, considérer que les moyennes des distributions bruitantes sont identiques sur une même classe aux deux résolutions les plus fines ( $\forall \omega_i \in \Omega, \mu_{n-1}(\omega_i) = \mu_n(\omega_i)$ ), et comme nous l'avons signalé précédemment, les variances de la résolution  $n-1$  sont déductibles des covariances entre les frères de la résolution  $n$  (par exemple,  $\forall \omega_i \in \Omega, \sigma_{n-1}^2(\omega_i) = \text{cov}_n(\omega_i, \omega_i)$ ). La possibilité de simuler cette observation « manquante » grâce aux paramètres estimés par la procédure ICE naturellement induite sur les dAMCouple, permet donc de faire intervenir les corrélations entre les frères lors de la phase de classification.

### 3. Exemples

Les exemples qui suivent sont des applications directes de la segmentation non supervisée d'images grâce aux AMC et aux AMCouple. Plus précisément, il s'agit de modèles de dAMC évolutifs [4] et de dAMCouple évolutifs appliqués à des images de synthèse de taille 128x128 pixels. Ces exemples permettent d'illustrer les différences entre les deux modèles. Le cas de la lettre « B » (FIG. 1) bruitée de façon gaussienne classique (différence des moyennes égale à 2 et les deux variances égales à 1, les deux distributions étant indépendantes), permet de comparer les performances de deux modèles sur un exemple pour lequel les AMC ont fait leurs preuves. Il montre les résultats comparables au niveau de l'erreur commise, obtenus pour les deux modèles. Il met aussi en évidence la moindre sensibilité des AMCouple vis-à-vis des effets de bloc.

La vérité terrain représentant la cible (FIG. 2) est bruitée par un bruit corrélé obtenu en bruitant la vérité terrain à la résolution  $n-1$  avec le bruit gaussien précédent, et en « propageant » ce bruit à la résolution  $n$  en suivant le modèle des arbres de Markov couples. Notons que cette segmentation est effectuée en exploitant l'observation fabriquée à la résolution  $n-1$  pour la création de l'observation. Cette image dont les formes arrondies ne favorisent pas, a priori les modèles AMC, permet de confirmer la robustesse des AMCouple par rapport aux problèmes

d'effets de bloc. Elle permet surtout de mettre en évidence la supériorité du modèle couple pour ce type de bruitage.

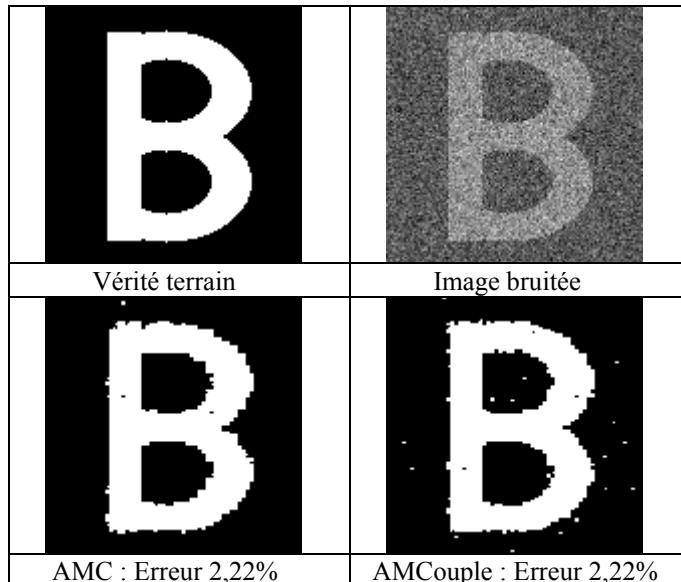


FIG. 1 : Segmentations non supervisées d'une image bruitée selon AMC.

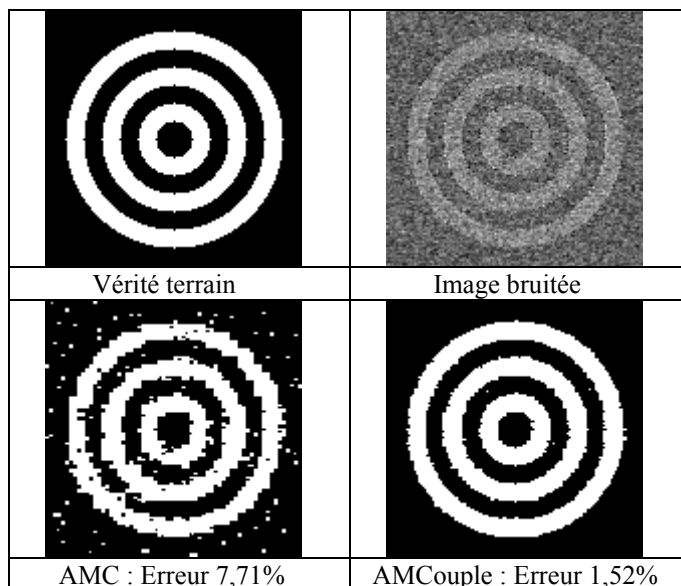


FIG. 2 : Segmentations non supervisées d'une image bruitée selon AMCouple.

Le dernier exemple est obtenu à partir de la vérité terrain bruitée avec le bruit gaussien utilisé pour la lettre « B », que l'on rend « floue » en appliquant un filtre moyenne mobile sur les lignes (FIG. 3).

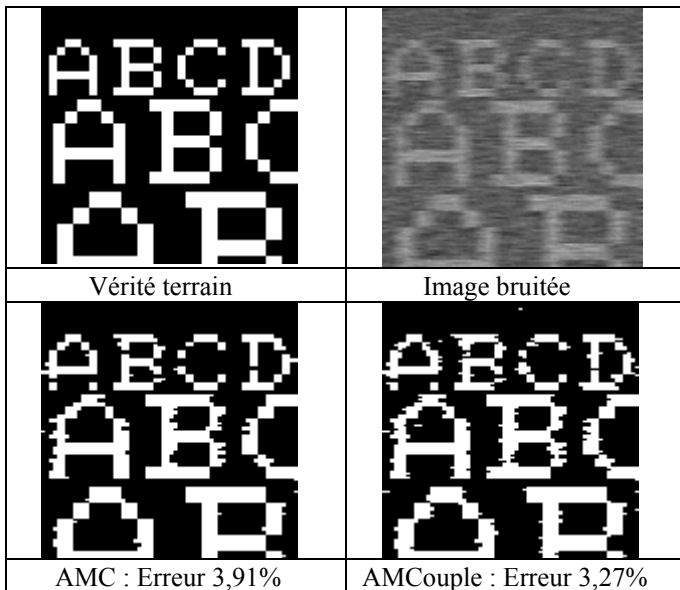


FIG. 3 : Segmentations non supervisées d'une image avec bruit corrélé.

Notons que l'on ne dispose pas, ici de l'observation à la résolution  $n-1$  qui doit être reconstituée. Les AMCouple permettent, là encore, d'améliorer les résultats pourtant très probants obtenus avec les AMC.

#### 4. Conclusion.

Nous avons présenté dans cet article quelques résultats illustrant l'intérêt que peuvent présenter, en segmentation statistique non supervisée d'images, les modèles par arbres de Markov Couple. Ces modèles autorisent une meilleure prise en compte des différentes corrélations du bruit, lesquelles ne peuvent être correctement modélisées dans les démarches classiques, où les variables ( $Y_s$ ) sont supposées indépendantes conditionnellement à  $X$ . Nous avons constaté, à partir des simulations, que les possibilités de modélisation des textures offertes par les AMCouple rendent ce modèle plus flexible que AMC. Par ailleurs, l'allongement de la durée du temps de calcul entre AMC et AMCouple, qui est de l'ordre de 10%, ne justifie pas que l'on se prive du gain de précision apporté par les AMCouple.

Il est à noter, de plus, que le modèle développé ici n'exploite pas l'ensemble des complexifications du modèle AMC que permet AMCouple. En effet, nous avons choisi, d'une part, de nous restreindre au cas  $p(x_t|x_s, y_s) = p(x_t|x_s)$  pour tout  $s \in S - S^n$  et  $t \in S^+$ , et nous n'avons considéré que les distributions modélisant le bruit,  $p(y_t|x_t, x_s, y_s)$ , ne dépendaient effectivement des résolutions précédentes qu'à la résolution la plus fine. Ainsi une exploitation plus complète du modèle AMCouple pourrait éventuellement apporter de nouvelles améliorations de l'efficacité des méthodes de segmentation d'images utilisant ce type de modélisation.

Notons également la possibilité de conception des modèles Couple « mixtes », où la résolution la plus grossière serait modélisée par un champs de Markov couple [9], et les autres résolutions par des AMCouple, ce qui généraliserait les modèles de Markov cachés mixtes proposés dans [2]. Ces derniers visent à remédier aux « effets de bloc » pouvant apparaître dans les arbres. Ces effets sont dus au fait que la loi de  $(X_s, X_t)$ , pour  $s, t \in S^n$ , est dépendante du lien de parenté entre  $s$  et  $t$  (père commun, grand père commun et père différent, arrière grand père commun et grand père différent, ...). Pour des différences de résolution de deux ou trois ( $X_{S^{n-2}}$ , ou  $X_{S^{n-3}}$  est un champ de Markov), ces modèles peuvent atténuer les effets de blocs tout en gardant des temps de calcul très compétitifs par rapport à ceux nécessaires à l'utilisant des champs de Markov [2, 5]. Le fait d'introduire des modèles couple mixte devrait pouvoir améliorer encore ce modèle en ajoutant davantage de souplesse pour éviter les effets de blocs.

#### Références

- [1] S. Derrode and W. Pieczynski, SAR image segmentation using generalized Pairwise Markov Chains, *Proceedings of SPIE's International Symposium on Remote Sensing*, September 22-27, Crete, Greece, 2002.
- [2] L. Hubert-Moy, A. Cotonnec, L. Le Du, A. Chardin, P. Pérez., A comparison of parametric classification procedures of remotely sensed data applied on different landscape units. *Remote Sensing Environment*, Vol. 75, No. 2, pp. 174-187, 2001.
- [3] J.-M. Laferté, P. Pérez, and F. Heitz, Discrete Markov image and inference on the quadtree, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 9, No 3, pp. 390 - 404, 2000.
- [4] E. Monfrini, T. Ledru, E. Vaie, W. Pieczynski, Segmentation non supervisée d'images par arbres de Markov cachés, Actes du 17ème Colloque GRETSI, GRETSI'99, 13-17 septembre 1999, Vannes, France, pp. 43-46.
- [5] P. Pérez, A. Chardin and J.-M. Laferté, Noniterative manipulation of discrete energy-based models for image analysis, *Pattern Recognition*, Vol. 33, Issue 4, pp. 573-586, 2000.
- [6] W. Pieczynski, Champs de Markov cachés et estimation conditionnelle itérative, *Traitement du Signal*, Vol. 11, No. 2, pp. 141-153, 1994.
- [7] W. Pieczynski, Arbres de Markov Couple, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Mathématiques*, Paris, Ser. I 335, pp. 79-82, 2002.
- [8] W. Pieczynski, Pairwise Markov chains, *IEEE Trans. on PAMI*, Vol. 25, No. 5, pp. 634-639.
- [9] W. Pieczynski and A.-N. Tebbache, *Pairwise Markov random fields and segmentation of textured images*, *Machine Graphics and Vision*, Vol. 9, No. 3, pp. 705-718, 2000.
- [10] A. S. Willsky, Multiresolution Markov models for signal and image processing, *Proceedings of IEEE*, Vol. 90, No. 8, pp. 1396-1458, 2002.