

# Etude théorique d'un estimateur de cohérence entre signaux périodiques bruités

Régine LE BOUQUIN JEANNES<sup>1</sup>, Gérard FAUCON<sup>1</sup>, Jean-Pierre CONZE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image

Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

<sup>2</sup>Institut de Recherche Mathématique de Rennes

Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

Regine.Le-Bouquin-Jeannes@univ-rennes1.fr

**Résumé** – Ce papier traite de l'analyse d'un outil de cohérence pour l'étude de relations entre voies dans le contexte de potentiels évoqués auditifs et plus particulièrement de l'étude statistique d'un estimateur de cohérence appliqué à des signaux présentant un caractère périodique. Un certain nombre de réponses individuelles sont disponibles, suite à l'émission d'un stimulus sonore envoyé périodiquement. Pour un nombre suffisant de ces réponses, on peut définir un estimateur de la cohérence. Sous certaines hypothèses, on établit une expression simplifiée de cette quantité et on étudie sa distribution et sa valeur moyenne. Les résultats montrent une adéquation entre l'étude théorique et les données obtenues par simulation.

**Abstract** – This paper deals with the coherence function in order to study relations between channels, in the context of auditory evoked potentials, and more specifically with the statistical analysis of a coherence estimator applied to signals having periodicity. In practice, a periodical stimulus is sent and a sufficient number of individual responses are recorded to increase the signal-to-noise ratio. In this way, a coherence estimator can be defined. Under some hypotheses, we get a simplified version of this quantity and we study its distribution and its mean. Simulations validate theoretical results.

## 1. Contexte

En génie biologique et médical, la compréhension du fonctionnement de certaines structures cérébrales passe par l'analyse de réponses, dites potentiels évoqués, à des stimuli sonores, visuels ou autres. Notre contexte est celui de l'audition, l'objectif étant une meilleure compréhension du système cortical auditif par le biais de potentiels évoqués auditifs, enregistrés à la surface du scalp ou en profondeur (pour des patients devant subir une intervention chirurgicale) par un certain nombre d'électrodes. On cherche ainsi à caractériser les signaux reçus selon l'emplacement où ils sont recueillis et suivant le stimulus. Au signal utile induit par le stimulus se superposent des signaux "parasites" tels que l'électroencéphalogramme ou d'autres signaux physiologiques. Le signal utile est noyé dans le bruit et il faut procéder systématiquement à l'adressage d'un grand nombre de stimuli identiques et à l'addition de toutes les réponses individuelles synchronisées pour obtenir un potentiel évoqué moyen (ou réponse moyenne) présentant un rapport signal à bruit augmenté par rapport à un potentiel évoqué individuel (ou réponse brute).

## 2. Rappels

Si l'analyse des signaux moyens recueillis sur chaque électrode (ou chaque plot d'une électrode dans le cas d'enregistrements stéréoelectroencéphalographiques) peut fournir des résultats intéressants pour la compréhension du fonctionnement des structures concernées, l'étude des

relations entre voies se révèle également être une aide précieuse. Différents outils, paramétriques ou non, permettent de connaître le degré de relation entre voies et de détecter certains changements d'activité. L'outil considéré ici est la cohérence, grandeur fonction de la fréquence, dont nous rappelons l'écriture. Soient  $\{x_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , les signaux temporels recueillis sur  $M$  voies. Si l'on suppose ces signaux conjointement stationnaires, la cohérence ordinaire entre les signaux  $x_i$  et  $x_j$ ,  $i \neq j$ , est une mesure permettant d'évaluer leur degré de liaison linéaire, définie par [1] :

$$\rho_{ij}(f) = \frac{\gamma_{x_i x_j}(f)}{\sqrt{\gamma_{x_i x_i}(f) \gamma_{x_j x_j}(f)}} \quad (1)$$

où  $\gamma_{x_i x_i}(f)$ ,  $\gamma_{x_j x_j}(f)$  et  $\gamma_{x_i x_j}(f)$  représentent respectivement les densités spectrales de puissance de  $x_i$ ,  $x_j$  et la densité interspectrale entre  $x_i$  et  $x_j$ , à la fréquence  $f$ .

## 3. Estimateurs

Dans le cas classique de signaux aléatoires (sans caractère périodique intrinsèque), le calcul pratique de la cohérence se fait sur une durée en relation avec leur non-stationnarité, et chaque densité spectrale est calculée par un moyennage d'informations fréquentielles sur un nombre donné de tranches temporelles, celles-ci étant adjacentes ou se recouvrant à un taux donné. Dans le cas de réponses évoquées assimilables à des signaux périodiques bruités, les relations entre signaux

peuvent varier sur la durée des réponses, ce qui oblige à estimer la cohérence à différents instants.

Dans l'étude des potentiels évoqués auditifs, un même stimulus sonore est envoyé  $L$  fois. Sur chaque voie  $i$ , on récupère  $L$  réponses individuelles à ce stimulus,  $x_{i,\ell}(n)$ ,  $\ell=1,\dots,L$ , où  $x_{i,\ell}(n)$  représente la suite d'échantillons temporels obtenus par échantillonnage à la fréquence  $f_e$ . Chacune d'elles est découpée en blocs (*i.e.* tranches temporelles) d'indice  $k$ , chaque bloc étant constitué de  $N$  échantillons. La cohérence  $\hat{\rho}_{ij,k}(f)$  calculée entre les signaux relevés sur les voies  $i$  et  $j$ , au bloc  $k$ , est alors estimée à partir des  $L$  réponses par la quantité :

$$\hat{\rho}_{ij,k}(f) = \frac{\sum_{\ell=1}^L X_{i,k,\ell}(f) X_{j,k,\ell}^*(f)}{\left( \sum_{\ell=1}^L |X_{i,k,\ell}(f)|^2 \sum_{\ell=1}^L |X_{j,k,\ell}(f)|^2 \right)^{1/2}} \quad (2)$$

où  $X_{i,k,\ell}(f)$  représente la transformée de Fourier à  $N$  points de la  $\ell^{\text{ème}}$  réponse de la voie  $i$ , calculée sur le bloc  $k$  et le symbole \* dénote l'opération de conjugaison. Dans la suite de ce papier, on considérera la seule cohérence entre deux signaux  $x_1(n)$  et  $x_2(n)$ , et l'on supposera qu'une réponse individuelle est constituée d'un seul bloc de manière à s'affranchir des indices  $i$ ,  $j$  et  $k$ , et l'on écrira :

$$\hat{\rho}(f) = \frac{\sum_{\ell=1}^L X_{1,\ell}(f) X_{2,\ell}^*(f)}{\left( \sum_{\ell=1}^L |X_{1,\ell}(f)|^2 \sum_{\ell=1}^L |X_{2,\ell}(f)|^2 \right)^{1/2}} \quad (3)$$

## 4. Etude statistique

### 4.1 Cas de signaux non répétitifs

On suppose que, dans chaque réponse temporelle individuelle recueillie sur la voie  $i$ , les signaux sont de la forme  $x_{i,\ell}(n) = s_\ell(n) + b_{i,\ell}(n)$ ,  $i=1,2$ , où  $s_\ell(n)$  représente le signal utile sur la  $\ell^{\text{ème}}$  réponse, identique sur les deux voies et  $b_{i,\ell}(n)$  représente le bruit sur la  $\ell^{\text{ème}}$  réponse de la voie  $i$ . Les grandeurs  $s_\ell(n)$ ,  $b_{1,\ell}(n)$ ,  $b_{2,\ell}(n)$  sont supposées décorréelées. Dans le cas où ces grandeurs sont des bruits stationnaires, blancs, gaussiens, de moyenne nulle, la cohérence est constante quelle que soit la fréquence et s'écrit alors :

$$\rho = \frac{\sigma_s^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_b^2)} \quad (4)$$

où  $\sigma_s^2$  est la variance du signal,  $\sigma_b^2$  celle des bruits (choisie identique pour les deux bruits). Ainsi, à partir d'un modèle simple générant les observations  $x_{1,\ell}$  et  $x_{2,\ell}$ ,  $\ell=1,\dots,L$ , on peut fixer les variances du signal et des bruits pour obtenir une cohérence donnée dénommée ensuite cohérence de référence.

Les seuls résultats statistiques sur la fonction de cohérence parus à ce jour dans la littérature concernent les signaux aléatoires non répétitifs [2] et pour juger des performances de notre estimateur sur des signaux présentant des composantes périodiques, nous avons conduit une étude statistique dans ce cadre.

### 4.2 Cas de signaux répétitifs

Dans cette étude, on suppose que la réponse utile à un stimulus donné est toujours la même – et identique sur les deux voies – et notée  $s(n)$ .

Dans ce cadre, des simulations ont été conduites pour mesurer la valeur moyenne de l'estimateur donné en (3). Ces grandeurs peuvent être évaluées expérimentalement pour différentes valeurs de  $L$  et de cohérence de référence données. Les simulations sont faites sur des réponses individuelles de 256 échantillons pondérées par une fenêtre de Hamming et les spectres sont estimés par transformée de Fourier rapide. Le Tableau 1 rend compte de résultats obtenus sur la valeur moyenne de la cohérence moyennée sur l'ensemble des fréquences.

TAB. 1 : valeurs moyennes de cohérence estimées selon (3)

	$\rho=0,1$	$\rho=0,5$	$\rho=0,9$
$L=10$	0,299	0,487	0,807
$L=100$	0,134	0,414	0,786

L'importance de l'écart entre la cohérence de référence et la valeur moyenne de la cohérence calculée lorsque le signal utile est identique sur chaque réponse individuelle nous a forcés à nous interroger sur son origine.

### 4.3 Estimateur asymptotique

L'étude de la cohérence estimée selon (3) apparaît difficile, mais cette cohérence peut être simplifiée lorsque le nombre de blocs augmente : les corrélations estimées entre signal et bruits, ainsi que celle entre bruits tendent vers zéro. Si l'on néglige les termes correspondants, l'expression de la cohérence devient, en tenant compte du caractère périodique du signal utile :

$$\frac{L|S(f)|^2}{\left[ L|S(f)|^2 + \sum_{\ell=1}^L |B_{1,\ell}(f)|^2 \right]^{1/2} \left[ L|S(f)|^2 + \sum_{\ell=1}^L |B_{2,\ell}(f)|^2 \right]^{1/2}} \quad (5)$$

où  $S(f)$  représente le spectre du signal utile,  $B_{i,\ell}(f)$  le spectre du bruit sur la voie  $i$ . Pour des bruits sur chaque voie de même puissance, les termes  $\sum_{\ell=1}^L |B_{i,\ell}(f)|^2$ ,  $i=1,2$ , sont de l'ordre de  $L\sigma_b^2$  pour  $L$  grand, et on obtient alors la grandeur :

$$\hat{\rho}_a(f) = \frac{|S(f)|^2}{|S(f)|^2 + \sigma_b^2} \quad (6)$$

Nous allons maintenant nous attacher à trouver la distribution théorique de  $\hat{\rho}_a(f)$  lorsque le signal utile est constitué d'échantillons décorrélés, hypothèse de notre travail.

Le terme  $S(f)$  qui correspond au signal utile s'écrit :

$$S(f) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{2\pi i n f}, \quad (7)$$

où l'on suppose que  $s(n), n=0, \dots, N-1$ , est une suite de  $N$  variables aléatoires indépendantes de loi normale  $N(0, \sigma_s^2)$ . Le couple  $(\text{Re}(S(f)), \text{Im}(S(f)))$  suit une loi gaussienne de

matrice de covariance :  $\sigma_s^2 \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\cos 2\pi n f)^2 \\ \beta = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\sin 2\pi n f)^2 = 1 - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos 2\pi n f \cdot \sin 2\pi n f. \end{cases} \quad (8)$$

Pour les fréquences  $f = p/N$  où  $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , le terme  $\gamma$  est nul. Le couple  $(\text{Re}(S(f)), \text{Im}(S(f)))$  est donc un couple de variables gaussiennes indépendantes. La loi de  $|S(f)|^2$  est celle d'une variable aléatoire de la forme  $\alpha U^2 + (1-\alpha)V^2$  avec  $U$  et  $V$  indépendantes de loi normale  $N(0, \sigma_s^2)$ . On distingue alors deux cas :

- i) pour  $f=0$  ou  $f=f_e/2$ , il vient  $\alpha=1$ ,
- ii) pour  $f \neq 0$  et  $f \neq f_e/2$ , il vient  $\alpha=1/2$ .

$|S(f)|^2$  est alors pour  $f \neq 0$  et  $f \neq f_e/2$  de la forme  $(U^2 + V^2)/2$ , avec  $U$  et  $V$  définies précédemment. C'est donc une variable aléatoire de loi exponentielle et on montre que  $\hat{\rho}_a(f)$  donné par (6) suit une loi de densité

$$\frac{a}{(1-x)^2} \exp\left(-\frac{ax}{1-x}\right) \mathbb{1}_{[0,1]}(x), \quad (9)$$

avec  $a = \sigma_b^2 / \sigma_s^2$  et  $\mathbb{1}_{[0,1]}$  est l'indicatrice sur l'intervalle  $[0,1[$ .

Dans le cas particulier où  $f=0$  ou  $f=f_e/2$ ,  $\alpha=1$  et donc  $|S(f)|^2$  est le carré d'une gaussienne et on montre que la loi de  $\hat{\rho}_a(f)$  est de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{a}{x(1-x)^3} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{a}{2(1-x)}\right) \mathbb{1}_{[0,1]}(x). \quad (10)$$

Pour une fréquence donnée, on peut donc, connaissant la distribution de  $\hat{\rho}_a(f)$ , en déduire sa valeur moyenne par calcul numérique.

## 5. Validation

Cette section a pour but de valider les résultats théoriques trouvés précédemment concernant l'expression de la cohérence donnée en (6),  $\hat{\rho}_a(f)$ , et de les comparer aux résultats des valeurs moyennes de l'expression de la

cohérence  $\hat{\rho}(f)$  estimée selon (3). Les signaux  $s, b_{1,\ell}, b_{2,\ell}$  sont des bruits blancs gaussiens, ce qui nous donne une cohérence de référence constante sur l'ensemble des fréquences. La taille de la transformée de Fourier est de 256 points. L'étude théorique a montré qu'il fallait distinguer les fréquences 0 et  $f_e/2$  des autres fréquences. Des simulations ont été conduites pour estimer la cohérence selon (3) ou (6) et en déduire les histogrammes et les valeurs moyennes. Tout d'abord, les valeurs moyennes obtenues pour  $\hat{\rho}_a(f)$  coïncident bien avec les valeurs moyennes calculées à partir des distributions données en (9) et (10). Les figures 1 et 2 représentent les distributions théoriques et les histogrammes de la cohérence exprimée en (6) respectivement pour  $f=0$  (ou  $f=f_e/2$ ), et pour  $f \neq 0$  et  $f \neq f_e/2$ .

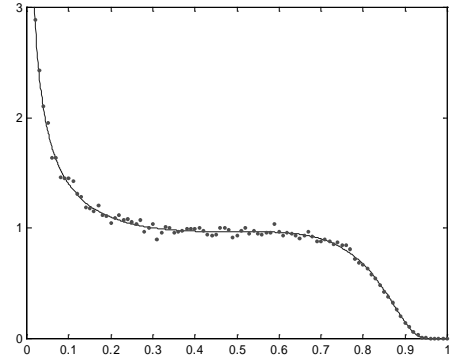


FIG. 1 : distribution de la cohérence  $\hat{\rho}_a(f)$  pour  $\rho=0,5$ ,  $f=0$ , distribution théorique (en trait continu), histogramme (en pointillés)

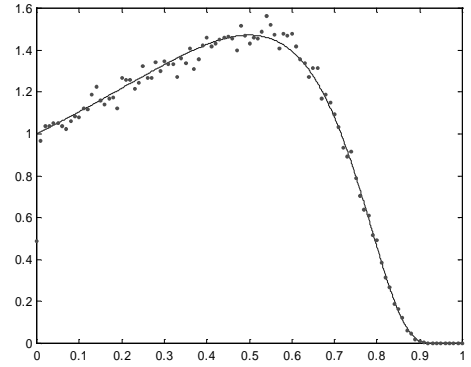


FIG. 2 : distribution de la cohérence  $\hat{\rho}_a(f)$ , pour  $\rho=0,5$ ,  $f \neq 0$  et  $f \neq f_e/2$ , distribution théorique (en trait continu), histogramme (en pointillés)

On voit bien l'adéquation entre les distributions théoriques et celles obtenues par simulation.

Les tableaux 2 et 3 donnent les valeurs moyennes de la cohérence estimée selon (6) et selon (3), cette dernière expression étant celle réellement utilisée sur les signaux réels.

Il apparaît que les valeurs moyennes de la cohérence  $\hat{\rho}_a(f)$  trouvées et par calcul à partir de la distribution théorique et par simulation concordent parfaitement (2 premières lignes des tableaux 2 et 3). On peut noter l'écart de

TAB. 2 : valeurs moyennes des cohérences,  $f = 0$

	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
$E(\hat{\rho}_a)$ , théorie	0,086	0,344	0,672
$E(\hat{\rho}_a)$ , simulation	0,0863	0,344	0,674
$E(\hat{\rho})$ , $L = 20$	0,206	0,398	0,689
$E(\hat{\rho})$ , $L = 100$	0,125	0,364	0,672
$E(\hat{\rho})$ , $L = 500$	0,126	0,348	0,677

TAB. 3 : valeurs moyennes des cohérences,  $f \neq 0$  et  $f \neq f_e/2$

	$\rho = 0,1$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
$E(\hat{\rho}_a)$ , théorie	0,0922	0,406	0,785
$E(\hat{\rho}_a)$ , simulation	0,0923	0,404	0,785
$E(\hat{\rho})$ , $L = 20$	0,222	0,452	0,796
$E(\hat{\rho})$ , $L = 100$	0,134	0,416	0,786
$E(\hat{\rho})$ , $L = 500$	0,104	0,406	0,783

ces valeurs moyennes par rapport aux cohérences de référence respectives. Cet écart est augmenté pour les fréquences 0 et  $f_e/2$ , la valeur moyenne étant toujours plus faible pour  $f = 0$  ou  $f_e/2$  que pour les autres fréquences. La valeur moyenne de la cohérence  $\hat{\rho}(f)$  devient proche des valeurs moyennes précédentes dès que le nombre de réponses est suffisamment élevé, celui-ci devant être d'autant plus important que la cohérence de référence est faible. On constate que la dynamique des valeurs moyennes pour  $\rho$  allant de 0,1 à 0,9 est réduite, et ce d'autant plus pour  $f = 0$  et  $f = f_e/2$ . Le fait de réduire le nombre de réponses augmente la valeur moyenne de la cohérence  $\hat{\rho}(f)$ .

Les figures 3 et 4 représentent respectivement pour  $f = 0$  (ou  $f = f_e/2$ ) et pour  $f \neq 0, f \neq f_e/2$  l'histogramme de la cohérence  $\hat{\rho}_a(f)$ , ainsi que la distribution théorique de la

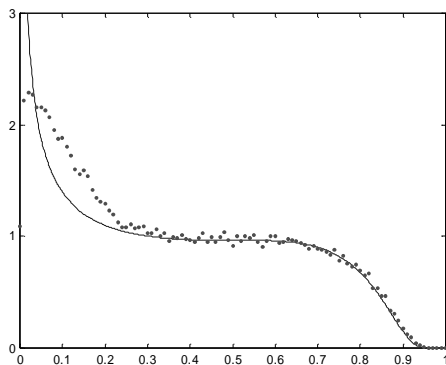


FIG. 3 : distribution de cohérence,  $\rho = 0,5$ ,  $f = 0$ , histogramme de la cohérence  $\hat{\rho}(f)$  (en pointillés), distribution théorique de la cohérence  $\hat{\rho}_a(f)$  selon (10) (en trait continu)

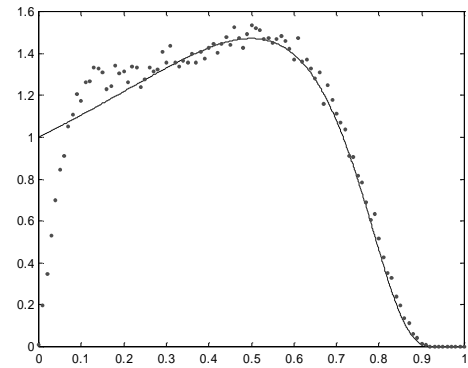


FIG. 4 : distribution des cohérences,  $\rho = 0,5$ ,  $f \neq 0$  et  $f \neq f_e/2$ , histogramme de la cohérence  $\hat{\rho}(f)$  (en pointillés), distribution théorique de la cohérence  $\hat{\rho}_a(f)$  selon (9) (en trait continu)

cohérence  $\hat{\rho}(f)$  pour un nombre de réponses  $L = 100$ , pour une cohérence de référence de 0,5. On constate que les courbes tracées sont assez proches, ce qui est conforme aux valeurs moyennes données tableaux 2 et 3. Même si la distribution de la cohérence selon (3) n'est pas disponible, celle-ci peut être approchée par celle donnée en (9) et (10), toujours pour un signal utile constitué d'échantillons décorrélés, sauf si la cohérence est faible ou/et si le nombre de réponses  $L$  est faible.

Suite aux résultats obtenus, cette étude met en exergue deux points : *i*) il existe une différence non négligeable entre la valeur moyenne de la cohérence lorsque le signal utile reste le même au cours des réponses et la valeur théorique de la cohérence obtenue avec des signaux utiles non répétitifs, *ii*) il est nécessaire de distinguer les fréquences  $f = 0$  et  $f = f_e/2$  des autres fréquences, les distributions de la cohérence étant différentes, elles conduisent à une valeur moyenne différente pour le même modèle.

## 6. Conclusion

Nous avons exposé le problème de l'estimation de la cohérence entre voies lorsque celle-ci est estimée sur des signaux dont la partie utile est répétitive et constituée d'échantillons décorrélés et montré notamment l'influence de la périodicité du signal utile. Ces résultats doivent être pris en compte pour l'interprétation de relations entre voies par l'outil de cohérence lors de l'étude de signaux tels que les potentiels évoqués. Dans une étape ultérieure, il conviendra d'étendre l'étude de la cohérence, pour un signal utile répétitif, au cas où ce signal utile est constitué d'échantillons corrélés.

## Références

- [1] J.S. Bendat, A.G. Piersol, « *Random Data : Analysis and Measurement Procedures* », Wiley-Interscience, 1971.
- [2] G.C. Carter, C.H. Knapp, A.H. Nutall, « *Estimation of the Magnitude-Squared Coherence via Overlapped Fast Fourier Transform Processing* », IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, vol. AU-21, n°4, pp. 337-344, Aug. 1973.