

Identification aveugle de structure propre sous excitation non-stationnaire*

Michèle BASSEVILLE¹, Laurent MEVEL¹, Maurice GOURSAT²

¹ IRISA

Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

²INRIA

BP 105, Rocquencourt, 78153 Le Chesnay Cedex, France

Michele.Basseville@irisa.fr, Laurent.Mevel@irisa.fr, Maurice.Goursat@inria.fr

Résumé – L’identification aveugle de la structure propre d’un système linéaire multivariable est effectuée par une méthode sous-espace appliquée aux matrices de covariances des seuls signaux de sortie, les entrées étant inconnues et non-stationnaires. L’analyse des vibrations est un exemple important de problèmes réels pouvant être posés et résolus de cette manière. Le traitement conjoint de signaux enregistrés à des moments différents, et sous excitations différentes, est un problème crucial dans ce domaine. La méthode sous-espace proposée pour résoudre ce problème de fusion est, comme la méthode classique, basée essentiellement sur une propriété de factorisation de la matrice de Hankel (et des covariances des sorties) du système. Des résultats expérimentaux illustrent les performances de la méthode. L’utilisation pour l’exploitation des données de vols d’essai d’avions est discutée.

Abstract – Blind identification of the eigenstructure of a linear multivariable system is achieved with an output-only covariance-driven subspace method, the input being unknown and nonstationary. Modal analysis of vibrating structures is an important instance of real problems which can be stated and solved in that way. Joint processing of non-simultaneously recorded data is a crucial problem in that application domain. The subspace method proposed for handling those data basically relies on a factorization property of the Hankel matrix (and the output covariances) of the system, just like the classical subspace method. Experimental results illustrate the relevance of the proposed method. The possible use of the method for the exploitation of flight test data is discussed.

1 Identification par sous-espaces

On considère le modèle d’état à temps discret suivant:

$$\begin{cases} X_{k+1} = F X_k + V_{k+1} \\ Y_k = H X_k \end{cases} \quad (1)$$

où H indique quelles composantes du vecteur d’état sont mesurées, le bruit d’état V_{k+1} est non mesuré, Gaussien, centré, blanc, de covariance $Q_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}V_{k+1}V_{k+1}^T$. L’état X et la sortie Y sont de dimensions $2m$ et r respectivement, avec r plus petit que $2m$.

Il est bien connu [7, 9] que les fréquences et modes de vibration d’une structure ou machine se déduisent de la structure propre (λ, Φ_λ) de la matrice de transition d’état F d’un tel système linéaire, dont les sorties sont e.g. les mesures accélérométriques. La collection de paires $(\lambda, \varphi_\lambda)$, où $\varphi_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} H\Phi_\lambda$, est appelée structure propre du système (1). Il existe une demande industrielle forte pour des techniques permettant d’extraire ces caractéristiques dans des conditions opérationnelles usuelles [6]. Le problème est alors d’identifier la structure propre en présence d’une excitation ambiante *non mesurée* et *non-stationnaire*. Ceci requiert des méthodes d’identification

utilisant les seules sorties. Ceci requiert aussi de traiter des enregistrements longs de données multi-capteurs, et d’utiliser des algorithmes travaillant sur les covariances plutôt que sur les données temporelles. D’autre part, les algorithmes d’identification par sous-espaces ont fait leurs preuves pour l’identification aveugle de la structure propre d’un système linéaire. La différence entre les algorithmes sous-espaces travaillant sur les covariances et ceux travaillant sur les données temporelles [13] est mineure, du moins pour l’identification de structure propre [9]. Cependant, la forme basée sur les covariances est plus appropriée pour permettre une fusion de données enregistrées à des moments différents, comme on l’explique dans la suite.

L’identification des $(\lambda, \varphi_\lambda)$ par cette méthode comprend les étapes suivantes. Soit $R_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}Y_k Y_{k-i}^T$ et

$$\mathcal{H}_{p+1,q} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \cdot & R_{q-1} \\ R_1 & R_2 & \cdot & R_q \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_p & R_{p+1} & \cdot & R_{p+q-1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hank}(R_i) \quad (2)$$

les matrices de covariances des sorties, et de Hankel. Avec la covariance entre l’état et la sortie $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}X_k Y_k^T$, un calcul direct des R_i ’s à partir de (1) conduit à:

$$R_i = H F^i G \quad (3)$$

et à la factorisation bien connue [11]

$$\mathcal{H}_{p+1,q} = \mathcal{O}_{p+1}(H, F) \mathcal{C}_q(F, G) \quad (4)$$

*Ces travaux ont été et sont menés dans le cadre des projets Euréka SINOPSYS – Model based Structural monitoring using IN-OPERATION SYStem identification, coordonné par LMS, et FLITE – Flight Test Easy, coordonné par Sopemea.

où $\mathcal{O}_{p+1}(H, F)$ et $\mathcal{C}_q(F, G)$ sont les matrices d'observabilité et de contrôlabilité. La matrice d'observation H se trouve alors dans le premier bloc-ligne de la matrice d'observabilité \mathcal{O} . La matrice de transition d'état F résulte de la propriété d'invariance par décalage de \mathcal{O} , ie

$$\mathcal{O}_p^\dagger(H, F) = \mathcal{O}_p(H, F) F, \quad \text{où } \mathcal{O}_p^\dagger(H, F) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^p \end{pmatrix}$$

Pour en déduire F , il faut supposer $\text{rank}(\mathcal{O}_p) = \dim F$. La structure propre (λ, Φ_λ) est donnée par:

$$\det(F - \lambda I) = 0, \quad F \Phi_\lambda = \lambda \Phi_\lambda$$

Pour implémenter cet algorithme de réalisation équilibrée [2, 4], on substitue les covariances empiriques \widehat{R}_i

$$\widehat{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k Y_{k-i}^T \quad (5)$$

aux R_i pour construire une matrice de Hankel empirique $\widehat{\mathcal{H}}_{p+1,q} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hank}(\widehat{R}_i)$. La SVD de $\widehat{\mathcal{H}}_{p+1,q}$, éventuellement pondérée [13], et sa troncature à l'ordre souhaité, donnent, dans le facteur gauche, un estimateur $\widehat{\mathcal{O}}$ pour la matrice d'observabilité \mathcal{O} :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}} &= U \Delta V^T = U \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_0 \end{pmatrix} V^T \\ \widehat{\mathcal{O}} &= U \Delta_1^{1/2}, \quad \widehat{\mathcal{C}} = \Delta_1^{1/2} V^T \end{aligned}$$

De $\widehat{\mathcal{O}}$ résultent $(\widehat{H}, \widehat{F})$ et $(\widehat{\lambda}, \widehat{\Phi}_\lambda)$ comme indiqué plus haut.

La clé de cet algorithme est la factorisation (3), impliquant la factorisation (4), où le facteur gauche \mathcal{O} dépend seulement de la paire (H, F) , et donc de la structure propre de (1), alors que l'excitation V_k affecte seulement le facteur droit \mathcal{C} à travers la covariance croisée G .

2 Fusion d'enregistrements

À la place d'un seul enregistrement de sorties (Y_k) , nous avons maintenant J enregistrements successifs. Chacun contient des données $Y_k^{(0,j)}$ d'un jeu de capteurs fixes de référence, et $Y_k^{(j)}$ d'un jeu de capteurs mobiles. Les dimensions de $Y_k^{(0,j)}$ et $Y_k^{(j)}$ peuvent varier avec j .

À chaque enregistrement j correspond une réalisation

$$\begin{cases} X_{k+1}^{(j)} &= F X_k^{(j)} + V_{k+1}^{(j)} \\ Y_k^{(0,j)} &= H_0 X_k^{(j)} \quad (\text{capteurs de référence}) \\ Y_k^{(j)} &= H_j X_k^{(j)} \quad (\text{jeu de capteurs } n^o j) \end{cases} \quad (6)$$

avec une matrice F unique (le même système est observé), une matrice d'observation H_0 pour le jeu de capteurs de référence, et une matrice d'observation spécifique H_j pour la localisation j du jeu de capteurs mobiles.

Plutôt que de traiter séparément les enregistrements et de fusionner les estimées correspondantes, on cherche à fusionner les mesures dans (6) de manière à pouvoir utiliser l'algorithme sous-espaces ci-dessus pour identifier F .

On se concentre sur les deux familles de covariances

$$R_i^{0,j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} Y_k^{(0,j)} Y_{k-i}^{(0,j)T}, \quad R_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} Y_k^{(j)} Y_{k-i}^{(j)T} \quad (7)$$

($i \geq 0$) que l'on peut estimer. En stationnaire, la covariance de l'excitation ne dépend pas de j : $\mathbf{E} V_k^{(j)} V_{k'}^{(j)T} = Q \delta(k - k')$, et la covariance croisée $G = \mathbf{E} X_k^{(j)} Y_k^{(0,j)T}$ non plus. Donc toutes les covariances (7) se factorisent

$$R_i^{0,j} = H_0 F^i G \stackrel{\text{def}}{=} R_i^0, \quad R_i^j = H_j F^i G \quad (8)$$

avec un facteur droit *constant*. Pour chaque décalage $i \geq 0$, on peut donc empiler les R_i^j 's en un vecteur colonne

$$R_i^\pi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} R_i^0 \\ R_i^1 \\ \vdots \\ R_i^J \end{pmatrix} \quad (9)$$

qui se factorise en

$$R_i^\pi = H F^i G \quad (10)$$

où $H^T \stackrel{\text{def}}{=} (H_0^T \ H_1^T \ \dots \ H_J^T)$. La matrice de Hankel $\mathcal{H}^\pi \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hank}(R_i^\pi)$ se factorise en $\mathcal{H}^\pi = \mathcal{O}(H, F) \mathcal{C}(F, G)$, et on peut lui appliquer l'algorithme de la section 1.

Malheureusement cette manière de fusionner ne marche pas en excitation non-stationnaire. Si la covariance de l'excitation dépend de l'enregistrement j : $\mathbf{E} V_k^{(j)} V_{k'}^{(j)T} = Q_j \delta(k - k')$, alors la covariance croisée $G_j = \mathbf{E} X_k^{(j)} Y_k^{(0,j)T}$ dépend aussi de j . Les factorisations (8) deviennent

$$R_i^{0,j} = H_0 F^i G_j, \quad R_i^j = H_j F^i G_j, \quad (11)$$

avec un facteur droit dépendant de j , et le vecteur R_i^π défini en (9) ne se factorise plus comme en (10).

Pour contourner cet obstacle, l'idée [8] est de *normaliser* les covariances (7,11) pour qu'elles ressemblent à ce qu'elles seraient sous excitations identiques. Un élément calculatoire intéressant de l'algorithme qui en résulte est qu'il revient essentiellement à appliquer l'algorithme de la section 1 à une matrice de Hankel obtenue par entrelacement les bloc-colonnes des matrices de Hankel de référence et les bloc-lignes des matrices de Hankel des capteurs mobiles convenablement normalisées. La complexité ne dépend pas du nombre J d'enregistrements, puisque la plus petite dimension des matrices de Hankel à décomposer dépend seulement du nombre de capteurs fixes. La complexité croît avec le nombre de capteurs fixes et mobiles, mais peut être réduit par l'utilisation d'une SVD économique, en place et temps. On peut effectuer l'entrelacement des bloc-lignes des matrices de Hankel des capteurs mobiles même lorsque le nombre de ces capteurs varie avec j . Noter qu'il n'est pas nécessaire de calculer les matrices G_j matrices.

3 Consistance en non-stationnaire

Jusqu'à présent nous avons supposé l'excitation stationnaire dans chaque enregistrement, avec covariance dépendant de l'enregistrement. Cette approximation est raisonnable lorsque les conditions environnementales varient lentement. Une hypothèse plus réaliste est que la covariance $\mathbf{E} V_k^{(j)} V_{k'}^{(j)T} = Q_k \delta(k - k')$ varie au sein de chaque enregistrement. Alors se pose la question de la pertinence des algorithmes des sections 1 et 2.

Quand l'excitation, et donc le signal mesuré Y_k , est non-stationnaire, les covariances empiriques \hat{R}_i de (5) ne convergent plus, quand la taille de l'échantillon N tend vers l'infini, vers des R_i bien définies. En fait, les \hat{R}_i peuvent varier de manière arbitraire. Néanmoins on peut les utiliser telles quelles car, bien qu'elles ne convergent pas, elles possèdent la factorisation approchée [4, 8]

$$\hat{R}_i = H F^i \hat{G} + o(N) \quad (12)$$

où $\hat{G} = 1/N \sum_{k=1}^N X_k Y_k^T$, et $o(N)$ tend vers zéro à l'infini. Les conditions requises pour cela sont assez techniques. Elles signifient que la covariance de l'excitation doit être uniformément bornée, et que la n -ième valeur singulière de la matrice de Hankel empirique est uniformément bornée inférieurement, quand n est l'ordre du modèle. La factorisation approchée (12) est la clef de la démonstration de la consistance des algorithmes sous-espaces des sections 1 et 2 en situation complètement non-stationnaire. De plus, sous les mêmes hypothèses, les estimateurs de la structure propre ($\hat{\lambda}, \hat{\varphi}_\lambda$) sont consistants [4, 8].

Bien que cette justification mathématique ne soit possible que sous l'hypothèse de l'ordre du modèle connu, l'expérience montre qu'elle s'étend à la situation plus réaliste d'ordre de modèle inconnu.

4 Applications

L'algorithme de la section 2 a été appliqué à deux benchmarks du COST F3 *Dynamique des Structures*: la structure steel-quake et le pont Z24, et son application à l'exploitation des données de vols d'essai d'avions est en cours.

Structure steel-quake. La structure steel-quake est utilisée au Joint Research Centre d'Ispira (I.) pour tester la résistance de bâtiments aux séismes. Elle comporte 2 étages et est excitée avec un marteau. La réaction de la structure à des impacts de localisations variables est mesurée en différents endroits par 15 accéléromètres, ce qui fournit des enregistrements comme en (6) sous différentes excitations non stationnaires.

L'algorithme sous-espace classique basé sur les covariances complètes et $q = 256$ a été appliqué à 12 capteurs, voir Fig. 1, où les fréquences (ordonnée) sont représentées pour des ordres de troncature de la SVD croissants (abscisse), en un diagramme dit de stabilisation où les symboles expriment des amortissements différents.

L'algorithme sous-espace après fusion a été appliqué à différentes configurations (emplacements des capteurs et des excitations). Le diagramme de stabilisation résultant de la fusion des données correspondant à 2 excitations différentes mesurées par 2 capteurs fixes et 5×2 capteurs mobiles (les mêmes qu'en Fig. 1) est montré en Fig. 2. Bien que cet algorithme manipule des covariances plus petites (2×12) que l'algorithme classique (12×12), et donc traite moins d'information, le diagramme de stabilisation en Fig. 2 est nettoyé de modes parasites qui apparaissent dans le diagramme de la méthode classique en Fig. 1.

Pont Z24. Le pont suisse Z24 a été un benchmark du projet BRITE/EURAM SIMCES (identification et moni-

toring de structures de génie civil) et du COST F3. La réponse du pont à l'excitation due au trafic sous le pont a été mesurée en 135 points, surtout dans les directions verticales et transverses.

L'algorithme sous-espace classique basé sur les covariances complètes et $q = 128$ a été appliqué séparément à chacun de $J = 2$ enregistrements, qui contient resp. 3 et 2 capteurs verticaux, voir Fig. 3 and 4. L'algorithme sous-espace après fusion, basé sur les covariances partielles (7) et $q = 128$, a été appliqué, avec un capteur de référence, et 2 capteurs mobiles dans le premier enregistrement, et 1 dans le second; voir Fig. 5, qui montre plusieurs améliorations par rapport à Fig. 3 et Fig. 4. En effet, pour des ordres suffisants, des modes parasites disparaissent, de vrais modes apparaissent et se stabilisent plus vite et fluctuent moins, les amortissements sont mieux estimés et à des ordres moindres, certains modes non identifiés en Fig. 3 et 4, apparaissent en un diagramme stable. Ceci est une amélioration par rapport à [12], où les diagrammes résultant de la fusion d'analyses modales séparées sont des diagrammes superposés et non lissés.

Avions. Le développement de nouvelles générations d'avions exige une exploration précautionneuse du comportement aéroelastique de la structure, dans tout le domaine de vol. On réalise cela en combinant des tests au sol, en laboratoire, et des essais en vol.

Le projet Eureka FLITE (**F**light **T**est **E**asy) a pour objet d'améliorer l'exploitation des données d'essais en vol dans deux directions. Tout d'abord, la mise en oeuvre des algorithmes des sections 1 et 2 va permettre l'exploitation de données de vol sous excitation naturelle ambiante (incluant la turbulence), et sans recours à l'excitation artificielle (par exemple par les ailerons ou gouvernes). Ensuite, le développement d'algorithmes permettant l'exploitation de ces données en ligne et durant les vols d'essai vise l'amélioration des techniques d'ouverture du domaine de vol et d'analyse du flottement. Le but est à la fois d'améliorer la qualité (sécurité), et de réduire de manière importante les coûts.

5 Conclusion

Nous avons discuté le problème de l'analyse modale en excitation ambiante usuelle, et préconisé l'utilisation de l'algorithme d'identification par sous-espaces basé sur les seules covariances des signaux de sortie. Nous avons expliqué comment exploiter la propriété de factorisation de ces covariances, et de matrices de Hankel, pour effectuer une fusion de données enregistrées sous des excitations non-stationnaires différentes, avant application de l'algorithme sous-espaces. Nous indiqués à quelles conditions cet algorithme est consistant même sous excitation non-stationnaire. Nous avons montré des résultats expérimentaux obtenus sur deux benchmarks du COST F3, et discutés de l'application à l'exploitation des données de vols d'essai d'avions.

Il apparaît expérimentalement que la normalisation effectuée par l'algorithme, jointe à la moyennisation sous-

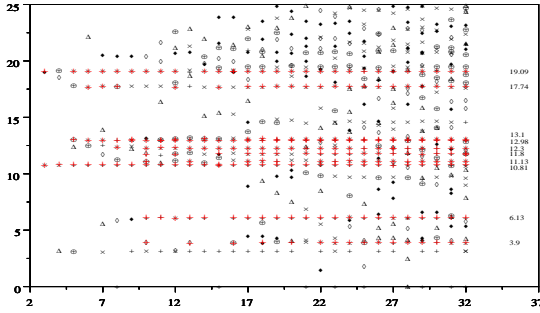


FIG. 1: *Steel-quake - Sous-espace classique, 12 capteurs.*

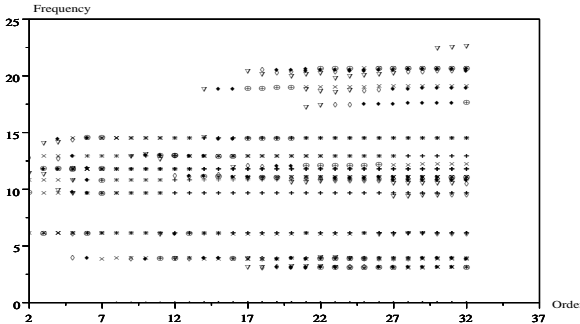


FIG. 2: *Steel-quake - Sous-espace après fusion.*

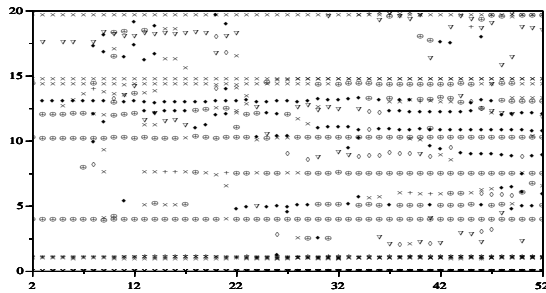


FIG. 3: *Z24 - Sous-espace classique, 3 capteurs, $j = 1$.*

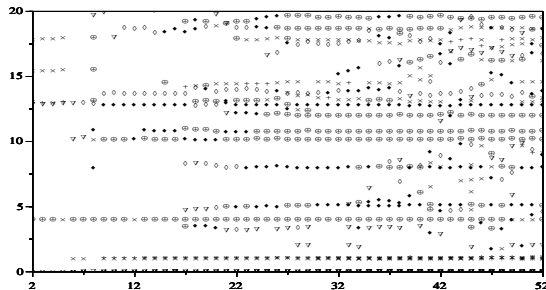


FIG. 4: *Z24 - Sous-espace classique, 2 capteurs, $j = 2$.*

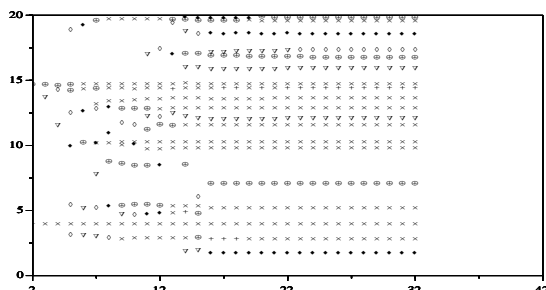


FIG. 5: *Pont Z24 - Sous-espace après fusion.*

jacente au calcul des covariances empiriques, permet effectivement de se débarrasser des effets indésirables des excitations non-stationnaires différentes, et d'obtenir de bons estimateurs de la structure propre, ce qui est en accord avec le résultat théorique de consistance.

L'algorithme de la section 1 a été implémenté dans 2 toolboxes: le module IN-OP du logiciel CADA-X de LMS, et le module d'analyse modale du logiciel libre Scilab [5] de l'INRIA. Ce travail a été soutenu par le projet Eureka no 1562 SINOPSYS (Model based Structural monitoring using **IN-OPERATION** **SYS**tem identification) coordonné par LMS, Leuven, Belgium. L'algorithme de la section 2 sera bientôt disponible dans le module de Scilab.

Références

- [1] M. Abdelghani, M. Goursat, T. Biolchini, L. Hermans, H. Van der Auweraer (1999). Performance of output-only identification algorithms for modal analysis of aircraft structures. *IMAC'17*, 224–230.
- [2] H. Akaike (1974). Stochastic theory of minimal realization. *IEEE Tr. Aut. Cont.*, **AC-19**, 667–674.
- [3] M. Basseville, M. Abdelghani, A. Benveniste (2000). Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring. *Automatica*, **36**, 101–109.
- [4] A. Benveniste, J.-J. Fuchs (1985). Single sample modal identification of a non-stationary stochastic process. *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-30**, 66–74.
- [5] M. Goursat, M. Basseville, A. Benveniste and L. Mevel (2000). A Scilab toolbox for output only modal analysis and diagnosis. *IMAC'18*.
- [6] L. Hermans, H. Van der Auweraer (1999). Modal testing and analysis of structures under operational conditions: industrial applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol.13, no 2, 193-216.
- [7] J.N. Juang (1994). *Applied System Identification*, Prentice Hall, Englew. Cliffs, NJ.
- [8] L. Mevel, A. Benveniste, M. Basseville, M. Goursat (2000). Blind subspace-based eigenstructure identification under nonstationary excitation using moving sensors. *IRISA Report 1354*, www.irisa.fr/bibli/publi/pi/2000/1354/1354.html
- [9] B. Peeters, G. de Roeck (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mech. Syst. and Signal Proc.*, **13**, 855–878.
- [10] M. Prevosto, M. Olagnon, A. Benveniste, M. Basseville, G. Le Vey (1991). State-space formulation, a solution to modal parameter estimation. *Jal Sound and Vibration*, **148**(2), 329–342.
- [11] P. Stoica, R.L. Moses (1997). *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice Hall.
- [12] H. Van der Auweraer, W. Leurs, P. Mas, L. Hermans (2000). Modal parameter estimation from inconsistent data sets. *IMAC'18*, 763–771.
- [13] P. Van Overschee, B. De Moor (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory – Implementation – Methods*. Kluwer.