

Analyse Spectrale des Résidus de la Télémétrie Laser sur la Lune

Rachid MOUSSAOUI¹, Albert BIJAOUÏ², François MIGNARD³

¹CRAAG, Observatoire d'Alger

B.P. 63 Bouzaréah Alger Algérie

²CERGA, Observatoire de la Côte d'Azur

B.P.4229 F-06304, Nice Cedex 4

³CERGA, Observatoire de la Côte d'Azur

Av. Copernic 06130 Grasse (France)

rachid@obs-nice.fr, bijaoui@obs-nice.fr, mignard@obs-azur.fr

Résumé - L'observation des signaux en astronomie conduit très souvent à un échantillonnage irrégulier dû à de nombreux effets instrumentaux, atmosphériques ou astronomiques. C'est par exemple le cas des mesures de distance Terre-Lune par télémétrie laser. Ainsi l'observatoire de la Côte d'Azur, où s'effectuent ces tirs, fournit des résidus correspondant à la différence entre la distance observée et celle prédite par la théorie tenant compte de tous les effets connus. Les observations ont un bruit variable et sont irrégulièrement échantillonnées dans le temps avec la présence de trous d'observations.

Si la transformée de Fourier discrète est bien adaptée à l'étude des phénomènes stationnaires échantillonnés régulièrement, elle est inopérante en présence d'un échantillonnage irrégulier, d'autant plus que des phénomènes non stationnaires peuvent être à l'origine des écarts entre l'observation et la théorie. Nous avons donc été amenés à développer une méthode d'analyse spectrale associée aux résidus de la télémétrie laser-lune afin mettre en évidence des phénomènes périodiques non pris en compte dans la théorie actuelle.

***Abstract** - The observation of the signals in astronomy leads to an irregular sampling due many instrumental, atmospheric or astronomical effects. Earth-Moon distance measurements performed by laser telemetry at the Calern observatory is a typical example of such observations. The Côte d'Azur observatory where these shootings are carried out provides Lunar Laser Ranging residuals corresponding to the difference between the observed distance and the predicted one. Recorded laser data are noisy, non-uniformly sampled and display temporal gaps. If the discrete Fourier transform is well adapted to study stationary phenomena uniformly sampled, it is inadequate in case of an irregular sampling, more especially if non-stationary phenomena are at the origin of the differences between the observation and the theory. Two different methods, which take into account the peculiarities of the data set, are developed.*

1. Introduction

Le problème majeur dans l'analyse spectrale de séries temporelles contenant des trous d'observations est la présence, dans le spectre de puissance, de pics parasites appelés "sides lobes" qui rendent la détection des fréquences propres du signal très difficile. En effet, la *FFT* ne prend pas le zéro comme un élément neutre. La *FFT* d'un signal contenant des lacunes revient à convoluer le spectre du signal par celui de la fenêtre qui décrit en gros l'alternance jour/nuit. Plusieurs méthodes ont été alors développées pour analyser les signaux irrégulièrement échantillonnés. Dans notre cas nous nous intéressons à deux méthodes. La première consiste à un ajustement par moindres carrés des fonctions sinus aux données (CLEAN). L'autre consiste à corriger le signal des effets de la fenêtre d'observation par déconvolution.

2. Observations

Les données qui font l'objet de cette étude ont été obtenues avec la station laser-lune de l'Observatoire de la Côte d'Azur sur le plateau de Calern. Le principe de la mesure est simple

[1], on calcule le temps de trajet aller-retour d'une impulsion lumineuse émise par un laser à travers un télescope entre la station et un des différents réflecteurs se trouvant sur la Lune. Après deux secondes et demi environ, une partie de cette lumière est renvoyée et sera reçue sur le même télescope. En multipliant cette mesure par la vitesse de la lumière et en la divisant par 2, on obtient alors la distance de ce télescope à la Lune, après quelques corrections pour la traversée de l'atmosphère. Les résidus sont alors obtenus en calculant la différence entre la distance observée et celle prédite par la théorie tenant compte de tous les effets connus. Tous les résidus laser lune acquis à l'observatoire depuis 1987 de Calern sont présentées sur la figure 1. De ces observations on peut constater que les données ont la particularité d'avoir un échantillonnage temporel irrégulier et une présence de trous d'observation qui nécessitent des traitements adéquats pour l'analyse des données. En outre les données présentent un bruit variable.

3. Le Variogramme

Afin d'évaluer le niveau de bruit dans les données, on a utilisé la notion de variogramme, équivalente à celle de la

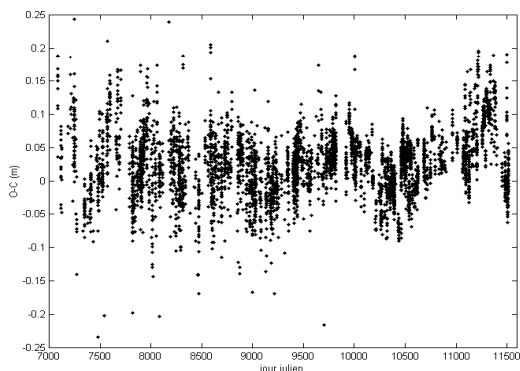


FIG. 1 : résidus laser lune durant la période 1987-2000

fonction de structure introduite par Kolmogorov [2], et très utilisée en géomorphologie (krigeage) car bien adaptée à l'étude des fonctions aléatoires à incrément stationnaire. Cela consiste à évaluer comment varie le carré de l'écart de la fonction aléatoire avec la distance. Ce variogramme est défini, pour un processus aléatoire $S(t)$ dépendant du temps comme suite :

$$V(d) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [S(t_i + d) - S(t_i)]^2 \quad (1)$$

où E est l'espérance mathématique d'une fonction et d la distance considérée entre deux échantillons.

Si on pose que $V(d)$ est indépendant de la position t on dit que le processus aléatoire est invariant par incrément.

La présence d'un signal dans les données se traduit par une variation du variogramme au cours de la période d'observation considérée. Par contre le variogramme est plat si on n'est en présence que de bruit. La figure 2 montre le variogramme des données en prenant différentes valeurs de d .

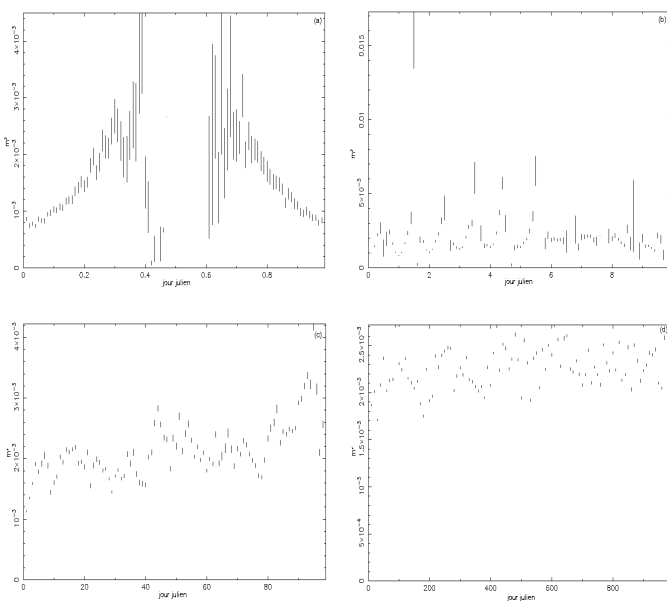


FIG. 2 : variogramme des résidus laser. a) pas 0.01j. d 1j, b) pas 0.1j. d 10j, c) pas 1j. d 100j, d) pas 10j. d 1000j

Les trous dans le variogramme sont liés aux conditions d'observation : alternance jour-nuit, périodes de nouvelles et pleines lunes, variations systématiques des conditions météorologiques selon la saison.

Cette étude nous a permis de constater que le bruit mesuré était bien en accord avec celui indiqué par les expérimentateurs, mais elle a permis aussi de montrer l'existence de signaux cohérents dans les résidus. En effet, on peut constater sur les différents variogrammes des périodicités apparentes.

4. La Méthode CLEAN

L'analyse spectrale des données a été faite en utilisant la méthode CLEAN [3] avec réajustement final. CLEAN est un algorithme de *matching pursuit* appliqué par les radioastronomes pour la restauration des images en synthèse d'ouverture. Son adaptation à l'analyse spectrale consiste à effectuer une recherche itérative des raies ayant le plus d'énergie, sans tenir compte des effets d'interférence. On soustrait dans le signal l'effet de ces raies, au fur et à mesure de leur détection. Le processus est arrêté lorsqu'on estime qu'il ne reste plus que du bruit dans les données résiduelles. Une fois le spectre de raies obtenu, on réajuste les paramètres de chaque onde extraite en recalculant sa fréquence et son amplitude par moindres carrés.

Toutes les données sont alors ajustées sur une plage fréquentielle donnée par une fonction sinus ayant une fréquence ω , une amplitude R et une phase φ :

$$E(R, \omega, \varphi) = \sum_{i=t_0}^{t_n} (x_i - \mu - R \cos(\omega t + \varphi))^2 \quad (2)$$

où μ est la valeur moyenne des données x_t , or avec $y_i = x_i - \mu$

$$E(R, \omega, \varphi) = \sum_{i=t_0}^{t_n} (y_i - R \cos(\omega t + \varphi))^2 \quad (3)$$

L'équation n'est pas linéaire en R et φ mais on peut la réécrire comme suite :

$$E(\omega, a, b) = \sum_{i=t_0}^{t_n} (y_i - (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)))^2 \quad (4)$$

Nous avons alors le problème classique consistant à déterminer les coefficients (a, b, ω) qui minimisent l'erreur E . La fréquence qui convient le mieux est celle qui réduit le plus ce résidu.

Si $e = a^2 + b^2$, est l'énergie associée à la fréquence ω , chercher celle qui a la plus grande énergie, n'est pas nécessairement celle qui réduit le plus le résidu. En effet si la répartition des instants de mesure est telle que les vecteurs associés à deux fréquences ω_1 et ω_2 sont orthogonaux, l'énergie dans la somme des deux signaux est bien la somme des énergies et donnent ainsi deux informations indépendantes, mais dans le cas contraire, si les signaux ne sont pas orthogonaux, la fréquence qui a l'énergie la plus grande n'est pas nécessairement celle qui réduit le mieux le résidu. Le pas choisi d'échantillonnage de la plage de fréquence est celui qui

résulte de l'intervalle d'observation (pas de Shannon) $1/T$ où T est la durée totale des mesures. Pour la fréquence de coupure, on a choisi celle qui résulte du plus petit intervalle entre deux observations $1/(\Delta_{\min})$ où Δ_{\min} représente le plus petit intervalle entre deux échantillons.

Un periodogramme, analogue à une densité spectrale, est alors construit en traçant l'amplitude R en fonction de ω sur tout l'intervalle de fréquence qui nous intéresse.

La figure 3 montre le spectre reconstitué à partir des termes fréquentiels extraits de la méthode CLEAN dans les résidus laser-lune après plusieurs itérations. On constate sur ce spectre un phénomène de décomposition de raies autour de raies principales.

La figure 4 montre l'énergie de ces raies en fonction de leur rang de détection. Cette énergie suit une loi de puissance avec le rang.

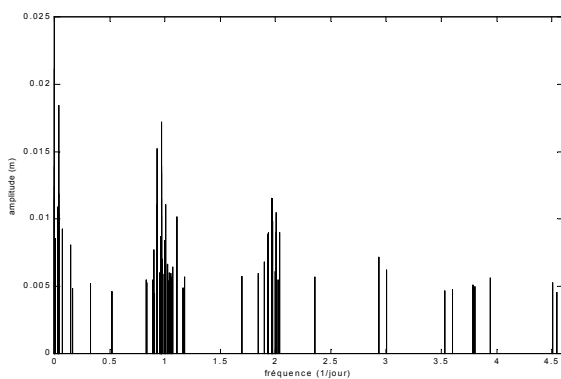


FIG. 3 : spectre reconstitué

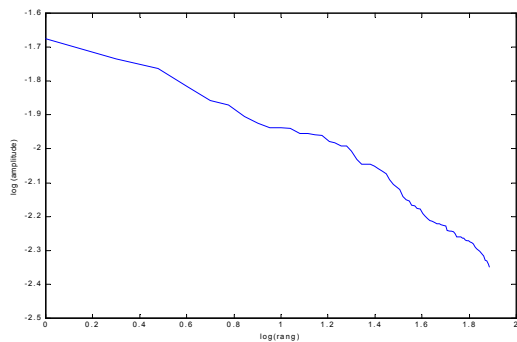


FIG. 4 : distribution de l'énergie des raies

5. La Méthode de Déconvolution

La méthode consiste à déconvoluer le signal par la fonction fenêtre d'observation. Le signal observé $S(t)$ peut s'écrire comme un produit d'un signal vrai $X(t)$ et d'une fonction fenêtre $P(t)$:

$$S(t) = X(t) \cdot P(t) \quad (5)$$

Afin d'appliquer une déconvolution discrète, il est nécessaire de rendre l'échantillonnage régulier, mais toujours lacunaire. Pour cela on détermine une fonction fenêtre par les moyennes journalières pondérées des résidus pour les journées où il y a des données et zéro pour les autres journées.

Dans l'espace fréquentiel, pour un signal régulièrement échantillonné, l'équation (5) s'écrit :

$$S(v) = X(v) * P(v) \quad (6)$$

où $*$ représente l'opération de convolution et $X(v)$ et $P(v)$ sont respectivement les transformées de Fourier du signal vrai et de la fonction fenêtre.

Si on considère que le temps d'intégration des observations tend vers l'infini, et que les parties réelles et imaginaires de $X(v)$ et $P(v)$ sont aléatoires et indépendantes, on déduit de l'équation (6) la relation suivante :

$$|S(v)|^2 = |X(v)|^2 * |P(v)|^2 \quad (7)$$

Par l'application de la Transformation de Fourier inverse sur le produit de convolution de l'équation (7), on aura un simple produit de deux autocorrélations $X(t)$ et $P(t)$:

$$AC_s(\rho) = AC_x(\rho) \cdot AC_p(\rho) \quad (8)$$

où $AC_x(\rho)$ et $AC_p(\rho)$ sont respectivement l'autocorrélation des données et celle de la fenêtre d'observation.

Le spectre de puissance déconvolué est ainsi obtenu par [4] :

$$|X(v)|^2 = TF \left[\frac{AC_s(\rho)}{AC_p(\rho)} \right] \quad (9)$$

L'inconvénient de ce type de méthode est la nécessité de se ramener à un échantillonnage régulier, ce qui revient à faire des interpolations et des estimations de la valeur des points manquants. En outre le spectre de puissance déconvolué possède des valeurs négatives qui n'ont pas lieu d'être. Ceci est dû à la non-validité des approximations prises pour établir l'équation (7). Le point fort de cette méthode consiste dans la diminution très nette de l'effet des lobes secondaires. L'énergie de ces derniers est redistribuée sur les pics réels correspondant aux fréquences propres du signal. Par conséquent, l'amplitude de l'énergie des fréquences propres augmente d'un facteur d'environ 2, ce qui peut permettre leur détection.

La figure 5 montre le spectre de puissance des résidus laser lune sans et avec la méthode de déconvolution de la fenêtre d'observation. L'effet de la fenêtre d'observation a diminué alors que l'énergie des pics détectés a augmenté.

6. Résultats et discussion

Deux méthodes ont été développées et utilisées pour analyser les résidus laser-lune obtenus à l'Observatoire de la Côte d'Azur durant la période de 1987 à 2000.

Les résultats obtenus avec ces deux méthodes sont en accord pour les basses fréquences. Pour les fréquences supérieures à

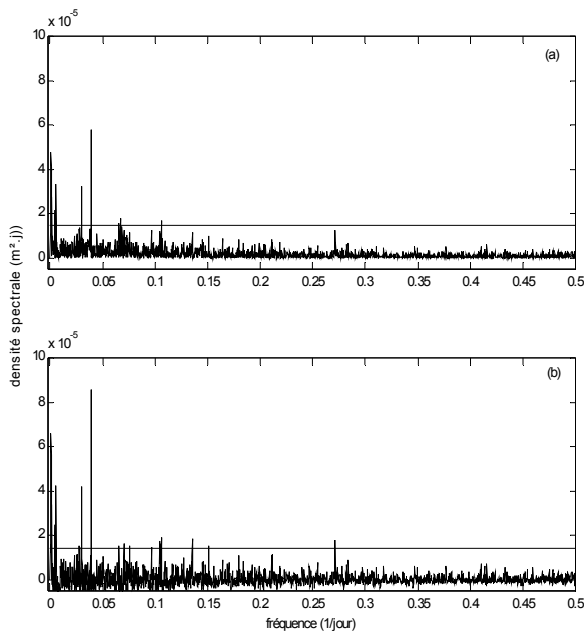


FIG. 5 : densité spectrale des résidus laser. a) sans déconvolution, b) avec déconvolution

$\frac{1}{2}$ jours⁻¹, la méthode de déconvolution ne permet pas d'explorer le signal en raison de la fréquence de coupure qu'on s'est imposé en faisant des moyennes journalières afin de satisfaire les exigences de la méthode.

L'analyse des résidus laser avec CLEAN a permis de montrer :

- Un phénomène de décomposition des raies autour d'une raie principale (*splitting*), caractéristique du couplage d'un phénomène d'oscillation avec une rotation. Ce phénomène peut être dû à une modélisation insuffisante de la marée terrestre dans le calcul des résidus.
- L'énergie des ondes détectées varie suivant une loi de puissance avec leur rang. Une partie des résidus laser-lune pourrait être liée à un phénomène naturel comme la sismologie terrestre.
- Une partie notable de l'énergie correspond à des termes périodiques. Aucun effet non stationnaire n'a pu être détecté.

7. Conclusion

Les résidus laser-lune issus des observations faites à l'Observatoire de la Côte d'Azur de 1987 à 2000 montrent des variations durant toute la période d'observation. Depuis le démarrage de la station du laser-Lune jusqu'à maintenant, les mesures de distances sont faites quotidiennement à l'exception des jours où les conditions atmosphériques ou expérimentales sont mauvaises. Ces discontinuités d'observation introduisent des particularités dans les données

des résidus que sont la non-régularité de l'échantillonnage et la présence de trous d'observation. Des méthodes spectrales adéquates sont requises pour extraire des données les termes périodiques significatifs. Pour cela, deux méthodes qui tiennent compte des particularités des données ont été développées, l'une basée sur l'algorithme CLEAN et l'autre cherchant à déconvoluer la densité spectrale de la fenêtre d'observation.

L'analyse montre qu'il faut peut être ajouter au modèle théorique actuel de nouveaux paramètres afin d'expliquer la décomposition des raies dans le spectre obtenu.

Références

- [1] E. Samain, J.F. Mangin, C. Veillet et al., 1998, *Millimetric Lunar Laser Ranging at OCA*. *Astron. Astrophys. Suppl. ser.* 130, 235-244.
- [2] A. N Kolmogorov, *Dissipation of energy in locally-isotropic turbulence*. *Doklady. Acad. Sci. U. S. S. R*, 32(1), 1941.
- [3] N. R. Lomb, *Least squares frequency analysis of unequally spaced data*. *Astrophysics and space Science* 39 (1976) 447-462.
- [4] E. Fossat., 1992, *Astron. Astrophys.* 263, 443-452