

Estimation en aveugle d'une marche aléatoire en fréquence par chaînes de Markov cachées

Sébastien PARIS¹, Claude JAUFFRET²

¹IRISA

Campus Universitaire de Baulieu, 35042 Rennes Cedex, France

²Laboratoire SIS/SA, Bât ISITV

Université de Toulon et du Var

Av. Georges Pompidou, BP 56, 83162 La Valette Du Var, France

sparis@irisa.fr, jauffret@isitv.univ-tln.fr

Résumé –

Cet article traite de l'estimation "en aveugle" d'une marche aléatoire en fréquence noyée dans un très fort niveau de bruit avec pour cadre applicatif l'extraction de piste fréquentielle en sonar passif (voir [1] pour détails). Pour tenir compte du caractère "aléatoire" de la piste de fréquence, on modélise l'évolution temporelle de celle-ci par une chaîne de Markov cachée stationnaire. Toutefois tous les paramètres de cette modélisation sont inconnus en pratique et doivent être estimés. Nous proposons un nouvel algorithme s'appuyant d'une part sur une approche dite "Track Before Detect" pour s'affranchir du problème de la méconnaissance du rapport signal à bruit et d'autre part sur une modification de l'algorithme de Baum-Welch (pour l'estimation des probabilités de transition d'état à état). L'utilisation de cet algorithme sera illustrée par un jeu de simulation synthétique.

Abstract –

This paper deals with automatic frequency line tracking encountered for example in passive sonar system. The fluctuating behavior of the track is modeled by a hidden Markov model (HMM). Unfortunately the parameters of the HMM are unknown in practice and must be estimated. We propose a new algorithm based on Track Before Detect approach to be independent of the SNR knowledge and on a modification of the Baum-Welch algorithm to estimate state transition probabilities. Intensive Monte-Carlo simulations will show the efficiency of this new algorithm.

1 Introduction

Pour un sonariste, l'extraction automatique de pistes fréquentielles permet de détecter, classifier voire de trajectographier une cible manœuvrant à proximité de l'antenne sonar. Les émissions acoustiques générées par la machinerie (engrenages, arbres, etc, ...) des engins en déplacement ont la propriété de posséder un spectre bande étroite évoluant de manière très significative dans le temps. Pour cette raison, un sonariste travaille sur une image temps-fréquences appelée "Lofargramme" pour visualiser l'évolution de ces signatures acoustiques représentées dans l'image par des morceaux de pistes. L'extraction de piste revient à estimer les variations de chaque pistes fréquentielles présentes. Toutefois, l'objet de cet article porte sur l'estimation d'une seule piste de fréquence.

Nous avons utilisé par le passé (article du GRETSI'99 [2]) une modélisation par chaînes de Markov cachées pour estimer cette marche fréquentielle. Une chaîne de Markov cachée stationnaire est complètement définie par le triplet $\lambda \triangleq (\pi, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ où π désigne le vecteur des probabilités *a priori* de la chaîne à l'instant initiale, \mathbf{A} désigne la matrice des probabilités de transition d'état à état entre deux instants consécutifs et \mathbf{B} la matrice des vraisemblances conditionnelles aux états. En pratique ces quantités lorsqu'elles sont inconnues, peuvent être estimées *via* l'algorithme de Baum-Welch [3] à partir des mesures reçues.

Cette estimation des paramètres s'avère délicate surtout lorsque la dimension de l'état est grande ou que le nombre d'itérations devient important [1]. Par exemple, concernant l'estimation des probabilités de transition d'état à état, il est possible que certaines transitions se voient attribuées une probabilité quasi nulle au cours des itérations, interdisant par conséquent le suivi de certaines pistes fréquentielles.

2 Positionnement du problème

Soit l'observation d'une sinusoïde de phase instantanée $\varphi(t)$ et corrompue additivement avec un bruit de mesure Gaussien telle que :

$$s(t) = a(t) \sin(\varphi(t)) + \epsilon(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

avec $\epsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$. La fréquence instantanée est alors définie par :

$$f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2)$$

Ce signal est échantillonné régulièrement avec un pas temporel Δt et découpé en K blocs adjacents de N points. Les variations de $f(t)$ et de $a(t)$ sont supposées suffisamment lentes par rapport à f_e pour que l'on considère $f(t)$ et $a(t)$ constants à l'intérieur des blocs $k = 1, \dots, K$. On

modélise l'observation associée au bloc k par :

$$s_k(n\Delta t) = a_k \sin(2\pi f_k n\Delta t + \phi_k) + \epsilon_k(n\Delta t), \quad (3)$$

où $\phi_k \in [0, 2\pi]$.

On calcule le périodogramme des K signaux $s_k(n\Delta t)$ noté $P_k \triangleq (P_{k,0}, \dots, P_{k,N-1})$, $k = 1, \dots, K$ avec :

$$P_{k,i} \triangleq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} s_k(n\Delta t) \exp\left(-\frac{j2\pi ni}{N}\right) \right|^2. \quad (4)$$

avec, $i = 0, \dots, N-1$. La résolution fréquentielle de chaque canal est égale à $\Delta f \triangleq \frac{1}{N\Delta t}$. Etant donné que $s(t)$ est un signal réel, seuls $M = \frac{N}{2}$ points du périodogramme P_k vont être utilisés. On définit le vecteur mesure z_k qui représente les M points du périodogramme utiles par :

$$z_k \triangleq (z_{k,0}, \dots, z_{k,M-1}), \quad (5)$$

avec

$$z_{k,i} = P_{k,i}. \quad (6)$$

f_k est donc un multiple de la résolution fréquentielle telle que $f_k = x_k \Delta f$ où x_k une variable aléatoire discrète prenant une valeur comprise dans l'intervalle $[0, M-1]$. Il est à noter qu'aucune étape de seuillage n'est réalisée sur l'ensemble des périodogrammes. Ceci constitue une approche "Track Before Detect". L'estimation de $f(t)$ revient à estimer la marche d'escalier en fréquence $\{x_k \Delta f\}_{k=1, \dots, K}$.

3 Modélisation par chaînes de Markov cachées

La séquence des fréquences réduites $\{x_k\}_{k=1, \dots, K}$ à estimer possédant une certaine cohérence spatio-temporelle, l'évolution du processus $X_k \triangleq \{x_1, \dots, x_k\}$ peut être modélisée par une chaîne de Markov stationnaire au premier ordre vérifiant

$\Pr(x_k = i | x_{k-1} = j, \dots, x_1) = \Pr(x_k = i | x_{k-1} = j) \triangleq a_{ji}$ et régie par l'équation d'état :

$$x_k = x_{k-1} + \eta_k, \quad k = 2, \dots, K, \quad (7)$$

où η_k est le bruit d'état.

Il est préférable en extraction de piste fréquentielle que la matrice $\mathbf{A} = \{a_{ji}\}_{i,j=0, \dots, M-1}$ possède une structure bande diagonale ne serait-ce que pour symétriser les variations temporelles de la piste dans le plan temps-fréquences.

Nous supposons pour la suite que le bruit d'état η_k de la marche X_K est Gaussien, *i.e.* $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$ tel que :

$$a_{ji} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (8)$$

où σ_x est inconnu en pratique. Les x_k ne sont observés qu'au travers des mesures $Z_k \triangleq \{z_k\}_{k=1, \dots, K}$. On définit la vraisemblance conditionnelle de la mesure z_k à l'état x_k par $b_i(z_k) \triangleq \Pr(z_k | x_k = i)$, $i = 0, \dots, M-1$ et l'ensemble de ces coefficients définit la matrice $\mathbf{B} = \{b_i(z_k)\}_{i=0, \dots, M-1, k=1, \dots, K}$. Chaque ligne de cette matrice doit être calculée après réception de chaque mesure z_k car le nombre

de réalisations de la mesure z_k est trop important pour que l'on puisse calculer cette matrice entièrement *a priori*. Nous pouvons définir la vraisemblance conditionnelle de $z_{k,j}$, $j \in \{0, \dots, M-1\}$ sous deux hypothèses (voir [4] pour détails).

1. Pour $j \neq i$, la loi de probabilité $z_{k,j}$ suit un χ^2 centré à deux degrés de liberté :

$$\Pr(z_{k,j} | x_k = i) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \exp\left(-\frac{z_{k,j}}{\sigma_\epsilon^2}\right). \quad (9)$$

2. Pour $j = i$, la loi de probabilité de $z_{k,j}$ suit cette fois-ci un χ^2 décentré dont le terme de décentrement dépend de la valeur du RSB $\rho_k = \frac{a_k^2}{2\sigma_\epsilon^2}$

$$\Pr(z_{k,j} | x_k = i) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \exp\left(-\frac{z_{k,j}}{\sigma_\epsilon^2} - \rho_k M\right) I_0\left(\sqrt{\frac{4\rho_k M z_{k,j}}{\sigma_\epsilon^2}}\right), \quad (10)$$

où $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \sin \theta) d\theta$ désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

La vraisemblance d'une ligne du lofargramme s'écrit

$$b_i(z_k) = \Pr(z_{k,i} | x_k = i) \times \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} \Pr(z_{k,j} | x_k = i) \right], \quad (11)$$

qui peut être développée en

$$b_i(z_k) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^{2M}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{r=0}^{M-1} z_{k,r}\right) \times \exp(-\rho_k M) I_0\left(\sqrt{\frac{4\rho_k M z_{k,i}}{\sigma_\epsilon^2}}\right). \quad (12)$$

On voit apparaître dans l'expression de la vraisemblance directement le terme du RSB inconnu en pratique. Or nous supposons pour la suite que nous cherchons à extraire une piste à très faibles RSB. Ainsi nous pouvons adopter l'approche Track Before Detect couplée à celle des voies défilantes [5, 6], en remplaçant avantageusement les coefficients $b_i(z_k)$ par :

$$b_i(z_k) = \frac{P_{k,i}}{\sum_{j=0}^{M-1} P_{k,j}}, \quad (13)$$

les minima et maxima locaux de la vraisemblance (*c.f.* éq (12)) coïncidant parfaitement avec l'expression (13). Cette approche s'affranchit de la méconnaissance du rapport signal à bruit, car les coefficients de la matrice \mathbf{B} sont calculés directement par l'intermédiaire des périodogrammes normalisés.

4 Principe du nouvel algorithme

L'estimation en aveugle de la piste fréquentielle consiste à trouver les paramètres de la HMM λ uniquement à partir des mesures Z_K reçues ; ou pour notre cas, à estimer

la matrice \mathbf{A} sous la contrainte que le bruit d'état reste Gaussien. L'algorithme Baum-Welch [7, 3] dérivé de l'algorithme EM [8], permet d'estimer, au sens du maximum de vraisemblance, les paramètres de la HMM λ à partir des seules mesures Z_K . Il peut être initialisé par exemple, en choisissant un écart-type du bruit d'état très grand (matrice \mathbf{A} avec une bande diagonale très large). Or cet algorithme au cours des itérations a tendance à dégrader la structure bande diagonale de la matrice \mathbf{A} interdisant ainsi certaines transition d'état. L'idée est de contraindre la matrice \mathbf{A} à rester bande diagonale en estimant à chaque itération, la variance du bruit d'état. Cet estimé permet de re-calculer la matrice \mathbf{A} afin de poursuivre les itérations du Baum-Welch.

On définit au préalable les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^r = (\pi^r, \mathbf{A}^r, \mathbf{B}) \\ \hat{a}_{ji}^r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_r}} \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{2\hat{\sigma}_r^2}\right) \\ \alpha_k^r(i) \triangleq \Pr(x_k = i | Z_k, \lambda^r) \\ \beta_k^r(i) \triangleq \Pr(x_k = i | z_{k+1}, \dots, z_K, \lambda^r), \end{array} \right. \quad (14)$$

où $\alpha_k^r(i)$ et $\beta_k^r(i)$ désignent les probabilités *Forward* et *Backward* normalisées à l'itération r (voir [1, 7, 9]) afin de s'affranchir des problèmes d'érosions numériques lorsque la dimension de l'image devient grande. L'algorithme présenté comporte deux étapes : initialisation et itérations jusqu'à convergence. Le tableau (1) présente les différentes étapes de ce nouvel algorithme. Les probabilités *Forward* et *backward* normalisées sont calculées à partir des probabilités de transitions obtenues par l'estimation du bruit d'état Gaussien à l'itération précédente.

5 Résultat de simulation

Les simulations ont été réalisées avec les paramètres suivants pour générer la marche aléatoire en fréquence : $K = 200$, $M = 256$, $\sigma_x = 1.1$, $\epsilon = 10^{-4}$ et un SNR de $-19dB$. La figure (1) représente le lofargramme brut avec une piste noyée. La piste à estimer est représentée par la figure (2). Les figures (3), (4) et (5) représentent respectivement la matrice \mathbf{A} à l'initialisation de l'algorithme, sans, et avec contrainte sur la structure de la bande diagonale. La sortie de l'algorithme est visualisée par la figure (6). La figure (7) représente l'erreur quadratique moyenne pour les deux approches.

6 Conclusion

L'algorithme présenté permet l'extraction de pistes fréquentielles ne suivant pas un modèle d'évolution déterministe. Une approche par chaîne de Markov a été retenue couplée à une stratégie Track Before Detect. En supposant un bruit d'état Gaussien pour le comportement de la piste, l'algorithme présenté a montré son efficacité pour l'extraction de cette piste sans la connaissance du rapport signal à bruit.

TAB. 1 – Algorithme d'extraction en aveugle d'une piste fréquentielle.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Initialisation } r = 0 \\ \quad - \text{ a) Choisir } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{M^2}{12} \text{ et } \hat{\pi}^0(i) = \frac{1}{M} \\ \quad - \text{ b) Calculer la matrice } \hat{\mathbf{A}}^0 = \{\hat{a}_{ji}^0\}_{i,j=0,\dots,M-1} \\ \quad \quad \text{à partir de l'équation (14)} \\ 2. \text{ Itérations sur } r \text{ tant que } |\hat{\sigma}_{r+1} - \hat{\sigma}_r| > \epsilon \\ \quad - \text{ a) } \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^r(i) = \hat{\pi}^r(i) \\ \alpha_k^r(i) = \frac{b_i(z_k) \sum_{j=0}^{M-1} \hat{a}_{ji}^r \alpha_{k-1}^r(j)}{\sum_{p=0}^{M-1} \left[b_p(z_k) \sum_{l=0}^{M-1} \hat{a}_{lp}^r \alpha_{k-1}^r(l) \right]} \\ \beta_k^r(i) = \frac{\sum_{j=0}^{M-1} b_j(z_k) \hat{a}_{ij}^r \beta_{k+1}^r(j)}{\sum_{p=0}^{M-1} \left[\sum_{l=0}^{M-1} \hat{a}_{pl}^r b_l(z_k) \beta_{k+1}^r(l) \right]} \\ \beta_K^r(i) = 1 \end{array} \right. \\ \quad - \text{ b) } \left\{ \begin{array}{l} \hat{\pi}^{r+1}(i) = \frac{\alpha_1^r(i) \beta_1^r(i)}{\sum_{j=0}^{M-1} \alpha_1^r(j) \beta_1^r(j)} \\ \hat{e}_{ji}^{r+1} = \frac{\hat{a}_{ji}^r \sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k^r(i) \beta_{k+1}^r(j) b_j(z_{k+1})}{\sum_{j=0}^{M-1} \left[\hat{a}_{ji}^r \sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k^r(i) \beta_{k+1}^r(j) b_j(z_{k+1}) \right]} \\ \hat{\sigma}_{r+1} = \sum_{j=0}^{M-1} j \hat{e}_{ji}^{r+1} \\ \hat{a}_{ji}^{r+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}_{r+1}}} \exp\left(-\frac{(i-j)^2}{2\hat{\sigma}_{r+1}^2}\right) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Cet algorithme peut être étendu au cas de l'extraction d'une piste fréquentielle discontinue, en couplant à la partie estimation, la détection des instants de présence [1].

Références

- [1] S. Paris, *Extraction de pistes fréquentielles en sonar passif par chaînes de Markov cachées*, vol. thèse de Doctorat. Université de Toulon et du Var, 6 Novembre 2000.
- [2] S. Paris, C. Jauffret, and G. Goulet, "Extraction et détection automatique de pistes fréquentielles en sonar passif," *GRESTI'99*, vol. 2, pp. 535–538, 14-17 September 1999.

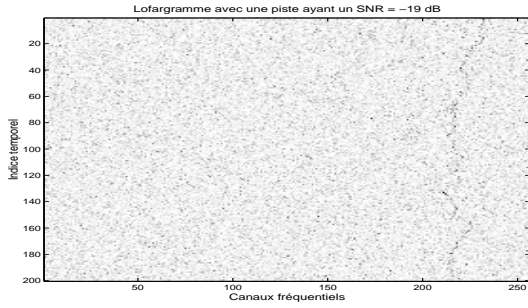


FIG. 1 – Lofargramme avec une piste fréquentielle avec un RSB de -19 dB.

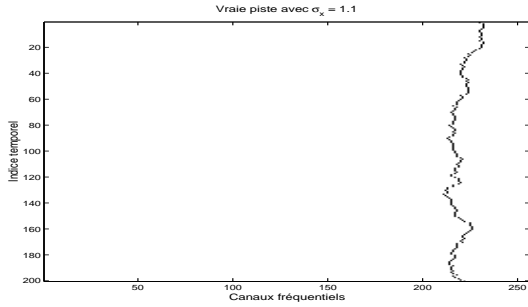


FIG. 2 – Vraie piste fréquentielle présente à l'intérieur du lofargramme.

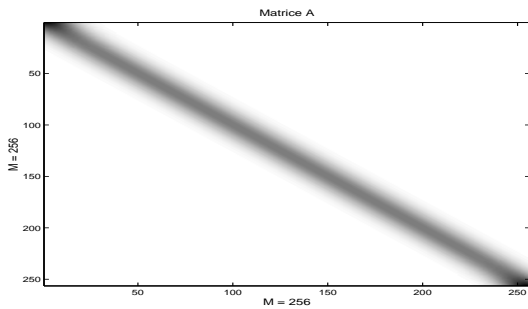


FIG. 3 – Matrice A initiale.

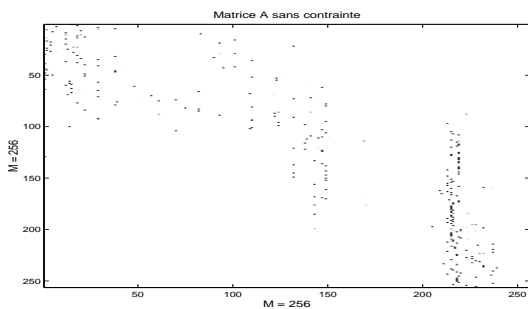


FIG. 4 – Matrice A sans intégrer la contrainte.

- [3] L. R. Rabiner, “A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition,” *IEEE ASSP Magazine*, vol. 77, no. 2, pp. 257–285, February 1989.
- [4] H. C. So, Y. T. Chan, Q. MA, and P. C. Ching, “Comparison of various periodograms for sinusoid detection and frequency estimation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, vol. 35, no. 3, pp. 945–

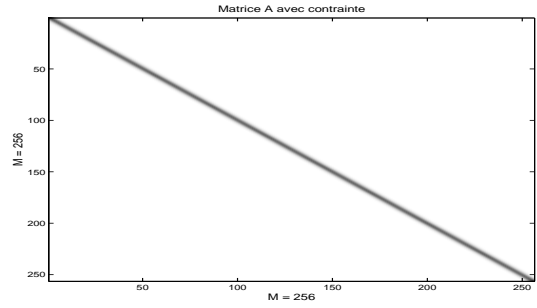


FIG. 5 – Matrice A en intégrant la contrainte.

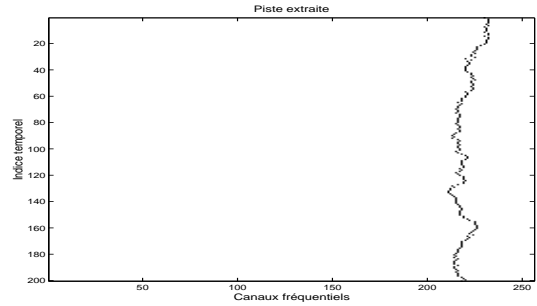


FIG. 6 – Piste extraite par l'algorithme.

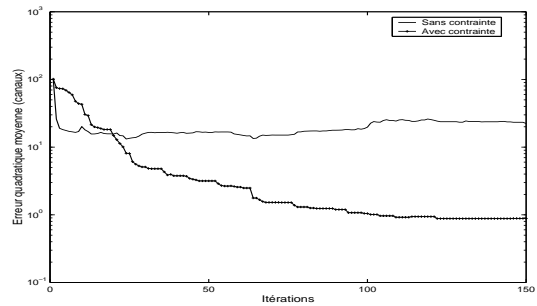


FIG. 7 – Erreur quadratique moyenne.

952, 1999.

- [5] B. H. Maranda and J. A. Fawcett, “Detection and localization of weak targets by space time integration,” *IEEE Journal of oceanic engineering*, vol. 16, no. 2, April 1991.
- [6] M. Solal, D. Pillon, and S. Bresseur, “Simultaneous detection and target motion analysis from conventional passive beam forming output,” *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, pp. 1321–1324, May 1991.
- [7] L. R. Rabiner and B. H. Juang, “An introduction to hidden markov models,” *IEEE ASSP Magazine*, vol. 3, pp. 4–16, January 1986.
- [8] T. K. Moon, “The expectation-maximization algorithm,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 47–60, November 1996.
- [9] G. D. Brushe, R. E. Mahony, and J. B. Moore, “A soft output hybrid algorithm for ml/map sequence estimation,” *IEEE Transactions on the Information Theory*, vol. 44, no. 7, pp. 3129–3134, November 1998.