

# Sur la diagonalisation conjointe approchée par un critère des moindres carrés

Serge Dégerine

Laboratoire de Modélisation et Calcul  
BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

Serge.Degerine@imag.fr

**Résumé** – Nous présentons un nouvel algorithme de diagonalisation conjointe approchée d'un ensemble de matrices. Utilisant le critère des moindres carrés, sans contrainte d'orthogonalité, il est comparé à un algorithme analogue pour la séparation de sources. Le critère de notre algorithme porte sur la matrice de séparation alors que l'autre porte sur la matrice de mélange. Ceci améliore de façon significative la vitesse de convergence avec de meilleures performances.

**Abstract** – A new algorithm for approximate joint diagonalization of a set of matrices is presented. Using the mean square criterium, without the orthogonality constraint, it is compared with an analogous algorithm for sources separation. The criterium of our algorithm is on the separating matrix while the other is on the mixing matrix. This improves significantly the rate of convergence with better performances.

## 1 Introduction

La diagonalisation conjointe approchée d'un ensemble de matrices symétriques réelles d'ordre  $m$ ,

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_J\},$$

où  $\mathbf{M}_0$  est définie positive, est un problème que l'on rencontre fréquemment en séparation de sources. Il a été introduit pour l'algorithme *JADE* [2] et repris dans l'algorithme *SOBI* [1]. L'objectif est de déterminer une matrice  $\mathbf{B}$ , dite matrice de séparation, de telle sorte que les matrices  $\mathbf{B}\mathbf{M}_j\mathbf{B}^T$ ,  $j = 0, \dots, J$ , soient le plus proche possible de matrices diagonales. Les algorithmes ci-dessus utilisent une étape préalable de blanchiment. Celle-ci consiste à transformer  $\mathcal{M}$  en un nouvel ensemble,

$$\overline{\mathcal{M}}_0 = \{\overline{\mathbf{M}}_j = \mathbf{W}\mathbf{M}_j\mathbf{W}^T, \quad j = 0, \dots, J\},$$

dans lequel  $\overline{\mathbf{M}}_0 = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{W}$  est la matrice de blanchiment. Pour une matrice orthogonale  $\mathbf{U}$  quelconque,  $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{W}$  réalise la diagonalisation exacte de  $\mathbf{M}_0$ . On se ramène ainsi à la diagonalisation conjointe approchée de  $\overline{\mathcal{M}}_0$  par une matrice orthogonale.

Soit  $Off(\mathbf{M}) = \sum_{k \neq l} m^2(l, k)$  la somme des carrés des éléments non diagonaux de  $\mathbf{M}$ . Le critère consiste à minimiser, par rapport à la matrice orthogonale  $\mathbf{U}$ ,

$$\mathcal{C}_{js}(\mathbf{U}; \overline{\mathcal{M}}_0) = \sum_{j=0}^J Off(\mathbf{U}\overline{\mathbf{M}}_j\mathbf{U}^T). \quad (1)$$

Soit  $\|\mathbf{M}\|_F^2 = trace(\mathbf{M}\mathbf{M}^T) = \sum_{l,k} m^2(l, k)$  le carré de la norme de Frobenius de  $\mathbf{M}$ . La minimisation de (1) équivaut à celle de

$$\mathcal{C}_{mcs}(\mathbf{U}, \overline{\mathcal{D}}_0; \overline{\mathcal{M}}_0) = \sum_{j=0}^J \|\overline{\mathbf{M}}_j - \mathbf{U}^T \overline{\mathbf{D}}_j \mathbf{U}\|_F^2, \quad (2)$$

par rapport à la matrice orthogonale  $\mathbf{U}$  et à l'ensemble des matrices diagonales,  $\overline{\mathcal{D}}_0 = \{\overline{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{I}, \overline{\mathbf{D}}_1, \dots, \overline{\mathbf{D}}_J\}$  [7]. Ce résultat est immédiat puisque :

$$\mathcal{C}_{mcs}(\mathbf{U}, \overline{\mathcal{D}}_0; \overline{\mathcal{M}}_0) = \sum_{j=0}^J \|\mathbf{U}\overline{\mathbf{M}}_j\mathbf{U}^T - \overline{\mathbf{D}}_j\|_F^2, \quad (3)$$

et qu'alors le minimum par rapport à  $\overline{\mathcal{D}}_0$  est donné par :

$$\widehat{\overline{\mathbf{D}}}_j = Diag(\mathbf{U}\overline{\mathbf{M}}_j\mathbf{U}^T), \quad j = 1, \dots, J,$$

où  $Diag(\mathbf{M})$  désigne la matrice diagonale définie par les éléments diagonaux de  $\mathbf{M}$ .

Ce critère est repris dans [8], sous la forme (2), en supprimant la contrainte d'orthogonalité sur  $\mathbf{U}$ , c'est-à-dire l'étape de blanchiment. Il s'agit donc de minimiser, par rapport à une matrice  $\mathbf{A}$  quelconque, représentant la matrice de mélange, et par rapport à un ensemble  $\mathcal{D} = \{\mathbf{D}_0, \dots, \mathbf{D}_J\}$  de matrices diagonales, le critère,

$$\mathcal{C}_{mca}(\mathbf{A}, \mathcal{D}; \mathcal{M}) = \sum_{j=0}^J \|\mathbf{M}_j - \mathbf{A}\mathbf{D}_j\mathbf{A}^T\|_F^2. \quad (4)$$

Nous proposons ici d'utiliser plutôt la forme (3), c'est-à-dire la minimisation par rapport à  $\mathbf{B}$  et à  $\mathcal{D}$  du critère,

$$\mathcal{C}_{mcb}(\mathbf{B}, \mathcal{D}; \mathcal{M}) = \sum_{j=0}^J \|\mathbf{B}\mathbf{M}_j\mathbf{B}^T - \mathbf{D}_j\|_F^2. \quad (5)$$

En effet, il n'y a pas vraiment de justification statistique à ces différents critères. Par ailleurs, le critère du maximum de vraisemblance utilisé dans [3], ou celui d'information mutuelle de [6], font ressortir de façon naturelle le paramètre  $\mathbf{B}$  plutôt que  $\mathbf{A}$ . De plus, il s'avère que la résolution de (5) est beaucoup plus simple et moins problématique que celle de (4).

Tous ces problèmes d'optimisation sont résolus de façon itérative selon le principe de relaxation. La minimisation de (1) est obtenue par une succession de rotations planes. La même démarche, mais sans la contrainte d'orthogonalité, est utilisée dans [5], bien que le critère soit différent et porte sur des matrices  $\mathbf{M}_j$  symétriques définies positives. Les minimisations de (4) et (5) entrelacent deux étapes. D'une part l'optimisation par rapport à  $\mathcal{D}$  lorsque  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$  sont fixés. La solution est alors explicite, mais beaucoup plus simple pour (5) que pour (4). D'autre part l'optimisation par rapport à  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{B}$  lorsque  $\mathcal{D}$  est fixé. Cette étape est réalisée en considérant successivement la solution par rapport à chaque colonne de  $\mathbf{A}$  ou ligne de

$\mathbf{B}$ , les autres étant fixées. Ici, le cas de (4) présente certaines difficultés que l'on ne retrouve pas dans (5).

## 2 Présentation de l'algorithme

Nous rappelons brièvement l'algorithme des moindres carrés formulé sur la matrice de mélange [8] afin de faciliter sa comparaison avec le nouvel algorithme basé sur la matrice de séparation.

### 2.1 Matrice de mélange

L'ambiguïté du facteur d'échelle entre la norme des colonnes de  $\mathbf{A}$  et  $\mathcal{D}$  dans l'expression (4) de  $\mathcal{C}_{mca}(\mathbf{A}, \mathcal{D}; \mathcal{M})$  est résolue en posant  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}$ , ce qui correspond à l'hypothèse de sources de puissance unité. L'algorithme procède par relaxation sur les paramètres  $\mathcal{D}$  et  $\mathbf{A}$  grâce aux deux points suivants.

#### 2.1.1 Minimisation par rapport à $\mathcal{D}$

La minimisation de (4) par rapport à  $\mathcal{D}$ , lorsque  $\mathbf{A}$  est fixé, est donnée, pour  $j = 0, \dots, J$ , par :

$$\hat{\mathbf{D}}_j = \text{Diag}\{[\mathbf{A}^T \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \text{diag}\{\mathbf{A}^T \mathbf{M}_j \mathbf{A}\}\},$$

où  $\odot$  est le produit (terme à terme) de Hadamard et  $\text{diag}(\mathbf{M})$  est le vecteur formé par la diagonale de  $\mathbf{M}$ .

#### 2.1.2 Minimisation par rapport à $\mathbf{A}$

La minimisation de (4) par rapport à  $\mathbf{A}$ , lorsque  $\mathcal{D}$  est fixé, est elle-même réalisée par relaxation sur les colonnes  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  de  $\mathbf{A}$ . Le minimum par rapport à la colonne  $\mathbf{a}_k$ , les autres étant fixées, est obtenu en fonction de la forme quadratique,

$$\mathbf{P}_k = \sum_{j=0}^J \mathbf{D}_j(k) \left[ \mathbf{M}_j - \sum_{i \neq k} \mathbf{D}_j(i) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \right]. \quad (6)$$

Si  $\mathbf{v}$  est le vecteur propre normalisé associé à la plus grande valeur propre  $\lambda$  de  $\mathbf{P}_k$ , alors,

$$\hat{\mathbf{a}}_k = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\sum_{j=0}^J \mathbf{D}_j^2(k)}} \mathbf{v},$$

si  $\lambda > 0$  et  $\hat{\mathbf{a}}_k = \mathbf{0}$  sinon.

#### 2.1.3 Principe de l'algorithme

L'algorithme consiste à construire, à partir de  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}$ , une suite de matrices  $\{\mathbf{A}_n, n \geq 0\}$  en alternant les deux phases ci-dessus. À la fin de la seconde phase, lorsque toutes les colonnes de  $\mathbf{A}$  ont été modifiées, celles-ci sont normalisées, de sorte à satisfaire la contrainte,

$$\text{Diag}\{\mathbf{B}_n \mathbf{M}_0 \mathbf{B}_n^T\} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n^{-1},$$

avant de passer à la première phase pour le nouveau calcul de  $\mathcal{D}$ . Le principe de relaxation assure la décroissance, au sens large, du critère. Mais ceci ne garantit pas la convergence de l'algorithme. Le test d'arrêt porte sur la proximité entre  $\mathbf{A}_{(k+1)m}$  et  $\mathbf{A}_{km}$ , c'est-à-dire après un cycle de modification de l'ensemble des colonnes de  $\mathbf{A}_{km}$ .

## 2.2 Matrice de séparation

Sans contrainte sur  $\mathbf{B}$  ou  $\mathcal{D}$  dans l'expression (5) du critère  $\mathcal{C}_{mcb}(\mathbf{B}, \mathcal{D}; \mathcal{M})$ , celui-ci est sans effet puisqu'il s'annule pour  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{D}_j = \mathbf{0}, j = 0, \dots, J$ . On choisit donc, comme dans (4), de restituer des sources de puissance unité en imposant  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}$ .

### 2.2.1 Minimisation par rapport à $\mathcal{D}$

Ici, la minimisation par rapport à  $\mathcal{D}$  est immédiate :

$$\hat{\mathbf{D}}_j = \text{Diag}\{\mathbf{B} \mathbf{M}_j \mathbf{B}^T\}, \quad j = 0, \dots, J.$$

Elle permet d'éliminer le paramètre nuisible  $\mathcal{D}$  du critère (5), dont la minimisation équivaut alors à celle de

$$\mathcal{C}_{mcb}(\mathbf{B}; \mathcal{M}) = \sum_{j=0}^J \text{Off}\{\mathbf{B} \mathbf{M}_j \mathbf{B}^T\}, \quad (7)$$

sous la contrainte  $\text{Diag}\{\mathbf{B} \mathbf{M}_0 \mathbf{B}^T\} = \mathbf{I}$ . Afin de ne pas alourdir les notations, nous utilisons les arguments de  $\mathcal{C}_{mcb}(\cdot)$  pour distinguer les différents critères.

### 2.2.2 Minimisation par rapport à $\mathbf{B}$

Cette minimisation est à nouveau réalisée par relaxation sur les vecteurs  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$  que constituent les lignes de  $\mathbf{B}$ . Reprenons (7) sous la forme :

$$\mathcal{C}_{mcb}(\mathbf{B}; \mathcal{M}) = \sum_{j=0}^J \sum_{l=1}^m \sum_{i \neq l} (\mathbf{b}_l^T \mathbf{M}_j \mathbf{b}_i)^2.$$

En conservant uniquement les termes faisant intervenir  $\mathbf{b}_l$ , on est conduit à minimiser :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{mcb}(\mathbf{b}_l; \mathcal{M}) &= \sum_{j=0}^J \sum_{i \neq l} (\mathbf{b}_l^T \mathbf{M}_j \mathbf{b}_i)^2 \\ &= \mathbf{b}_l^T \left\{ \sum_{j=0}^J \mathbf{M}_j \left[ \sum_{i \neq l} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \right] \mathbf{M}_j \right\} \mathbf{b}_l, \end{aligned}$$

sous la contrainte  $\mathbf{b}_l^T \mathbf{M}_0 \mathbf{b}_l = 1$ . Soit  $\mathbf{B}_{(l)}$  la matrice  $(m-1) \times m$  obtenue en supprimant la  $l^e$  ligne de  $\mathbf{B}$ . On a :

$$\sum_{i \neq l} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T = \mathbf{B}_{(l)}^T \mathbf{B}_{(l)} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} - \mathbf{b}_l \mathbf{b}_l^T.$$

Le minimum de  $\mathcal{C}_{mcb}(\mathbf{b}_l; \mathcal{M})$ , par rapport à  $\mathbf{b}_l$ , est réalisé par le vecteur  $\hat{\mathbf{b}}_l$  qui minimise la forme quadratique,

$$\mathbf{Q}_l = \sum_{j=0}^J \mathbf{M}_j \mathbf{B}_{(l)}^T \mathbf{B}_{(l)} \mathbf{M}_j,$$

sous la contrainte  $\hat{\mathbf{b}}_l^T \mathbf{M}_0 \hat{\mathbf{b}}_l = 1$ . En considérant le changement de variables que constitue l'étape de blanchiment,  $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{W}$ , la nouvelle solution  $\hat{\bar{\mathbf{b}}}_l$  est le vecteur propre normalisé associé à la plus petite valeur propre de la nouvelle forme quadratique :

$$\bar{\mathbf{Q}}_l = \sum_{j=0}^J \bar{\mathbf{M}}_j \bar{\mathbf{B}}_{(l)}^T \bar{\mathbf{B}}_{(l)} \bar{\mathbf{M}}_j. \quad (8)$$

### 2.2.3 Principe de l'algorithme

L'algorithme consiste donc à construire une suite de matrices  $\{\bar{\mathbf{B}}_n, n \geq 0\}$ , à partir de  $\bar{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{I}$ , en modifiant l'ensemble des lignes de  $\bar{\mathbf{B}}$  par la procédure ci-dessus. Notons qu'à chaque modification, la contrainte  $Diag\{\bar{\mathbf{B}}_n \bar{\mathbf{B}}_n^T\} = \mathbf{I}$  est automatiquement satisfaite. Le test d'arrêt porte sur la proximité entre  $\bar{\mathbf{B}}_{(k+1)m}$  et  $\bar{\mathbf{B}}_{km}$ . Après convergence, la matrice de séparation est estimée par  $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\bar{\mathbf{B}}}\mathbf{W}$ .

L'étape de blanchiment utilisée ici est un artifice de calcul. Elle montre cependant que cette approche équivaut à remplacer la contrainte d'orthogonalité,  $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ , dans (1) ou (3), par la contrainte plus faible,  $Diag\{\mathbf{U}\mathbf{U}^T\} = \mathbf{I}$ .

## 3 Étude du critère

### 3.1 Existence, invariance et unicité de la solution

#### 3.1.1 Existence

Les critères (1), (4) et (5), compte tenu des contraintes, sont minorés par zéro. Cette valeur est atteinte si et seulement si les éléments de  $\mathcal{M}$  sont simultanément diagonalisables, ce qui n'est presque sûrement pas le cas, mais correspond à la situation asymptotique. Ils sont continus et peuvent être considérés sur des domaines compacts. L'existence d'une solution est donc garantie. De plus, ils sont dérivables et le minimum est atteint à l'intérieur du domaine, c'est-à-dire en un point pour lequel le gradient est nul.

#### 3.1.2 Invariance

L'invariance naturelle souhaitable ici est la suivante : pour une matrice régulière  $\mathbf{R}$ , la transformation  $\mathbf{R}\mathbf{M}_j\mathbf{R}^T$ , appliquée aux éléments de  $\mathcal{M}$ , équivaut au changement de  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}$ . Seul  $\mathcal{C}_{mca}(\mathbf{A}, \mathcal{D}; \mathcal{M})$  ne satisfait pas cette propriété. Dans le cas de  $\mathcal{C}_{js}(\mathbf{U}; \bar{\mathbf{M}}_0)$ , il faut tenir compte de l'étape préalable de blanchiment.

#### 3.1.3 Unicité

En revenant au problème original de la séparation de sources, il est bien connu que la matrice de séparation  $\mathbf{B}$  n'est définie qu'à trois facteurs près d'indétermination, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par  $\mathbf{\Pi}\mathcal{E}\mathbf{\Delta}\mathbf{B}$  où  $\mathbf{\Pi}$  est un facteur de permutation (matrice carrée dont chaque ligne (et colonne) comporte un seul terme non nul alors égal à 1),  $\mathcal{E}$  est un facteur de signe (matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont égaux à  $\pm 1$ ) et  $\mathbf{\Delta}$  est un facteur d'échelle (matrice carrée diagonale dont les éléments diagonaux sont strictement positifs). Dans les algorithmes, le facteur d'échelle  $\mathbf{\Delta}$  est généralement éliminé par une normalisation adéquate, comme  $Diag\{\mathbf{B}\mathbf{M}_0\mathbf{B}^T\} = \mathbf{I}$ . On peut aussi s'abstraire des facteurs  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathcal{E}$  moyennant certaines conventions.

D'autre part, on sait que les méthodes du second ordre conduisent à la séparation uniquement lorsque les spectres normalisés des sources sont distincts. Cette condition se retrouve sous différentes formes dans les algorithmes mais ne cause pas de

réelles difficultés, car elle est souvent vérifiée en pratique. Elle sert en fait à garantir l'unicité dans le cas idéal de matrices simultanément diagonalisables. Ceci correspond aux situations asymptotiques et permet, par des arguments de continuité, d'espérer l'unicité de l'optimum global.

## 3.2 Convergence de l'algorithme

Le problème de la convergence des algorithmes est un point difficile qui n'est pas vraiment résolu, même dans le cas où l'unicité de l'optimum global est acquise. Les méthodes de relaxation, qui assurent l'amélioration du critère à chaque itération, sont certainement préférables aux méthodes de gradient, sans pour autant garantir la convergence.

### 3.2.1 Théorème de convergence

Un résultat général (cf. [4], Théorème 2.6 p. 173) permet d'obtenir la convergence sous des conditions raisonnables. Soit  $\mathcal{B} = \{\mathbf{B}_n, n \geq 0\}$  une suite bornée d'éléments de  $\mathbb{R}^{m^2}$  telle que  $\|\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_n\|_F^2$  tende vers zéro. Alors l'ensemble  $\mathcal{B}^*$  des points d'adhérence de  $\mathcal{B}$  est un continuum si cette suite ne converge pas (un continuum est un ensemble de points fermé qui ne peut pas être décomposé en la somme de deux ensembles fermés disjoints).

L'algorithme associé au critère  $\mathcal{C}_{js}(\mathbf{U}; \bar{\mathbf{M}}_0)$  est ainsi convergent lorsque l'ensemble des matrices  $\mathbf{U}^*$  annulant le gradient du critère n'est pas un continuum (cf. [9]). Pour  $\mathcal{C}_{mca}(\cdot)$ , l'auteur admet que l'unicité de la solution à chaque étape de relaxation suffit pour garantir la convergence [8]. Cette condition ne semble pas suffisante. Pour  $\mathcal{C}_{mcb}(\cdot)$ , elle consiste à supposer que la plus petite valeur propre de (8) est unique, au moins à partir d'un certain nombre de cycles. On fait l'hypothèse supplémentaire que l'écart entre cette valeur propre et la suivante reste minoré par une quantité strictement positive. Alors la convergence du critère implique la convergence vers zéro de  $\|\bar{\mathbf{B}}_{n+1} - \bar{\mathbf{B}}_n\|_F^2$ . Un élément  $\bar{\mathbf{B}}^*$ , adhérent à la suite  $\{\bar{\mathbf{B}}_n, n \geq 0\}$ , se caractérise par le fait que chacune de ses lignes  $\bar{\mathbf{b}}_l^*, l = 1, \dots, m$ , est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la forme quadratique  $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$  définie par (8). La convergence de l'algorithme est donc acquise lorsque l'ensemble de tels points  $\bar{\mathbf{B}}^*$  n'est pas un continuum.

### 3.2.2 Extrema locaux

Même si les conditions de convergence des algorithmes sont remplies, il reste que la limite peut correspondre à un minimum local. Les seuls résultats théoriques sur ce point vont plutôt dans le sens d'indiquer la présence d'extrema locaux. Ceci est d'ailleurs confirmé par les essais numériques.

## 3.3 Illustration

### 3.3.1 Description de l'expérience

Nous considérons un mélange instantané,  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t)$ , de trois sources autorégressives gaussiennes d'ordres 2, 3 et 4 et de puissance unité. Les modèles autorégressifs sont paramétrés par les autocorrélations partielles suivantes :

$$\{0, -.8; .5, -.2, .7; .2, -.7, -.4, .9\}.$$

La matrice de mélange  $\mathbf{A}$  et la matrice de séparation  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$  sont données par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -.2 & -1.1 & .5 \\ .3 & 2.9 & -1 \\ 0 & -1.5 & .5 \end{bmatrix}.$$

Les éléments de  $\mathcal{M}$  sont les matrices de covariances empiriques symétrisées du signal observé, considérées à différents retards  $j = 0, 1, \dots, 6$ ,

$$\mathbf{M}_j = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{R}}_j + \hat{\mathbf{R}}_j^T], \quad \hat{\mathbf{R}}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t-j)^T.$$

La taille  $T$  des séquences simulées ainsi que le nombre  $r$  de répétitions utilisées sont indiquées dans le Tableau 1. Les sources restituées sont de puissance unité, ce qui correspond à la contrainte  $\text{Diag}\{\hat{\mathbf{B}}\mathbf{M}_0\hat{\mathbf{B}}^T\} = \mathbf{I}$ . Le test d'arrêt porte sur l'écart  $\mathbf{E}$  entre deux itérés successifs à un cycle de transformations, par exemple  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{B}}_{(k+1)m} - \hat{\mathbf{B}}_{km}$ , sous la forme  $\sum_{l,k} |e(l,k)| < 9 \times 10^{-4}$ .

### 3.3.2 Résultats

Pour chaque répétition, on détermine la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_i = \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{A}$ , par permutation et changement de signe éventuel de ses lignes, pour laquelle la somme des termes diagonaux (alors positifs) est maximale. On considère l'indice de performance basé sur l'erreur de prédiction finale [10],

$$I_{EPF} = \sum_{l,k} EQM\{\hat{\mathbf{C}}(l,k)\} = IE\{\|\hat{\mathbf{S}}(t_0) - \mathbf{S}(t_0)\|^2\}.$$

Il est estimé en utilisant la version empirique de l' $EQM$ ,

$$EQM\{\hat{\mathbf{C}}(l,k)\} \simeq \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r [\hat{\mathbf{C}}_i(l,k) - \delta_{l,k}]^2,$$

où  $\delta_{l,k} = 1$  si  $l = k$ , 0 sinon. Cet indice tend vers zéro comme  $1/T$  et le Tableau 1 indique les valeurs de  $T \times I_{EPF}$ . Le critère "Cycles" représente la valeur moyenne, par rapport au nombre  $r$  de répétitions, du nombre de cycles pour le calcul de  $\hat{\mathbf{C}}_i$ .

### 3.3.3 Commentaires

Dans le cadre du second ordre, et en l'absence de bruit additif, les méthodes  $MCA$  et  $MCB$  n'améliorent pas les performances de  $SOBI$ , au contraire, et ce avec une vitesse de convergence beaucoup plus faible, voire catastrophique dans le cas de  $MCA$ . Les simulations reportées dans [8] montrent que  $MCA$  améliore les performances de  $JADE$  (méthode utilisant les cumulants d'ordre 4), en présence d'un bruit additif faible, lorsque  $T$  est supérieur à 13000. L'objectif ici est plutôt de comparer  $MCB$  à  $MCA$ . Cette formulation du critère des moindres carrés conduit à un algorithme beaucoup plus rapide que  $MCA$ , tout en améliorant de façon significative les performances. Les problèmes de convergence de  $MCA$  sont dus au fait que la forme quadratique (6) est souvent définie négative. L'initialisation par  $SOBI$  ( $MCB^*$ ,  $MCA^*$ ) augmente la vitesse et confirme aussi la présence de minima locaux pour le critère  $\mathcal{C}_{mca}(\cdot)$ . La valeur de  $T \times I_{EPF}$  pour  $MCA$  (resp.  $MCA^*$ ), lorsque  $T = 50$ , est peu fiable car, malgré un nombre maximal de cycles fixé à 50.000 (resp. 500.000), on a observé 387 (resp. 108) cas pour lesquels la convergence de l'algorithme n'a pas eu lieu. Le critère "Cycles" est calculé sur les seuls cas ayant convergé.

Taille et répétitions	Méthode	$SOBI$	$MCB$	$MCB^*$	$MCA$	$MCA^*$
	Critère					
$T = 50$ $r = 10000$	$T \times I_{EPF}$	31.32	31.76	31.76	64.10	56.65
	Cycles	3.0	24.2	11.7	6545	7632
$T = 250$ $r = 2000$	$T \times I_{EPF}$	36.13	36.93	36.93	47.65	42.28
	Cycles	2.7	17.6	6.7	3729	520
$T = 500$ $r = 1000$	$T \times I_{EPF}$	36.61	37.43	37.43	45.54	41.40
	Cycles	2.5	17.4	5.8	3151	317
$T = 1000$ $r = 500$	$T \times I_{EPF}$	37.74	38.49	38.49	46.59	41.28
	Cycles	2.4	17.7	5.0	2815	185
$T = 10000$ $r = 50$	$T \times I_{EPF}$	42.08	42.73	42.72	77.75	45.46
	Cycles	2.0	19.4	3.4	2498	11.9
$T = 100000$ $r = 10$	$T \times I_{EPF}$	28.72	29.40	29.33	35.06	31.98
	Cycles	2.0	19.3	2.4	2726	4.7

TAB. 1: Performance et vitesse de convergence des méthodes en fonction de la taille de la séquence observée

## Références

- [1] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso and E. Moulines. *A Blind Source Separation Technique Using Second-Order Statistics*. IEEE, Trans. on Signal Processing, Vol. SP-45, pp. 434-444, February 1997.
- [2] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac. *Blind beamforming for non Gaussian signals*. IEE Proceedings-F, Vol. 140, No. 6, pp. 362-370, 1993.
- [3] S. Dégerine et A. Zaïdi. *Maximum de vraisemblance exact pour la séparation aveugle d'un mélange instantané de sources autorégressives gaussiennes*. in Proc. XVII Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images. Vannes, France, pp. 1141-1144, septembre 1999.
- [4] A.-M. Ostrowski. *Solution of equations in Euclidean and Banach spaces*. 3<sup>rd</sup> edition, Academic Press, New York, 1973.
- [5] D.T. Pham. *Joint approximate diagonalization of positive definite Hermitian matrices*. À paraître dans SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2001.
- [6] D.T. Pham. *Blind Separation of Instantaneous Mixture of Sources via the Gaussian Mutual Information Criterion*. À paraître dans Signal Processing, 2001.
- [7] M. Wax and J. Sheinvald. *A Least-Square Approach to Joint Diagonalization*. IEEE Signals Processing Letters, Vol. 4, No. 2, February 1997.
- [8] A. Yeredor. *Approximate joint diagonalization using non-orthogonal matrices*. In Proceeding of the Second International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, Helsinki, Finland, pp. 33-38, June 2000.
- [9] A. Zaïdi. *Maximum de vraisemblance exact pour la séparation aveugle d'un mélange instantané de sources autorégressives gaussiennes*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, Décembre 2000.
- [10] A. Zaïdi. *Un nouvel indice de performance et sa borne inférieure*. in Proc. XVIII Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images. Toulouse, France, septembre 2001.