

Transformation Mojette en dimension n

Pierre VERBERT, JeanPierre GUÉDON

IRCCyN-IVC UMR CNRS 6597

Ecole Centrale de Nantes

1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes, France

{pierre.verbert, jean-pierre.guedon}@polytech.univ-nantes.fr

Résumé – La transformation Mojette (déjà présentée en 2D et 3D au Gretsì [1]) représente un signal discret par un ensemble fini d’hyperplans. Cette transformée permet un très grand nombre de choix (directions des hyperplans, nombre, ordre de spline) tout en gardant une complexité opératoire très faible comparable à la FFT. Dans ce papier, la transformation Mojette en dimension n est présentée et les résultats acquis en dimension 2 et 3 sont généralisés. Deux exemples d’applications illustrent l’intérêt pour cette généralisation.

Abstract – The Mojette transform (already presented in 2D and 3D at previous Gretsì editions) allows to represent a discrete signal from a finite set of hyper-planes. This very generic transform (many projection directions, choice of the number of projections, spline order) always ensures a very low complexity comparable to the FFT. In this paper, the Mojette transform in dimension n is presented and results issued from 2D and 3D cases are generalized. Two applicatives examples enlight the interest for this generalization.

1 Introduction

Pendant les cinquante dernières années, les sciences de l’ingénieur ont vécu sur le paradigme de la décomposition du type vecteurs/valeurs propres. Les transformées de Fourier et Ondelettes en sont un exemple : on a eu besoin d’ordonner les coefficients dans le domaine transformé afin de pouvoir faire de la détection, du codage, de la compression d’information. Aujourd’hui, on cherche plutôt à exploiter des transformées qui n’“ordonnent” pas les coefficients mais au contraire qui fournissent des représentations très redondantes afin de mieux choisir un morceau de la représentation adaptée à un problème donné. C’est le cas des représentations temps-fréquence ou de la transformée Mojette. Cette dernière possède la particularité de n’agir que dans le domaine spatial comme rappelé dans la section 2.

2 Transformation Mojette en dimension n

2.1 Rappel en dimension 2

La transformation Mojette est une version linéaire discrète exacte de la transformée de Radon [2]. La transformée Mojette 2D, dénotée par Mf produit des droites de projection $proj(p, q, b)$ pour des angles $\theta = \arctan(p/q)$ où $pgcd(p, q) = 1$:

$$Mf(i, j) = proj(p, q, b) = \sum_i \sum_j f(i, j) \Delta(b + qk - pl), \quad (1)$$

où Δ est le symbole de Kronecker et b indice un point de la projection (dénoté par bin dans la suite). L’ordre de complexité de cette transformation et de la transformation inverse est linéaire par rapport au nombre de pixels N et au nombre de projections $I : O(IN)$.

On peut définir la notion de redondance en 2D [3] comme le surplus du nombre de bins vis-à-vis du nombre de pixels de la forme,

$$Red_{2D} = \frac{\#bins}{\#pix} - 1. \quad (2)$$

Rappelons que pour une image de taille $P \times Q$, le nombre de bins est $\#bins(p, q) = (Q - 1)|p| + (P - 1)|q| + 1$.

Rappelons également une condition de reconstructibilité sur ce support : le critère de Katz [4] :

$$\text{Si } \sum_{i=1}^I p_i \geq P \text{ ou } \sum_{i=1}^I q_i \geq Q, \quad (3)$$

alors l’image est reconstructible. Cette transformation présentée ici en 2D a été étendue en nD .

2.2 Définition

En dimension n , la transformation Mojette du volume $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s’exprime par les hyperplans de direction (v_1, \dots, v_n) et où chaque bin b_i est indicé sur la maille générée par les projections de la maille de départ :

$$Mf(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta \left(B + P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right). \quad (4)$$

où $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ et

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{-v_1}{v_n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{-v_2}{v_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{-v_{n-1}}{v_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

(cas général où $v_n \neq 0$).

Puisque l'on obtient une nouvelle maille sur les hyperplans, la transformation peut être récursivement appliquée pour descendre en dimension avec toutefois une redondance créée à chaque étape. Par exemple, un volume de dimension 3 de $X_1 \times X_2 \times X_3$ voxels produit des plans discrets de direction (v_1, v_2, v_3) composés d'un nombre de bins :

$$\begin{aligned} \#bin(X_1, X_2, X_3, v_1, v_2, v_3) = & (X_1 - 1) \cdot (X_2 - 1) \cdot |v_3| + \\ & + (X_2 - 1) \cdot (X_3 - 1) \cdot |v_1| + (X_3 - 1) \cdot (X_1 - 1) \cdot |v_2| + \\ & + (X_3 - 1) \cdot |pgcd(v_1, v_2)| + (X_1 - 1) \cdot |pgcd(v_2, v_3)| + \\ & + (X_2 - 1) \cdot |pgcd(v_3, v_1)| + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Les trois tableaux suivants comparent le nombre de bins dans le cas 2D et le cas 3D. En 2D on prend un support de taille $(X_1, X_2) = (1024 \times 128, 8)$ et en 3D un support $(X_1, X_2, X_3) = (1024, 128, 8)$, ce qui correspond à la même quantité d'information, i.e. le nombre de pixels est identique au nombre de voxels.

TAB. 1 – Nombre de bins 2D et 3D

<i>proj 2D</i>	(0 1)	(1 1)	(1 2)	(1 4)
<i>#bin 2D</i>	131072	131079	262150	524292
<i>proj 3D</i>	(0 0 1)	(1 0 1)	(1 0 2)	(1 0 4)
<i>#bin 3D</i>	131072	131968	262912	524800

TAB. 2 – Nombre de bins total et redondance

	2D	3D
<i>#bin total</i>	1048593	1050752
<i>Red</i>	$1.62 \cdot 10^{-5}$	$2.07 \cdot 10^{-3}$

On note que le nombre de bins total générés dans le cas 3D est supérieur au cas 2D, pour la même quantité d'information initiale et pour le même nombre de projections. Le fait de passer à des dimensions supérieures a donc un coût en termes de redondance lorsque l'on utilise cette définition de la transformée en dimension n.

Les bins des hyperplans obtenus peuvent eux mêmes être projetés sur des droites par une transformation Mojette 2D. On peut également effectuer une transformation projective directe de de 3D vers 1D (ou plus généralement de dimension n vers une dimension M inférieure) qui abaisse le coût de la redondance mais qui ne possède pas à ce jour de conditions mathématiques de reconstruction.

2.3 Complexité

Dans le cas 2D, lorsque l'on dispose de N pixels et de I projections, il est évident que le calcul des projections est de complexité $O(IN)$. Bien que plus délicat à montrer, on obtient la même complexité pour l'algorithme inverse. Pour ce faire il faut disposer de trois types de correspondances. La première est l'image des pixels et les vecteurs de bins. La seconde est la forme de l'image (pixels de valeurs 1 si dans la forme ou zéro s'ils n'y sont pas). La troisième correspondance gère la relation entre un indicage 2D des pixels (du type $f(k,l)$) et un indicage 1D de ces mêmes pixels (du type $f(index)$). La correspondance directe entre index et (k,l) indique pour un bin donné la position du pixel en regard pour effectuer une rétroprojection.

Dans le cas nD, la complexité opératoire reste identique. En d'autres termes, l'utilisation de la correspondance d'indice entre dimension n et dimension (n-1) permet d'obtenir un algorithme régulier où pour chaque ixel à reconstruire, on a un bin donné, la position de l'ixel correspondant (pour rétroprojeter la valeur du bin dans l'ixel) avant de mettre à jour un seul bin sur chacune des I projections.

Il est à noter que la comparaison avec l'algorithme de la FFT (même complexité) est en faveur de la Mojette. En effet, on ne réalise que des additions/soustractions et surtout, l'ordre de reconstruction à un instant donné n'est pas fixé : n'importe quelle correspondance 1-1 peut être utilisée sans modifier la complexité.

2.4 Théorème de la tranche centrale

Le théorème de la tranche centrale, utilisé en tomographie assure que la transformée de Fourier d'une projection dans l'espace de Radon correspond à la transformée de Fourier de l'hypervolume restreinte à une tranche (hyperplan passant par l'origine du domaine de Fourier). Nous avons montré que cette propriété est également vérifiée en discret pour la transformée Mojette en utilisant la transformée en Z [5] à la fois du volume original et de la transformée en Z des projections décrites sur une maille ad'hoc.

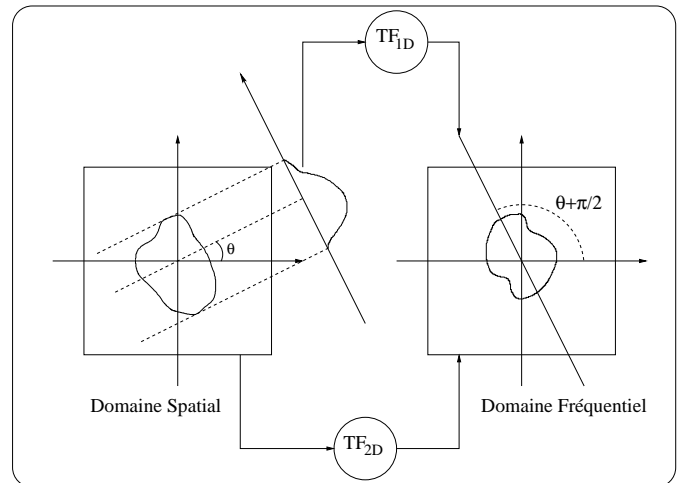


FIG. 1 – Tranche centrale en continu

Le problème classique de passage entre domaines de

Fourier et de Radon (Jacobien polaire \rightarrow rectangulaire) est donc remplacé par le choix de la maille unitaire sur la projection (dépendante de l'orientation). Comme pour la comparaison entre transformées de Radon et Mojette, on remplace donc le problème mal-posé de la tomographie par un passage aisé de par la correspondance des structures d'échantillonnage entre espaces Mojette et Z.

Soit une image $f(x_1, x_2)$. Le support de l'image est un support rectangulaire discret $P \times Q$. La transformée en z de ce support s'écrit :

$$F(z_1, z_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) z^{-x_1} z^{-x_2}. \quad (7)$$

Soit $g(b)$ une projection de l'image dans la direction (p, q) , b étant l'indice de bin sur la droite de projection.

$$g(b) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \delta(b - px_1 + qx_2). \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_b g(b) z^{-b} \\ &= \sum_b \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \delta(b - px_1 + qx_2) z^{-b} \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \sum_b \delta(b - px_1 + qx_2) z^{-b} \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) z^{-qx_1 + px_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

La direction orthogonale à (p, q) , d'angle orienté $\theta + \pi/2$ est $(-p/q)$. Donc pour $z_1 = z^{-q}$ et $z_2 = z^p$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} F(z^{-q}, z^p) &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) z^{-qx_1 + px_2} \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) (z^{-q})^{-x_1} (z^p)^{x_2} \\ &= G(z). \end{aligned} \quad (10)$$

On retrouve là une formulation du théorème de la tranche centrale en utilisant des projections Mojette 2D. Bien qu'existant en nD, le résultat présenté ici est en 2D pour des raisons de commodités d'écriture mathématique.

3 Application

La première application en dimension n concerne la représentation d'un train binaire par des projections et la transmission dans un contexte de description multiple [6]. Les données initiales sont réparties sur un volume n-dimensionnel. On va effectuer plusieurs projections en cascade de façon à "descendre en dimension". Le système décrit ci-après s'appuie sur le schéma de la figure 3. On génère d'abord une série d'hyperplans de dimension (n-1). Ces hyperplans sont ensuite réorganisés (empilés sur la dernière dimension) de façon à former un nouvel hypervolume de dimension n. Un nouvel hyperplan est généré par addition-modulo pour servir de code correcteur à l'instar de la technologie RAID. Ainsi si un hyperplan est perdu pendant son transport sur le réseau, on peut le

régénérer à partir de cet hyperplan supplémentaire. Cependant ces hyperplans sont encore trop volumineux pour être transmis tels quels sur le réseau, la taille des paquets est trop petite pour contenir une projection. De plus le système doit autoriser une perte de trois paquets (un paquet étant constitué d'une projection) sur le réseau. Dans ce cas, le système peut corriger la perte d'un paquet (grâce à l'hyperplan additionnel). Cependant la perte de deux paquets (c'est à dire deux projections) ne permet plus de reconstruire le volume initial. Une deuxième série de projections est maintenant calculée. Chacun des hyperplans est à nouveau projetés dans cinq directions différentes déterminés de façon à ce que juste quatre projections (de dimension (n-2)) quelconques parmi les cinq soient suffisantes pour assurer la reconstruction. Les hyperplans de dimension (n-2) ainsi générés formeront les paquets qui seront transmis sur le réseau. Dans cette configuration la perte de n'importe quel jeu de trois paquets parmi tous les paquets transmis n'empêchent jamais la reconstruction des hyperplans de dimension (n-1), donc également celle de l'hypervolume de dimension n. Ce système réalise donc une protection des données à deux niveaux différents. Le premier niveau (description par les hyperplans de dimension (n-1)) joue sur la corrélation entre les données introduite par l'opération d'addition modulo, le deuxième (hyperplans de dimension (n-2)) utilise les propriétés de frame de la transformée mojette pour réaliser une adéquation avec les contraintes réseau (taille des paquets, temps de décodage). On voit ici l'avantage d'utiliser la transformée en dimension n : les paquets générés en dimension 2 auraient eu une taille trop grande pour respecter les contraintes réseau.

On considère une image 1024×1024 codée sur 16 bits remappée en tant que train binaire sur un volume 3D de $512 \times 512 \times 64 = 16777216$ voxels, i.e 2Mo de données à transmettre. Le jeu de projections de 3D vers 2D choisi est $\{(1, 0, 16), (-1, 0, 16), (3, 0, 16), (3, 0, 16)\}$. Chacun des hyperplans de dimension 2 contient environ 4250000 bins, i.e. 500Ko, soit un total de 2.5Mo à transmettre, puisqu'on a 5 hyperplans à transmettre. La redondance générée par cette première étape est donc de 25%. Les projection de direction $(1, 0, 16)$ et $(3, 0, 16)$ génèrent des hyperplans de taille respectives 8240×512 et 8366×512 . On va donc choisir l'ensemble de projections de 2D vers 1D suivant $\{(1, 128), (-1, 128), (3, 128), (-3, 128), (5, 128)\}$. N'importe quel sous-ensemble de quatre projections permet en effet la reconstruction des plans. Chacune des droites générée par cet ensemble contient environ 1000000 bins, i.e. 128 Ko, soit 640Ko au total pour chacun des plans à reconstruire (environ 28% de redondance). On transmettra donc au total 3.2Mo par paquets de 128Ko.

Lorsque 3 projections sont perdues, il y a deux cas de figure :

1. Les 3 projections décrivent 1 seul hyperplan : celui sera reconstruit grâce à l'hyperplan additionnel.
2. Dans le plus mauvais cas de figure, on a perdu 2 projections sur les 5 d'un hyperplan (qui ne sera pas reconstruit) mais l'autre projection perdue n'influe pas sur la reconstruction de l'hyperplan que cette projec-

tion décrivait et donc la reconstruction est toujours possible.

Dans certaines configurations, on peut même perdre plus de trois paquets. Par exemple si on perd une projection (une droite) dans chaque ensemble de projection 2D vers 1D, i.e. 5 paquets, on pourra quand même reconstruire tous les plans et donc également le volume initial.

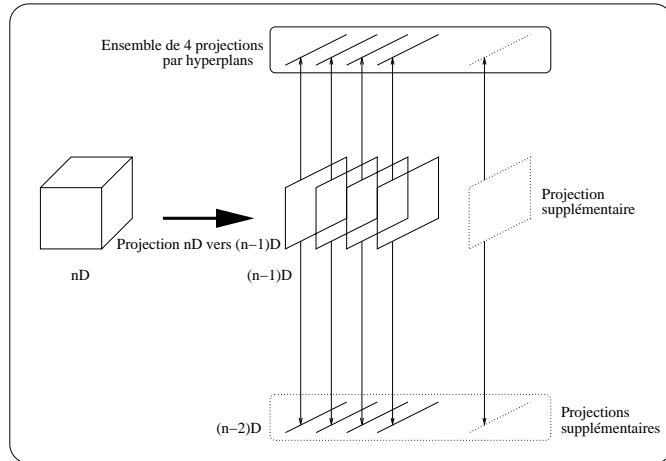


FIG. 2 – Code correcteur nD

Une autre application en 3D sans hypothèse de convexité est la reconstruction en tomographie par positons (TEP). C'est un cas de figure où l'on acquiert directement la valeur des bins (incrément unitaire pour une détection d'un couple de positons) mais pas des projections complètes. Par contre, le bruit Poissonien propre à la source oblige à englober l'algorithme de Mojette inverse 3D dans une phase d'optimisation stochastique. On obtient alors un algorithme itératif assez proche de l'ART¹ mais avec une contrainte géométrique (due à la Mojette) beaucoup plus forte. Le premier avantage est la description des bins présents sous la forme arborescente (ce qui est important dans le contexte TEP pour gérer les données), le second avantage est le contrôle obtenu par les primitives géométriques sur l'ensemble possible des solutions.

Ces deux types d'applications sont en cours d'évaluation. La relaxe de la contrainte de convexité donne à penser que beaucoup d'autres applications sont à venir pour ce type de codage.

4 Conclusion

Dans ce papier, les principaux résultats de la transformation Mojette acquis précédemment en dimension 2 et 3 ont été généralisés à la dimension n. On retrouve une expression du nombre de bins par hyperplan de projection lorsque l'hypervolume de départ est rectangulaire, la même complexité quelque soit la dimension, le théorème de la tranche centrale qui relie via la transformée en Z les espaces de départ et Mojette. La redondance augmente de façon relativement peu importante selon la dimension. Un exemple dans le domaine des réseaux montre l'intérêt

que peut avoir le passage en dimension n pour la projection de flux (description multiple) et ce, en vérifiant les contraintes techniques du domaine (taille de paquets faible vis à vis de la taille du flux à transmettre, temps de décodage réduit). D'autres applications en image sont naissantes et prometteuses.

5 Remerciements

Nous remercions le Pr. Najim pour avoir porté notre attention sur la référence [5].

Références

- [1] JP. Guédon, N. Normand, S. Lecoq *Transformation Mojette en 3D : Mise en œuvre et application en synthèse d'images*. GRETSI XVII, pp. 427-430, Septembre 1999.
- [2] J. Radon *Über die bestimmung von functionen durch ihre integrawerte langs gewisser mannigfaltigkeiten*. Math-Phys, 69(K1) :pp. 262-267, 1917.
- [3] N. Normand, JP. Guédon *La transformée Mojette : une représentation redondante pour l'image*. Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, section informatique théorique, pp.124-128, Janvier 1998
- [4] M. Katz *Questions of uniqueness and resolution in reconstruction from projections* Springer Verlag, 1977
- [5] D.E. Dudgeon and R.M. Mersereau *Multidimensional Digital Signal Processing*. Prentice-Hall edition, pp. 379-383, 1984
- [6] N. Normand, B. Parrein *Description multiple par transformation de Radon discrète exacte* GRETSI XVIII, Septembre 2001

¹ART : Algebraic Reconstruction Technique