Dix-septième colloque GRETSI, Vannes, 13-17 septembre 1999

Sur la robustesse des filtres adaptatifs en poursuite de non-stationnarités markoviennes

Hichem BESBES[1,2], Meriem JAIDANE-SAIDANE[1,4], Jelel EZZINE[3,4]

[1]Laboratoire des Systèmes de Télécommunication, ENIT.

[2]Sup'Com, Km 3.5, route de Raoued, cité El Ghazala 2083 TUNISIA.

[3]Laboratoire d'Analyse et Commande des Systèmes, ENIT

[4]ENIT, Campus Universitaire, B.P 37 Le Belvédère, 1002 TUNISIE.

hichem.besbes@supcom.rnu.tn, meriem.jaidane@enit.rnu.tn, jelel.ezzine@enit.rnu.tn

Résumé – Dans cet article, nous étudions l'influence des statistiques d'ordre supérieur à deux de l'entrée, sur les performances des filtres adaptatifs, en terme de capacité de poursuite de non stationnarités. Nous proposons une démarche pour la conception de nouveaux algorithmes robustes, et nous présentons un premier résultat : le robuste LMS

Abstract – In this paper, we analyse the influence of input statistics on the tracking performances of adaptive filters. New proposed approach is presented, in order to design robust algorithms. As a first result, we present a new algorithm "R-LMS" wich has better robustness regarding to the input statistics

1 Introduction

L'optimisation des systèmes de transmission dans le contexte réel doublement non stationnaire de l'entrée et du canal, nécessite, en particulier, que le comportement du filtre adaptatif change peu en fonction de la nature du signal d'entrée. Pour un algorithme donné, on exige donc une maitrise de mesure des performances optimales de l'algorithme, à savoir vitesse de convergence optimale, capacité de poursuite optimale, pas d'adaptation optimal...

Or, une telle exigence, ne peut pas être satisfaite en adoptant les approches classiques. En effet ces approches ne sont valables que pour les faibles pas d'adaptation et ne considèrent que les statistiques d'ordre 2 de l'entrée.

Le but de cette étude est de mettre l'accent sur la sensibilité des performances de l'algorithme LMS face aux variations des statistiques d'ordre supérieur à deux de l'entrée et ce, dans un contexte non stationnaire du canal. Nous proposons ensuite une démarche de conception de nouveaux algorithmes, basée sur une approche analytique de normalisation du LMS. On illustrera cette démarche par la conception d'un nouveau algorithme : R-LMS.

2 Influence des statistiques de l'entrée sur la capacité de poursuite

Considérons le problème général d'identification d'un canal non-stationnaire par un filtre adaptatif, piloté par le LMS. Les non-stationnarités aléatoires traitées ici, sont modélisèes par un modèle markovien d'ordre 1 :

$$F_{k+1} = (1-\eta)F_k + \Omega_k \tag{1}$$

Ω_k étant le bruit qui caractérise la non-stationnarité du canal.
La mise à jour des paramètres du filtre adaptatif est de la forme suivante:

$$\begin{aligned} H_{k+1} = &\ H_k + \mu e_k X_k \\ = &\ H_k + \mu\left(X_k^T(F_k - H_k) + n_k\right)X_k, \end{aligned} \tag{2}$$

où $X_k = (x_k, x_{k-1}, ..., x_{k-L+1})^T$ est le vecteur observation de l'entrée, L est la longueur du filtre F_k, n_k est le bruit d'observation et μ est un pas d'adaptation positif.

La mesure des performances d'un filtre adaptatif en terme de capacité de poursuite, est faite à partir de l'Erreur Quadratique Moyenne Résiduelle, définie par :

$$EQMR = \frac{E(e_k^2) - E(n_k^2)}{E(n_k^2)} \tag{3}$$

En adoptant les approches classiques, telles que la méthode de l'ODE ou bien en optant pour le calcul direct utilisant l'hypothèse d'indépendance [1, 2], les performances du filtre adaptatif peuvent être évaluées par :

$$\begin{aligned} EQMR = &\ \frac{1}{2\,E(n_k^2)} trace\left((\mu\, R_x + \eta I)^{-1} R_x R_\Omega\right) \\ &+ \frac{1}{2} L\,\mu\, E(x_k^2) \end{aligned} \tag{4}$$

Où R_x et R_Ω sont les matrices de covariances de X_k et de Ω_k.

L'analyse de cette dernière équation semble montrer que pour deux entrées différentes ayant les mêmes statistiques d'ordre 2 (même puissance et même matrice de covariance R_x), le filtre adaptatif présente les mêmes performances et ce, indépendemment des statistiques d'ordre supérieur à deux. Ainsi, pour des entrées ayant des distributions différentes mais les mêmes statistiques d'ordre deux, il semble que l'on obtienne la même valeur de l'EQMR minimale, le même pas d'adaptation optimal et le même pas d'adaptation critique. Ce résultat est inexact comme le montre l'exemple simple suivant. En effet, considèrons le seul cas où l'hypothèse d'indépendance est vérifiée, c'est à dire le cas d'un problème de contrôle automatique de gain, ($L = 1$), et d'une entrée i.i.d., l'EQMR exacte est alors donnée par :

$$EQMR = \frac{2\delta}{(2-\mu\frac{z_x}{p_x})(2-\eta)\left((1-\eta)\mu p_x+\eta\right)} + \frac{\mu p_x}{2-\mu\frac{z_x}{p_x}} \qquad (5)$$

avec $p_x = E(x_k^2)$ est la puissance de l'entrée, $z_x = E(x_k^4)$ caractérise les statistiques d'ordre quatre de l'entrée et $\delta = \frac{p_x p_\Omega}{p_n}$ caractérise le degré de non-stationnarité du canal [1].

L'analyse d'une telle équation, montre bien que l'EQMR dépend des statistiques d'ordre 4 de l'entrée.

Ainsi, considèrons le cas plus général d'un canal markovien d'ordre 1, de longueur $L = 2$, $\eta = 0.16$ et un bruit Ω_k i.i.d ayant une corrélation spatiale : $R_\Omega = 0.05\begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$. Le bruit d'observation, à la sortie du canal, est i.id ayant une puissance $E(n_k^2) = 0.05$. Ce canal est excité par des entrées i.i.d de puissance $E(x_k^2) = 1$, mais suivant des lois de distribution différentes : gaussienne, uniforme continue, uniforme sur 2 niveaux,...

La figure (1) représente l'évolution de l'EQMR en fonction du pas d'adaptation et de la nature de l'entrée. Elle montre ainsi les grandes variations du pas d'adaptation critique et de la valeur de l'$EQMR$ optimale en fonction des statistiques de l'entrée. De plus, le pas d'adaptation optimal n'est pas le même dans toutes les situations. Or, une mauvaise estimation du pas optimal peut dégrader sensiblement les performances relatives à une entrée supposée à module constant alors qu'elle est gaussienne. Pourtant, l'approche classique prédit un même comportement de l'algorithme pour les différentes entrées.

Un tel résultat est dû à l'influence des statistiques d'ordre supérieur à deux sur les performances du LMS. Pour mettre en évidence ce fait, il faut disposer d'une approche d'analyse qui permette de déterminer les performances d'un algorithme donné, d'une façon exacte, utilisant moins d'hypothèses simplificatrices.

Nous présentons dans ce qui suit une nouvelle démarche, pour la conception de nouveaux algorithmes robustes, basée sur une approche analytique de normalisation du LMS. Cette approche devient possible lorsque l'on considère le cas particulier de la transmission de données, où les signaux d'entrées appartiennent à un alphabet fini. Nous proposons ainsi, un premier résultat de cette approche : le R-LMS.

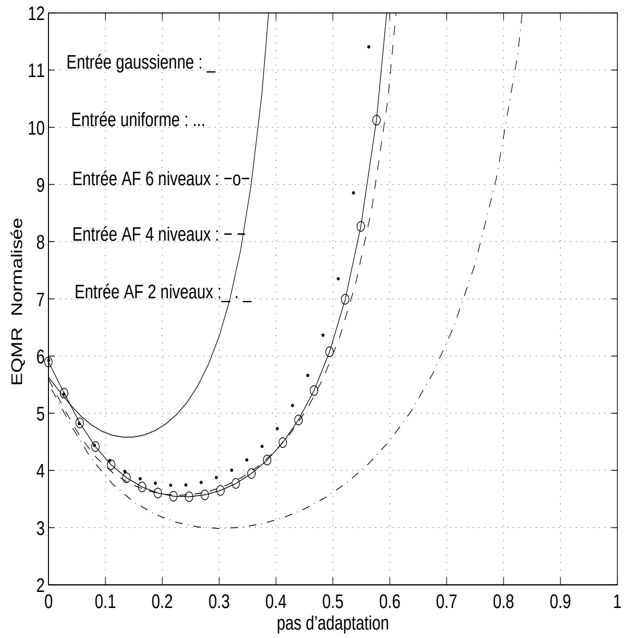

FIG. 1: Influence des statistiques d'ordre supérieur à deux sur la capacité de poursuite du LMS

3 Algorithme normalisé R-LMS

Dans des travaux antérieurs, nous avons développé une approche exacte d'analyse des filtres adaptatifs dans le contexte alphabet fini de l'entrée [3, 4]. Dans cette étude, nous allons utiliser l'approche proposée afin de concevoir un algorithme qui soit peu sensible aux variations des statistiques de l'entrée. L'algorithme proposé, pilotant le filtre adaptatif peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$H_{k+1} = H_k + \mu f(X_k)\left(X_k^T(F_k - H_k) + n_k\right). \qquad (6)$$

La fonction $f(.)$ peut être sans mémoire ou à mémoire finie. Elle est appliquée afin d'atteindre l'un des buts suivants :

1. Assurer un domaine D assez stable pour que le pas d'adaptation puisse couvrir à la fois le μ_{opt}^{tr} relatif à la vitesse de convergence et le μ_{opt}^{pr} relatif à la capacité de poursuite optimale.
2. Rendre le filtre adaptatif insensible aux statistiques de l'entrée : pour une corrélation donnée et une puissance donnée, le domaine D ne doit pas dépendre de l'alphabet ; ou bien, pour un alphabet donné, le domaine D ne dépendra pas de la corrélation de l'entrée.

En adoptant une forme particulière de $f(.)$, on peut établir des formes compactes des évolutions de la valeur moyenne et de la moyenne quadratique relatives aux filtres, et en déduire, en choisissant un critère d'optimisation, la fonction qui répond à l'exigence du concepteur [5].

Pour illustrer cette approche de conception, on va choisir une fonction $f(.)$ de façon à ce que l'EQMR atteigne son minimum pour la même valeur du pas d'adaptation et ce indépendemment de la nature de l'entrée.

Pour simplifier l'analyse, on va considèrer une fonction $f(.)$ sans mémoire. L'évolution du vecteur déviation devient :

$$V_{k+1} = (I - \mu f(X_k)X_k^T)V_k + \eta F_k + \mu f(X_k)n_k - \Omega_k \quad (7)$$

Afin de garantir la stabilité de l'algorithme, on va choisir une fonction $f(.)$ de façon telle que le produit scalaire $f(X_k)^T X_k$ soit toujours positif. Dans le cas contraire, les valeurs propres de $(I - \mu f(X_k)X_k^T)$ seraient > 1, ce qui peut causer la divergence de l'algorithme.

Par ailleurs, puisque X_k appartient à un alphabet $\{W_i\}$, alors $f(X_k)$ appartient à un alphabet $f(W_i)$ appelé $\{U_i\}$. Il faut donc, déterminer les U_i afin d'assurer un domaine de stabilité assez large et insensible aux variations des statistiques de l'entrée.

Afin de s'assurer que le produit scalaire $U_i^T W_i$ est positif, on peut choisir, en particulier, des vecteurs U_i colinéaires avec les W_i, on aura donc à déterminer les vecteurs U_i de la forme suivante :

$$U_i = \xi_i W_i, \text{ avec } \xi_i > 0$$

Sachant que la variation du comportement du LMS est due essentiellement aux variations des statistiques d'ordre quatre de l'entrée, on peut réduire l'influence de ces statistiques, en imposant une nouvelle contrainte :

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} U_i^T W_i Prob(X_k = W_i)}{\sum_{i=1}^{N} (U_i^T W_i)^2 Prob(X_k = W_i)} = \text{constante.} \quad (8)$$

Il est à noter, que ce problème n'a pas une solution unique. La solution la plus simple à considèrer, en choisissant la constante égale à 1 par exemple, est :

$$\xi_i = \xi = \frac{E(\|X_k\|^2)}{E(\|X_k\|^4)}, \forall i \quad (9)$$

Il est important de noter que ce paramètre dépend de la corrélation et des statistiques d'ordre quatre de l'entrée. L'algorithme résultant, se met donc sous la forme suivante :

$$H_{k+1} = H_k + \mu\, \xi X_k e_k = H_k + \mu\, \frac{E(\|X_k\|^2)}{E(\|X_k\|^4)} X_k e_k. \quad (10)$$

Il faut remarquer qu'un tel algorithme a une certaine similitude avec les algorithmes normalisés qui eux sont robustes vis à vis des variations de la puissance de l'entrée. Il s'agit ici d'une toute autre approche où l'algorithme est cette fois ci, pour une puissance donnée, robuste vis à vis des variations des statistiques d'ordre 4 de l'entrée.

Il est à noter que l'introduction du paramètre ξ ne va pas modifier les performances optimales de l'algorithme, à savoir la vitesse de convergence maximale et l'EQMR minimale, mais il va permettre de normaliser les valeurs des pas d'adaptation optimaux.

Pour illustrer les performances de l'algorithme proposé, nous avons considèré le même exemple de simulation que précédemment. L'évolution de l'EQMR en fonction de μ est donnée par la figure (2).

Elle montre la stabilité de cet algorithme vis à vis des variations des statistiques de l'entrée. Il est important de noter que la zone des pas μ pour lesquels l'EQMR est minimale est la même pour toutes les entrées. Le domaine de stabilité de cet algorithme est plus important que celui relatif à l'algorithme LMS. L'algorithme présente le même comportement asymptotique pour les pas d'adaptation élevés.

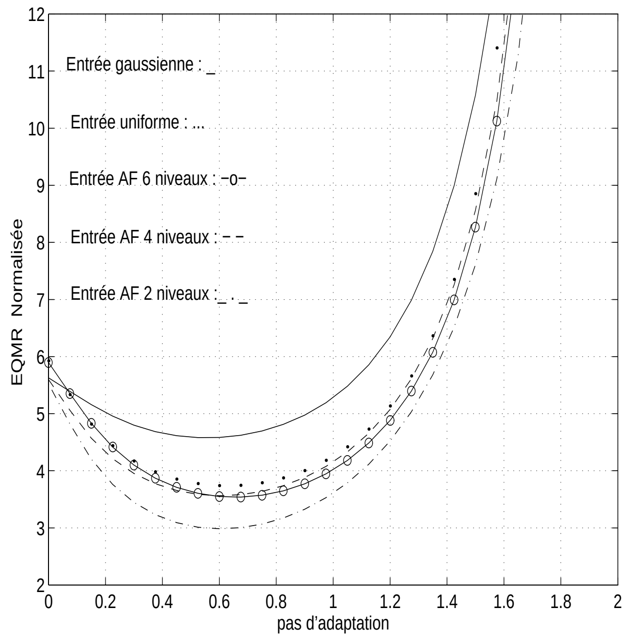

FIG. 2: Variation de l'EQMR en fonction de μ pour l'algorithme proposé

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons mis l'accent sur l'influence des statistiques d'ordre supérieur à deux de l'entrée, sur les performances des filtres adaptatifs, en terme de capacité de poursuite de non stationnarités. Nous avons proposé une démarche pour la conception de nouveaux algorithmes robustes, qui généralise d'une certaine manière la classe des algorithmes normalisés.

Références

[1] M. Turki, O. Macchi, M. Jaidane and H. Besbes, "Poursuite adaptative de non stationnarités markoviennes du deuxieme ordre : Appliquée à l'identification des canaux de transmissions radios mobiles", Proc. 15th GRETSI Symp - JUAN les PINS, Sep 1995.

[2] E. Eweda, "Comparison of RLS, LMS and Sign algorithms for tracking randomly time-varying channels ", IEEE Trans. on signal processing, volume 42, N 11, pp 2937-2942, Nov, 94

[3] H. Besbes, M. Jaidane-Saidane and J. Ezzine, "On Exact Convergence Results of Adaptive Filters: the Finite Alphabet Case", submitted Dec 1997 (revised Jul 1998) to Int. J. Signal Processing of EURASIP.

[4] H. Besbes, M. Jaidane-Saidane and J. Ezzine, " Exact analysis of the tracking capability of time-varying channels: the finite alphabet input case." in Proc. of 5^{th} IEEE Int.Conf. on Elect. Circ and Systems ICECS'98, pp 449-452, 7-10 Sept 1998, Lisboa, Portugal.

[5] H.Besbes, Y. Ben Jemâa, M. Jaidane, " Exact convergence analysis of Affine Projection Algorithm: the finite alphabet inputs case." in ICASSP'99 Phoenix March 1999.