

# Etude analytique du compromis entre séquences de signature et codage correcteur pour les systèmes CDMA à interférence multi-utilisateur non gaussienne.

Arnaud JULLIAN

CELAR/TCOM/TR  
BP 7419, 35174 BRUZ CEDEX  
jullian@celar.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous considérons un système hybride SFH/DS-CDMA\* binaire asynchrone avec codage correcteur. Nous considérons de plus des utilisateurs de puissances différentes, et des séquences de signature aléatoires et variables dans le temps. Deux systèmes sont analysés, l'un utilisant le récepteur "Single User" classique, et l'autre faisant appel à un récepteur multi-utilisateur de type "Projection Receiver". Pour ces deux systèmes, nous étudions *analytiquement* le compromis entre codage de canal et étalement par séquence de signature sous bruit blanc, afin d'optimiser l'utilisation du gain de traitement disponible.

**Abstract** – In this paper, we consider a binary asynchronous hybrid SFH/DS-CDMA †system with error-control coding on AWGN channels. We assume the case of transmitters of unequal powers and random time-varying signature sequences. Two systems are studied, one with the classical "Single User" receiver, and one with a multiuser "Projection Receiver". For both, we *analytically* investigate the trade-off between channel coding and signature sequence spreading to optimise the use of the available processing gain.

## 1 Introduction

Les systèmes militaires de communications par satellite sont caractérisés par une demande accrue tant en termes de débits que de nombre d'utilisateurs simultanés. Aussi, il devient essentiel que le gain de traitement disponible soit utilisé efficacement.

Dans cet article, nous nous intéressons à un système hybride SFH/DS-CDMA binaire asynchrone faisant appel à du codage correcteur. Nous considérons de plus des utilisateurs de puissances différentes. L'étalement total et l'étalement par saut de fréquence lent (SFH) sont fixés. Nous étudions alors analytiquement le compromis entre codage de canal et étalement par séquence de signature en terme de performances sous bruit blanc, pour un récepteur conventionnel de type "Single User", ainsi que pour un récepteur multi-utilisateur de type "Projection Receiver" [1].

Cet compromis a d'ores et déjà été partiellement étudié dans le cas du récepteur "Single User" [4]: il est le plus souvent évalué pour des structures de code données, en simulant différents systèmes comprenant différentes proportions de codage de canal et d'étalement par séquence de signature. En ce qui concerne la réception multi-utilisateur, le compromis a été très peu étudié [6] car l'intérêt pour la réception multi-utilisateur des systèmes CDMA codés est lui-même assez récent [1, 3]. Nous retiendrons ici une approche analytique.

Cet article s'organise de la façon suivante. La section 2 modélise brièvement le système DS-CDMA. Dans la section 3, nous décrivons le récepteur "single-user", puis présentons les performances du système codé en utilisant

l'Approximation Gaussienne Standard (SGA). Nous montrons que cette approximation n'est pas toujours précise, et que le compromis étudié disparaît quand la SGA est utilisée. Nous nous tournons alors vers l'Approximation par Séries de Fourier (FSA) et généralisons le calcul FSA aux systèmes DS-CDMA codés non équilibrés. Ceci nous permet alors d'étudier notre compromis. Quoi qu'il en soit, les puissances différentes des utilisateurs provoquent un effet "near-far" important. Dans la section 4, nous retenons par conséquent un récepteur multi-utilisateur PR [1] et reprenons notre analyse du compromis entre codage de canal et étalement par séquence de signature.

## 2 Modélisation du système

Le modèle considéré est similaire à celui décrit dans [7]. Le système est un système SFH/DS-CDMA asynchrone binaire avec  $K$  utilisateurs simultanés. Le gain d'étalement par SFH est fixé, et le gain d'étalement par séquence directe  $F$  se répartit entre le codage de canal (de rendement  $R_c$ ) et l'étalement par séquence de signature ( $N$  chips). Aussi, nous avons  $F = N/R_c$ . Après le désétalement de fréquence, le signal reçu en entrée du récepteur DS-CDMA est  $r(t)$  avec :

$$r(t) = \sum_{k=1}^K \sqrt{2.P_k} a_k(t - \tau_k) . b_k(t - \tau_k) \cdot \cos(\omega_c t + \theta_k) + n(t) \quad (1)$$

$b_k(t)$  est le signal codé de l'utilisateur  $k$ . Les bits codés sont de durée  $T_{cod} = R_c.T_b$  avec  $T_b$  la durée d'un bit d'information.

$a_k(t)$  est la signature normalisée de l'utilisateur  $k$ . Nous considérons pour chaque utilisateur une séquence de signature déterministe très longue constituée de chips choisis aléatoirement. Les symboles sont alors étalés par une partie seulement de la séquence de signature. Pour simplifier, nous modéliserons ces séquences par des séquences aléatoires : la durée de la signature sera  $T_{cod}$ . Celle-ci sera constituée de seulement  $N$  chips dont la durée sera  $T_c$  ( $T_{cod} = N.T_c$ ). La séquence de signature de chaque utilisateur sera aléatoire et variera pour chaque symbole codé émis.

La forme du chip est  $\psi(t)$ .  $\theta_k$  et  $\tau_k$  sont respectivement les retards en phase et en temps de l'utilisateur  $k$  par rapport au signal de l'utilisateur 1.  $P_k$  est la puissance du signal transmis par l'utilisateur  $k$ , et  $\omega_c$  la pulsation du signal en bande passante.  $n(t)$  est le bruit additif blanc gaussien introduit par le canal, de densité spectrale de puissance  $N_0/2$ .

Dans cet article, nous considérons la réception de l'utilisateur 1, et prenons pour hypothèse que ses bits codés émis  $b_{1,i}$  ont pour valeur  $(-1)$ .

### 3 Récepteur "single-user"

#### 3.1 Description

En considérant que le récepteur est synchronisé en phase et en temps avec l'utilisateur 1, la statistique de décision est donnée par :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{1,i} &= \int_{i.T_{cod}}^{(i+1).T_{cod}} r(t).a_1(t). \cos(\omega_c.t) dt \\ \Upsilon_{1,i} &= \sqrt{\frac{P_1}{2}}.b_{1,i}.T_{cod} + Z_{1,i} + \nu_i \end{aligned} \quad (2)$$

où  $Z_{1,i}$  est l'Interférence d'Accès Multiple (MAI) qui perturbe le bit codé  $i$  de l'utilisateur 1.  $\nu_i$  est une variable aléatoire gaussienne de variance  $\sigma^2 = N_0 T_{cod}/4$  qui correspond au bruit thermique après passage dans le filtre adapté.

#### 3.2 Performance avec la SGA

Nous nous intéressons aux performances de systèmes codés. La probabilité d'erreur bit d'un système codé est  $P_b$  tel que  $P_b \leq \sum_{d=d_{min}}^n c(d).P(d)$  avec  $d_{min}$  la distance minimale du code et  $P(d)$  la probabilité de choisir un chemin à la distance de Hamming  $d$  du chemin correct.  $c(d)$  est le nombre de bit d'information erronés résultant du choix d'un chemin à la distance  $d$  du chemin correct. Il est possible de calculer  $P(d)$ , et :

$$P(d) = Q \left( \sqrt{\frac{R_c d}{\frac{1}{3F} \cdot \frac{\sum_{k=2}^K P_k}{P_1} + \frac{N_0}{2E_b}}} \right) \quad (3)$$

#### 3.3 Performance avec la FSA

Récemment, plusieurs articles ont proposé un développement en séries infinies pour le calcul de probabilité d'erreur d'un système DS-CDMA sans codage correcteur, et

sans faire appel à une approximation gaussienne pour la MAI [8, 9]. Cette technique repose sur une Approximation en Séries de Fourier (FSA) [5, 7]. Nous allons maintenant généraliser ce calcul FSA pour les systèmes DS-CDMA codés afin de trouver  $P(d)$ .

Nous pouvons calculer la probabilité de choisir un chemin à la distance  $d$  du chemin correct conditionnellement à la MAI  $Z_1 = \sum_{i=1}^d Z_{1,i}$ . Cette probabilité doit alors être intégrée suivant la distribution de  $Z_1$ . En posant  $\Phi_{Z_1}(\omega)$  la fonction caractéristique de la variable aléatoire  $Z_1$ , on a :

$$P(d) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1; m+2}^M \frac{e^{-m^2 \omega^2 / 2} . \sin(m \omega g_0 / \sigma)}{m} \cdot \Phi_{Z_1} \left( -\frac{m \omega}{\sigma} \right) \quad (4)$$

où  $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2 = \frac{N_0 . d . T_{cod}}{4}$  est la variance de la variable aléatoire  $\nu = \sum_{i=1}^d \nu_i$ , et où  $g_0 = \sqrt{\frac{P_1}{2}} . d . T_{cod}$ .  $M$  est le nombre de termes pris en considération dans le développement en série infinie de la fonction  $Q(\cdot)$  conduit dans [5].

Nous calculons  $\Phi_{Z_1}(\omega)$  pour un système DS-CDMA codé avec des séquences de signature aléatoires. On trouve :

$$\begin{aligned} \Phi_{Z_1}(\omega) &= \prod_{k=2}^K \frac{2}{\pi . T_c} \cdot \int_0^{T_c} \int_0^{\pi/2} \\ &\left( \left( \frac{1}{2} \right)^{N-1} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} B(\theta_k, S_k) \right)^d . d\theta_k dS_k \end{aligned}$$

avec <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} B(\theta_k, S_k) &= \left[ \cos(\omega . \alpha_k . \hat{R}_\psi(S_k) . \cos\theta_k) \right] \\ &\cdot \left[ \cos(\omega . \alpha_k . R_\psi(S_k) . \cos\theta_k) \right] \\ &\cdot \left[ \cos\left(\frac{N-1+j}{2}\right) (\omega . \alpha_k . f(S_k) . \cos\theta_k) \right] \\ &\cdot \left[ \cos\left(\frac{N-1-j}{2}\right) (\omega . \alpha_k . g(S_k) . \cos\theta_k) \right] \end{aligned}$$

#### 3.4 Compromis entre codage de canal et étalement par séquence de signature

Tout d'abord, comparons les résultats obtenus avec la SGA et la FSA. La figure 1 représente les performances d'un système DS-CDMA avec un codage convolutif (3, 1/2) et un gain d'étalement DS  $F = 70$  pour  $K = 32$  utilisateurs. Les performances sont données pour la SGA et la FSA dans deux cas différents. Dans le premier, les  $K$  utilisateurs ont la même puissance. Dans le second, un des utilisateurs interférents est 13 dB plus puissant que les autres. La SGA et la FSA donnent des performances similaires pour le système équilibré, mais la SGA devient optimiste dans le cas d'un système non équilibré<sup>2</sup>.

Considérons maintenant la répartition du gain de traitement DS entre le codage de canal et l'étalement par séquence de signature. Pour cela, nous essayons dans un premier temps d'utiliser l'évaluation SGA des performances

1. où :  $\alpha_k = \sqrt{P_k/2}$  et  $R_\psi(S) = \int_0^S \psi(t)\psi(t+T_c-S).dt$ ,  $\hat{R}_\psi(S) = \int_S^{T_c} \psi(t)\psi(t-S).dt$   
2. système avec peu d'utilisateurs, système avec un utilisateur dominant, etc...

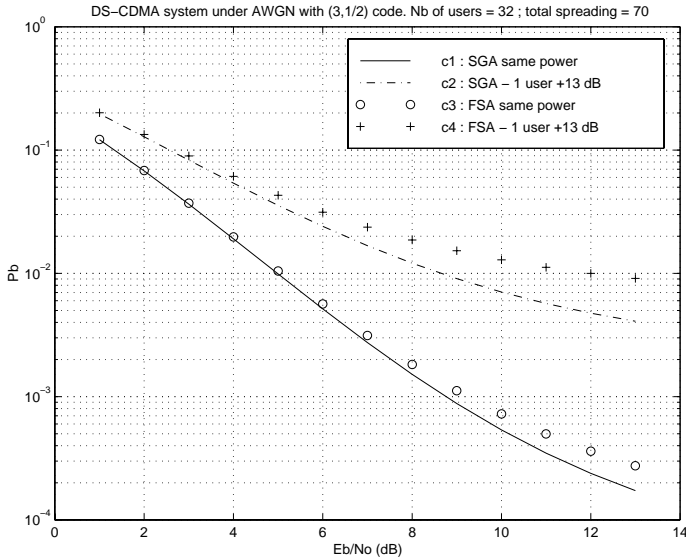


FIG. 1: Performances sous bruit blanc d'un système DS-SS-CDMA avec  $K = 32$  utilisateurs et un étalement total DS-SS  $F = 70$  avec les approximations SGA et FSA. Récepteur "Single User".

du système. Or, on voit éq. (3) que pour une valeur de  $F$  donnée, la répartition du gain de traitement entre  $N$  et  $R_c$  ne joue aucun rôle.  $P(d)$  dépend uniquement de  $(R_c d)$  et de  $F$ . En conséquence, le compromis est complètement masqué par l'approximation gaussienne, et ne peut être étudié qu'avec la FSA.

Pour l'évaluation FSA du compromis, nous considérons le même système avec un utilisateur 13 dB plus puissant que les autres. Les performances sont représentées figure 2 pour  $E_b/N_0 = 7$  dB.

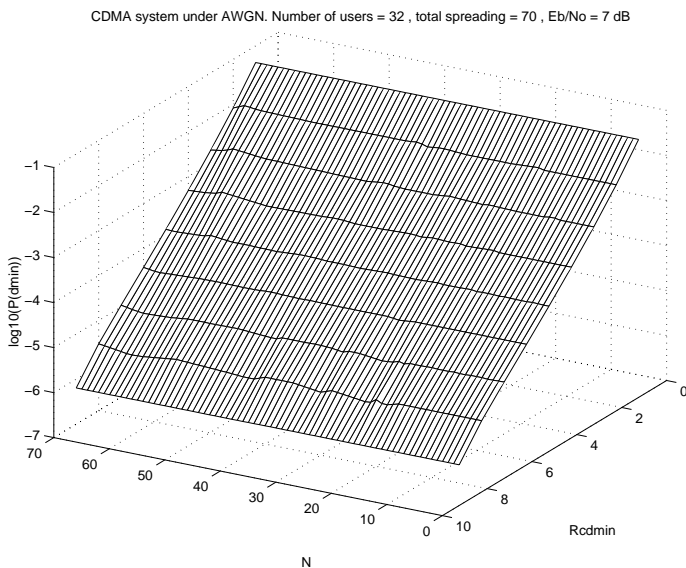


FIG. 2: Système DS-SS-CDMA sous bruit blanc avec  $K = 32$  utilisateurs et un gain de traitement total  $F = 70$ , pour  $E_b/N_0 = 7$  dB. Récepteur "Single User" et 1 utilisateur 13 dB plus puissant que les autres.

La figure 2 montre que l'influence de la répartition de  $F$  entre  $N$  et  $R_c$  est presque négligeable devant l'influence

de  $(R_c d_{min})$ . Néanmoins, la séquence de signature doit être la plus longue possible pour  $(R_c d_{min})$  constant. De plus, on voit figure 2 que l'influence de la répartition est indépendante de  $(R_c d_{min})$ .

Le fait que la répartition de  $F$  entre  $N$  et  $R_c$  n'ait quasiment aucune influence sur les performances du système avec des séquences de signature aléatoires n'est pas surprenant. En effet, comme le compromis est masqué par la SGA, il est possible de prévoir que l'influence de la répartition n'est pas importante pour des systèmes équilibrés avec de nombreux utilisateurs et des séquences de signature aléatoires. Le fait que notre système ne soit pas équilibré ne modifie pas cette situation.

Sur la figure 1, la forte dégradation des performances due à la présence d'un utilisateur interférent est très inquiétante. Avec 5 utilisateurs à +13 dB, le système serait inutilisable... Pour cette raison, nous nous tournons maintenant vers un récepteur multi-utilisateur afin de réduire la MAI.

## 4 Récepteur "Projection Receiver"

### 4.1 Description

Le récepteur "Projection Receiver" (PR) est un détecteur multi-utilisateur qui effectue une maximisation hybride contrainte/non contrainte du critère ML. Une description approfondie de ce récepteur est effectuée dans [1, 3]. Ce récepteur est basé sur des projections orthogonales (alors que le récepteur Décorrélateur (DC) utilise des projections non-orthogonales). Aussi, le récepteur PR normalise la variance du bruit projeté pour les différents symboles, et est par conséquent approprié aux métriques euclidiennes utilisées par le décodage de canal.

La probabilité  $P(d)$  avec le récepteur PR et pour des transmissions asynchrones est donnée [3] par :

$$P(d) = Q \left( \sqrt{\frac{2 \cdot E_b \cdot R_c \cdot d}{N_0} \cdot \frac{N - K + 1}{N}} \right)$$

### 4.2 Compromis entre codage de canal et étalement par séquence de signature

Pour analyser le compromis, nous considérons le même système CDMA non équilibré avec un utilisateur 13 dB plus puissant que les autres. La performance  $P(d_{min})$  est représentée figure 3. Cette performance est évaluée pour  $K \leq N \leq F^3$ .

Sur la figure 3, on voit que l'influence de la répartition de  $F$  entre  $N$  et  $R_c$  n'est plus du tout négligeable par rapport à celle de  $(R_c d_{min})$ . De plus, l'influence de cette répartition sur les performances du système augmente maintenant avec  $(R_c d_{min})$  pour le récepteur PR.

Néanmoins, l'utilisation du récepteur PR au lieu du récepteur "Single User" n'améliore pas toujours les performances du système. En effet, si on compare les figures 2 et 3, on constate que l'utilisation du récepteur PR ne conduit

3. En effet, la matrice d'intercorrélacion devient singulière pour  $N < K$ .

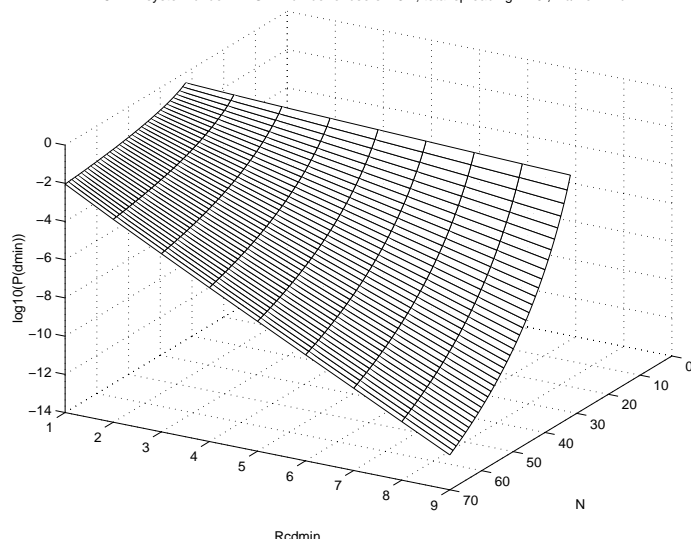


FIG. 3: *Système DS-CDMA sous bruit blanc avec  $K = 32$  utilisateurs et un gain d'étalement total  $F = 70$ , pour  $E_b/N_0 = 7$  dB. Récepteur multi-utilisateur "Projection Receiver" et 1 utilisateur 13 dB plus puissant que les autres.*

à une amélioration des performances que pour  $N \geq 42$ , quelle que soit la valeur de  $(R_{cdmin})$ .

## 5 Conclusion

Nous avons étudié un système CDMA codé asynchrone ayant des séquences de signature aléatoires, et nous avons analysé le compromis entre codage de canal et étalement par séquence de signature pour le récepteur "Single User" et le récepteur multi-utilisateur "Projection Receiver".

Le compromis s'est révélé inexistant pour le récepteur "Single User" : seule influe la valeur du gain de codage. Avec le récepteur PR, le choix des proportions relatives de codage de canal et d'étalement par séquence de signature peut soit améliorer les performances du système, soit au contraire dégrader ces performances en deçà même de celles obtenues avec le récepteur "Single User".

Les développements futurs conduiront à étudier ce même compromis entre codage de canal et étalement par séquence de signature pour les récepteurs multi-utilisateur itératifs récemment proposés [2], qui approchent la borne "Single User".

## Références

- [1] Alexander P. D., *A Linear Receiver for Coded Multiuser CDMA*, IEEE Transactions on Communications, vol 45, pp 605-610, May 1997.
- [2] Alexander P. D., Grant A. J., Reed M. C., *Iterative Detection in Code-Division Multiple-Access with Error Control Coding*, to appear in European Transactions on Telecommunications - Special Issue on CDMA Techniques for Wireless Communications Systems.

- [3] Alexander P. D., *Coded Multiuser CDMA*, PhD Thesis, University of South Australia, 1997.
- [4] Band I.W., Cruickshank D. G. M., *Efficient Bandwidth Utilisation for CDMA Using Convolutional Codes*, Proc. IEEE ICC'96, pp 1306-1310, 1996.
- [5] Beaulieu N. C., *The Evaluation of Error Probabilities for Intersymbol and Cochannel Interference*, IEEE Transactions on Communications, vol 39, pp 1740-1749, Dec. 1991.
- [6] Cheng R., *Coded CDMA with and without MMSE Multiuser Equalizer*, Proceedings of 5th International Conference on Universal Personal Communications, Cambridge MA USA, oct 1996.
- [7] Lehnert J. S., Pursley M. B., *Error Probabilities for Binary Direct-Sequence Spread-Spectrum Communications with Random Signature Sequences*, IEEE Transactions on Communications, vol 35, pp 87-98, Jan 1987.
- [8] Sunay M.O., McLane P.J., *Sensitivity of a DS CDMA System with Long PN Sequences to Synchronization Errors*, Proc. IEEE ICC'95, Seattle, vol 2, pp 1029-1035, June 18-22 1995.
- [9] Sunay M.O., McLane P.J., *Calculating Error Probabilities for DS CDMA Systems: When Not to Use the Gaussian Approximation*, Proc. IEEE ICC'96, pp 1744-1749, 1996.