

# Topologie Discrète des grilles d'échantillonnage $n$ -D optimales

Chafiaâ HAMITOCHE, Luis IBANÉZ, Christian ROUX

<sup>1</sup>Département Image et Traitement de l'Information  
ENST de Bretagne - Technopôle Brest-Iroise BP 832, 29285 Brest Cedex, France  
chafiaa.hamitouche@enst-bretagne.fr

## Résumé –

Une définition formelle d'une topologie combinatoire est présentée pour un espace discret  $n$ -dimensionnel, défini par la grille  $A_n$ . L'utilisation de ce type de grille au lieu de la grille classique  $\mathbb{Z}^n$  est justifiée par : 1) Les grilles  $A_n$  sont optimales pour l'échantillonnage des signaux  $n$ -D quand le théorème de Shannon est respecté. 2) Ces grilles présentent les meilleures configurations de voisinage entre points grâce au fait que leurs duales topologiques sont des  $K$ -simplexes. Des applications telles que l'interpolation, l'extraction de surface dans les volumes de données médicales sont présentées mettant en évidence la supériorité de ces nouvelles grilles par rapport à la grille classique  $\mathbb{Z}^3$ .

## Abstract –

A formal definition of a combinatorial topology is presented here for the discrete  $n$ -dimensional space defined by the  $A_n$  lattice. The use of this sort of grid in replacement of the classical  $\mathbb{Z}^n$  is based in two arguments: 1) It is the optimal sampling grid in the sense of the Shannon sampling theorem in 2 and 3 dimensions, 2) It supports the simplest discrete topology definition because its dual is a  $K$ -simplex. Applications such as interpolation, surface extraction in medical volume data are reported showing the efficiency of these new grids with respect to the classical  $\mathbb{Z}^3$ .

## 1 Introduction

Les développements récents dans le domaine de l'imagerie médicale 3D et de synthèse ont motivé des travaux concernant la géométrie et la topologie discrètes. La plupart de ces travaux utilisent les grilles  $\mathbb{Z}^n$  comme l'espace discret évident. Malheureusement, ce choix est plutôt une erreur historique, conséquence d'opter pour la solution de facilité au moment d'étendre à des dimensions supérieures des méthodes bien établies en dimension 1.

Il a été montré que les grilles  $\mathbb{Z}^n$  malgré leur simplicité apparente, compliquent le développement d'algorithmes topologiques. Ces grilles ne sont pas les mieux adaptées à l'échantillonnage des signaux, elles ne sont pas non plus appropriées pour définir correctement une topologie discrète.

Notre analyse de ce problème, nous a conduit à nous concentrer sur l'étude de la grille hexagonale et par ce biais sur la famille des grilles  $n$ -dimensionnelles  $A_n$  optimales pour résoudre le problème de compaquetage (empilement) de sphères  $n$ -D. L'étude de la famille  $A_n$  ne peut être réalisée de façon complète sans l'accompagner de celle de sa famille réciproque  $A_n^*$ . L'intérêt d'utiliser la famille  $A_n$  comme support pour la construction d'une topologie discrète est justifiée par :

- Les grilles  $A_n$  sont optimales pour l'échantillonnage des signaux  $n$ -D quand le théorème de Shannon est respecté.
- Ces grilles présentent les meilleures configurations de voisinage entre points grâce au fait que leurs duales topologiques sont des  $K$ -simplexes.

Notre motivation première, pour la recherche de nouvelles grilles d'échantillonnage est notre confrontation à la définition correcte d'une topologie discrète lors de la détection et extraction de surfaces dans des volumes de données. Une fois l'étude réalisée, plusieurs autres avantages, dus essentiellement aux symétries présentes dans ces grilles, sont apparus et méritent d'être signalés. On peut citer la reconstruction à partir de projections [2], la définition de la Transformée de Fourier Discrète, la morphologie mathématique et l'interpolation. Ce papier résume les résultats de nos travaux dans ce domaine. Nous traiterons d'abord des grilles 2D puis 3D, nous présenterons la généralisation à la dimension  $n$  ainsi que quelques applications.

### 1.1 La topologie dans les grilles 2D et 3D

Pour définir une topologie discrète dans la grille carrée il a été nécessaire de faire appel à deux connexités complémentaires, la 4- et la 8-connexité. L'utilisation de cette grille a continué malgré le fait bien connu que la grille correcte pour échantillonner l'espace 2D est la grille hexagonale ainsi que la constatation que la grille carrée conduit à des ambiguïtés dans la définition de la connexité entre pixels, ce qui n'est pas le cas dans la grille hexagonale. La figure 1, montre les relations généralement établies dans les applications d'imagerie : chaque cercle solide représente un point d'échantillonnage, (a) le carré gris représente la région de Voronoï relative au point central. (b)(c) et (d) sont des définitions possibles de voisinage dans cette

grille. (b) montre le  $K$ -complexe associé à la 4-connexité et les carrés gris sont les régions de Delaunay de la grille, (c) pour la 8-connexité, ce graphe, n'étant pas planaire ne peut pas servir comme support pour un  $K$ -complexe  $2D$ . Il a été montré que cette connexité ne peut pas conduire à une définition correcte d'une topologie discrète. (d) illustre le  $K$ -complexe associé au graphe de connexité pour la 6-connexité, cette option présente l'inconvénient d'être anisotrope. La figure 2 montre les mêmes relations pour la grille hexagonale. (a) les cercles solides sont les points d'échantillonnage, l'hexagone gris est la région de Voronoï du point central. (b) montre le  $K$ -simplexe  $2D$  associé au graphe de connexité, les triangles gris correspondent aux régions de Delaunay de la grille. Malgré qu'elle n'est pas souvent utilisée dans les applications de traitement d'image, la grille hexagonale est fondamentale dans le processus d'imprimerie ainsi que dans la fabrication des écrans de télévision et des moniteurs d'ordinateur.

En 3D, les problèmes de connexité deviennent plus complexes avec l'introduction de la 6-, 18-, 26-connexité. Ces relations sont illustrées sur les figures 3 pour la grille  $\mathbb{Z}^3$ . Le cube gris représente la région de Voronoï du point central. A droite on trouve le  $K$ -complexe associé à la 6-connexité (ce n'est pas un  $K$ -simplexe). En 3D la grille compacte est la grille cubique à faces centrées (CFC); la figure de Voronoï associée est un dodécahèdre rhombique (figure 4 (a)). La grille réciproque (l'espace Fourier au sens signal) de la CFC est la grille BCC (Body-Centered Cubic) dont la figure de Voronoï est un octaèdre tronqué 4 (b).

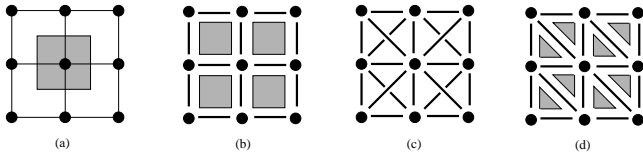


FIG. 1: Relations topologiques sur la grille carrée

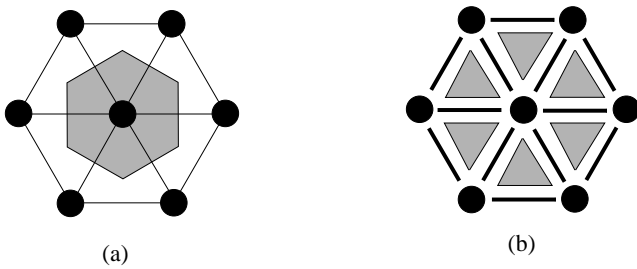


FIG. 2: Relations topologiques sur la grille hexagonale

L'apparition d'applications concernant les espaces  $4D$  et  $5D$  [1] motivent d'avantage l'abandon de la grille  $\mathbb{Z}^n$  au profit d'autres types de grilles mieux adaptées pour la description des espaces discrets  $n - D$ .

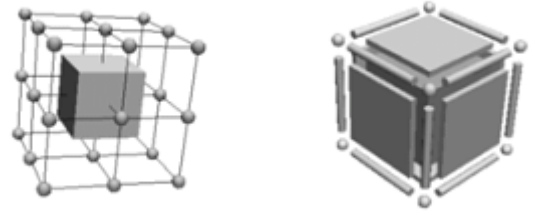


FIG. 3: Relations topologiques dans la grille cubique

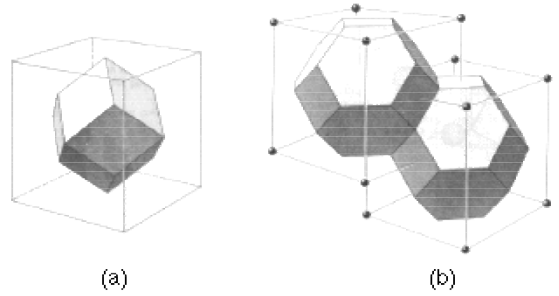


FIG. 4: Régions de Voronoï dans les grilles FCC et BCC

## 2 Généralisation à l'espace $n - D$ : La famille des grilles $A_n$

Partant du fait que la grille  $A_0$  est un point isolé,  $A_1$  est un alignement de points sur une droite,  $A_2$  est la grille hexagonale et  $A_3$  la CFC, la grille  $A_n$  peut être construite à partir de  $A_{n-1}$  et ce à partir de  $A_0$ . Sans perte de généralité, nous considérons que la distance entre points les plus proches est égale à 1 pour toute grille  $A_n$ . Pour guider cette construction, nous utilisons l'ensemble minimal de points permettant de définir la grille dans sa totalité, il s'agit de l'ensemble élémentaire  $E_n$  qui correspond à la configuration la plus compacte selon laquelle peuvent être mises en contact  $(n + 1)$  hypersphères dans un espace  $n - D$ . Tous les points de l'ensemble sont équidistants, le barycentre de l'ensemble est lui aussi équidistant aux  $(n + 1)$  points.

Disposons de l'ensemble élémentaire  $E_{(n-1)}$  correspondant à l'espace  $(n - 1)$ -D, nous pouvons construire celui de dimension  $n$  en considérant que tous les points de  $E_{(n-1)}$  sont dans un sous-espace  $(n - 1)$ -D d'un autre espace  $n$ -D. De cette façon, la  $n$ -ème coordonnée de tous les  $n$  points de  $E_{(n-1)}$  est nulle. Un nouveau point est alors ajouté pour compléter les  $(n + 1)$  nécessaires à la conformation de l'ensemble  $E_n$ . Les premières  $(n - 1)$  coordonnées de ce nouveau point sont choisies égales à celles du barycentre de  $E_{(n-1)}$ , tandis que la  $n$ -ème coordonnée est calculée de telle manière que la distance entre tous les points de  $E_{(n-1)}$  soit égale à 1. La figure 6 montre le processus incremental pour les dimensions de zéro à trois. Les sphères représentent les points des ensembles élémentaires tandis que les carrés représentent les barycentres.

On note  $b_n$  la distance euclidienne entre le barycentre et les points de  $E_n$ . et  $p_n$  la distance euclidienne entre le

nouveau point et le sous-espace occupé par  $E_{(n-1)}$ . La figure 5 illustre les relations entre les segments  $p_n$  et  $b_n$  pour deux dimensions consécutives, elles sont explicitement :

$$p_n^2 = 1 - b_{n-1}^2 \quad (1)$$

$$b_n = \left( \frac{n}{n+1} \right) p_n \quad (2)$$

$$b_n^2 = b_{n-1}^2 + \frac{p_n^2}{(n+1)^2} \quad (3)$$

Avec  $p_0 = 0$  et  $b_0 = 0$ . En utilisant ces expressions récursives nous pouvons déduire les valeurs de  $p_n$  et  $b_n$ .

$$p_n^2 = \frac{(n+1)}{2n} \quad \text{et} \quad b_n^2 = \frac{n}{2(n+1)} \quad (4)$$

L'hypervolume  $Ve_n$  correspondant à l'enveloppe convexe de l'ensemble élémentaire est exprimé comme :

$$Ve_n = Ve_{(n-1)} \frac{p_n}{n} \quad (5)$$

ce qui conduit à l'expression :

$$Ve_n = \left( \frac{1}{n!} \right) \sqrt{\frac{(n+1)}{2^n}} \quad (6)$$

L'hypervolume  $Vc_n$  de la cellule  $n$ -dimensionnel définie par les combinaisons linéaires des vecteurs de la base, avec des coefficients dans l'intervalle  $[0, 1]$  est évalué par l'expression récursive :

$$Vc_n = Vc_{(n-1)} p_n = \sqrt{\frac{(n+1)}{2^n}} \quad (7)$$

Cette dernière expression est d'une grande importance car elle est équivalente au volume de la cellule de Voronoï de la grille  $A_n$ . Son inverse étant la densité des points de la grille. Ce volume nous permet de calculer le facteur de 'compactage' (compression) de la grille.

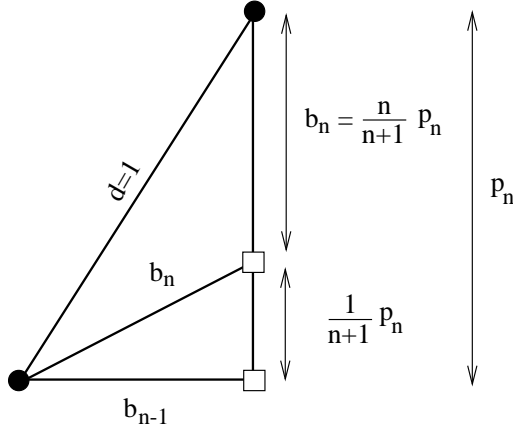


FIG. 5: Relation récursive entre  $p_n$  et  $b_n$

La table 1 présente les valeurs de  $p_n$ ,  $b_n$ ,  $Ve_n$ ,  $Vc_n$  issues de ces relations pour les dimensions de zéro à cinq. Les fractions rationnelles n'ont pas été simplifiées afin de permettre la comparaison avec les relations récursives. La dernière colonne montre les valeurs numériques approximatives du volume de la cellule.

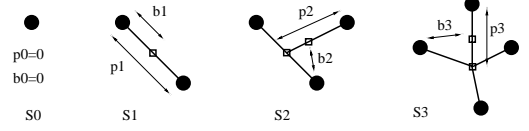


FIG. 6: Relation récursive entre  $p_n$  et  $b_n$

$n$	$b_n^2$	$p_n^2$	$b_n$	$p_n$	$Ve_n$	$Vc_n$	$\approx Vc_n$
0	0	0	0	0	0	0	0.000
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1.000
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.866
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{1}}{72}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.707
4	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{\sqrt{10}}{5}$	$\frac{\sqrt{10}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{9216}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	0.559
5	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{\sqrt{15}}{6}$	$\frac{\sqrt{15}}{5}$	$\frac{\sqrt{1}}{76800}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0.433

TAB. 1: Paramètres de l'ensemble élémentaire

La grille reciproque  $A_n^*$  est définie comme la grille dont la base vectorielle est orthonormale à celle de  $A_n$ .

## 3 Applications

### 3.1 Extraction de frontières

Une application importante de la topologie discrète est l'extraction de frontière d'objets représentés dans une grille  $n - D$ . Il s'agit de l'obtention d'une variété  $(n - 1) - D$  correspondant à un ensemble connexe de points qui représente l'objet. En  $3D$ , et en imagerie médicale, ce problème est souvent résolu dans la grille  $\mathbb{Z}^3$  par l'application de l'algorithme de *marching cubes* [8]. Un objet est défini dans la grille d'échantillonnage comme un ensemble de points. L'équivalent continu de cet objet est obtenu en associant à chaque point de la grille le  $K$ -complexe construit à partir de la figure de Voronoï de la grille. On considère ensuite, qu'une cellule  $m - D$   $\sigma_m$  du  $K$ -complexe appartient à l'objet si ses voisins de dimension supérieure appartiennent aussi. La frontière de l'objet est composée de toutes les cellules  $\sigma_m$ ,  $m < n$  ayant un voisin de dimension supérieure appartenant à l'objet et un autre n'appartenant pas. Le graphe de connexité de la grille permet de définir la structure duale à la grille (dans laquelle à toute cellule  $\sigma_m$  est associée une cellule  $\alpha_{n-m}$  de la structure duale, et de déterminer les éléments du  $K$ -complexe qui constituent la frontière de l'objet. Le fait d'avoir un graphe de connexité  $K$ -simplexe garantit que la frontière d'un objet est un  $K$ -complexe défini sans ambiguïté [3][4]. La figure 7 illustre une extraction de surface dans la grille BCC.

### 3.2 Interpolation

La plupart des applications d'imagerie médicale  $3D$  (CT-Scanner, IRM), utilisent l'interpolation trilineaire, qui est peu coûteuse en temps de calcul dans la grille  $\mathbb{Z}^3$ . La région de Delaunay de cette grille est un cube, un point de l'espace continu admet huit points de la grille comme

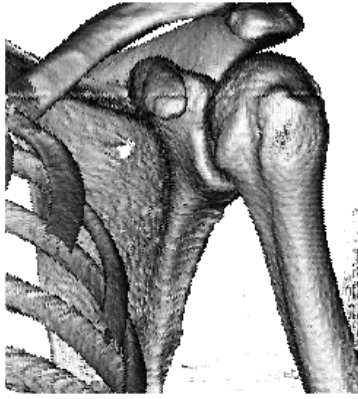


FIG. 7: Extraction de surfaces osseuses à partir d'un volume Scanner X (160x160x139 coupes)

voisins. L'interpolation linéaire est la façon la plus simple de prendre en compte ces points pour déterminer la valeur d'un point du domaine continu. La structure de la grille  $3-D A_3^*$  (BCC) a un tétraèdre comme figure de Delaunay, une interpolation linéaire est suffisante pour calculer la valeur du signal en un point de l'espace continu, car uniquement quatre valeurs sont à considérer dans l'interpolation. Le rendu de volume direct est une des applications très touchées par cette réduction de coût de calcul, ces algorithmes de rendus doivent calculer des intégrales de certains paramètres (opacité, densité,...) le long des lignes qui relient une ligne à un objet du volume de données. Ces paramètres sont souvent calculés par des interpolations trilinearaires sur chaque cellule de Delaunay (figure 9).

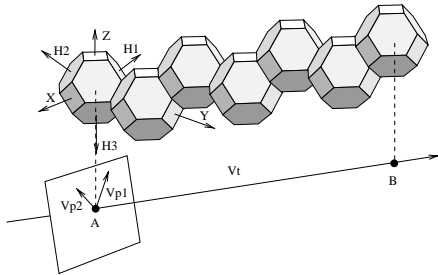


FIG. 8: Tracé d'une ligne droite dans la grille BCC

## 4 Conclusion

Nous avons défini une topologie discrète dans la grille  $A_n^*$ . Le nombre de symétries dans cette grille rend possible un ensemble de propriétés intéressantes qui est difficile de réaliser avec la grille  $\mathbb{Z}^n$ . Nous avons mis en oeuvre une méthode d'extraction de surfaces dans la grille  $A_3^*$ . Les bonnes configurations géométriques présentes dans la grille  $A_n^*$  permettent de simplifier le processus de reconstruction d'un signal par interpolation. Cette grille est utilisée dans le domaine de la reconstruction d'image à partir de projections en imagerie médicale [2], ce qui per-

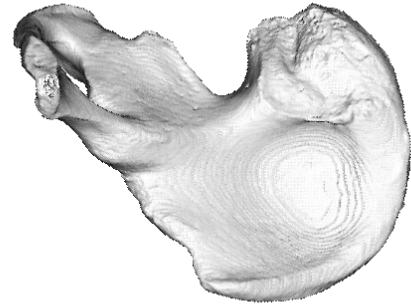


FIG. 9: Visualisation de l'os Illiaque par lancer de rayons discrets dans la grille BCC

met d'envisager la possibilité de disposer de volumes de données  $A_3^*$  au lieu de  $\mathbb{Z}^3$  et de pouvoir adapter des algorithmes de traitement des signaux à ce type d'échantillonnage, beaucoup plus efficaces compte tenu des diverses symétries. La transformation de Fourier discrète rapide, les opérateurs de morphologie mathématique montreront certainement la supériorité, en terme d'efficacité d'implantation d'algorithmes, de ces grilles par rapport à la grille cubique classique.

## Références

- [1] J.K. Udupa, Digital object definition in 3D imaging, *DGCI'96*,
- [2] S. Matej, R.M. Lewit, "Efficient 3D Grids for Image Reconstruction Using Spherically-Symmetric Volume Elements", *IEEE Trans. on Nuclear Science*, Vol. 42, No. 4, pp. 1361-1370, Aug. 1995.
- [3] L. Ibanez, C. Hamitouche, C. Roux, "Ray-Tracing and 3D Object Representation in the BCC and the FCC Grid", *DGCI'97* Springer Verlag, pp 235-241, 1997.
- [4] L. Ibanez, C. Hamitouche, C. Roux, "Ray Casting in the BCC grid applied to 3D medical image Visualization", *IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pp 548-551, Hong-Kong, Nov. 1998.
- [5] J.H.Conway, N.J.A.Sloane, *Sphere packing lattice and groups*, Second edition, Springer-Verlag, A series of comprehensive studies in mathematics, 1993.
- [6] H.S.M.Coxeter, *Introduction to Geometry*, second edition John Wiley & Sons Inc., 1969.
- [7] D.E.Dudgeon, R.M. Mersereau, *Multidimensional digital signal processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1984.
- [8] W.E. Lorensen, H.E. Cline, Marching Cubes : A high resolution 3D surface construction algorithm, *Computer Graphics*, 21, No.4, Jul 1987, 163-169.