

# Transformation Mojette en 3D :

## mise en oeuvre et application en synthèse d'images

JP. Guédon, N. Normand, S. Lecoq

SEI, EP CNRS 2018  
IRESTE, rue Christian Pauc, La Chantrerie, BP 60601, Nantes, France

{jguedon,nnormand}@ireste.fr

**Résumé** – Dans ce papier, l’extension de la transformation Mojette en 3D est présentée. La transformation possède des propriétés très similaires à sa version 2D (algorithmes et complexité opératoire). La description des plans de projections doit toutefois être réalisée avec soin. Les conditions de restructibilité d’un volume à partir d’un ensemble discret de plans de projection sont présentées. On compare ensuite le taux de redondance produit entre versions 2D et 3D. L’application à la synthèse d’image est enfin exposée et semble prometteuse.

**Abstract** – In this paper, the generalization of the so-called Mojette transform in three dimensions is presented. The 3D transform shares almost all the same properties than the 2D version (algorithms and complexity). Nevertheless, projection planes must be carefully described. Reconstructibility of a given volume from a discrete set of planes is also presented. The comparison between the 2D and 3D versions is done from the angle of redundancy. Image synthesis application is finally exposed and seems promising.

### 1 INTRODUCTION

Le champ de la synthèse d’image comme celui de la tomographie (largement utilisé dans le monde médical) s’appuie sur la notion de projection. La plupart des algorithmes existant dans ces deux domaines sont issus d’une discrétisation suffisante des opérateurs continus de projection/rétroprojection. Le but de ce papier est de relier ces deux domaines en utilisant une transformation complètement discrète développée dans l’équipe : la transformation Mojette.

La transformation Mojette est une version linéaire discrète exacte de la transformation de Radon. Elle est reliée à la morphologie mathématique par la notion d’éléments structurants à deux pixels. La transformée Mojette d’une région convexe  $\mathcal{R}$  produit des projections seulement pour des angles  $\theta = \text{atan}(q/p)$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers entre eux. La transformation Mojette est décrite en 2D par :

$$\mathbf{M} f(k,l) = \text{proj}(p,q,b) = \sum_k \sum_l f(k;l) \Delta(b + qk - pl), \quad (1)$$

où  $\Delta$  est la fonction de Kronecker. Un point sur la projection indicé par  $b$  est appelé bin. Les conditions de restructibilité de  $\mathcal{R}$  à partir d’un ensemble de projections  $S_I = \{(p_i, q_i), i \in I\}$  sont explicitées dans [1]. La transformation Mojette inverse utilise le nombre de pixels sommés dans chaque bin, ce nombre dépend de la forme de  $\mathcal{R}$ . A chaque fois que l’on a une correspondance univoque on peut reconstruire un pixel et soustraire sa valeur des autres projections et donc réduire d’un pixel le support  $\mathcal{R}$ . La répétition de ce procédé pour tout pixel de l’image permet la reconstruction de l’image. Cette transformation est particulièrement bien adaptée pour les signaux image par

l’accroissement des corrélations dans le domaine Mojette comparée aux corrélations exprimées dans le domaine spatial [3].

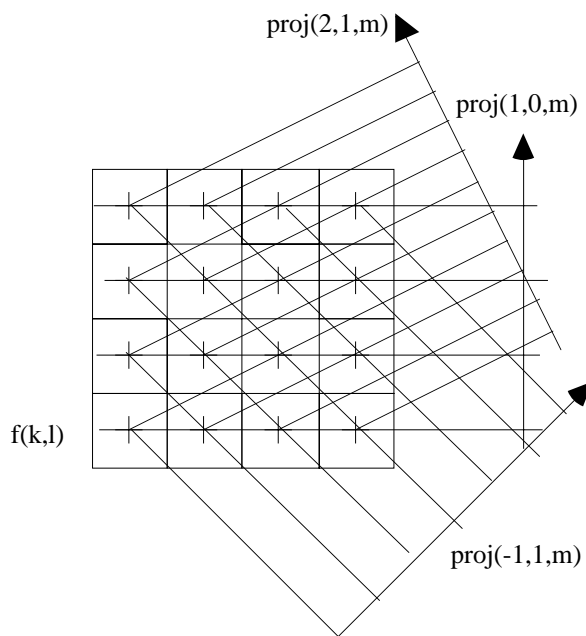


FIG. 1 : Transformation Mojette en 2D d’un support 4x4 avec un ensemble de trois projections.

L’ordre de complexité pour la transformation directe et inverse est linéaire dans le nombre de pixels  $N$  et de projections  $I$  :  $O(IN)$ . La redondance (noté Red) s’exprime par

le surplus du nombre de bins (noté #bins) vis à vis du nombre de pixels (noté #pixels) sous la forme

$$\text{Red} = \frac{\#bins}{\#pixels} - 1.$$

## 2 Transformation Mojette en 3D

La transformation Mojette en 2D (1) peut être réécrite sous la forme matricielle :

$$\mathbf{M} f(k,l) = \text{proj}(p,q,b) = \sum_k \sum_l f(k,l) \Delta(b - P_{21} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}), (1')$$

avec  $P_{21} = \begin{pmatrix} -q & p \end{pmatrix}$ . L'extension en trois dimensions se fait alors sans problèmes. À partir d'un volume  $f(k,l,m)$ , on construit des plans de projections de directions  $(p,q,r)$  (avec  $\text{PGCD}(p,q,r)=1$ ) et on repère les points discrets sur ce plan par le vecteur  ${}^t\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ . On obtient donc

$$\mathbf{M} f(k,l,m) = \text{proj}(p,q,r,b_1,b_2)$$

$$\mathbf{M} f(k,l,m) = \sum_k \sum_l \sum_m f(k,l,m) \Delta(\mathbf{B} + P_{32} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}), (2)$$

où  ${}^t\mathbf{B} = (b_1 \ b_2)$ . Évidemment  $P_{32}$  est une matrice de projection discrète sur le plan indiqué par le vecteur normal  $(p,q,r)$ . Pour un indiciage intéressant, nous généralisons les conventions établies en 2D:  $r \geq 0$  (sinon on échange les signes de  $p$  et  $q$ ); si  $r=0$  alors  $q \geq 0$  (sinon on échange le signe de  $p$ ). La matrice  $P_{32}$  peut alors se définir par:

$$\text{si } r \neq 0 \text{ et } q \neq 0 \text{ alors } P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p/r \\ 0 & 1 & -q/r \end{pmatrix},$$

$$\text{si } r=0 \text{ et } q \neq 0 \text{ alors } P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -q/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{si } r=0 \text{ et } q=0 \text{ alors } P_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La projection de la grille 3D régulière sur un plan indiqué par le vecteur normal  $(p,q,r)$  donne une grille 2D régulière mais dépendante de  $(p,q,r)$ . Quelques exemples sont fournis en figure 2 avec la projection de la grille 3D cartésienne.

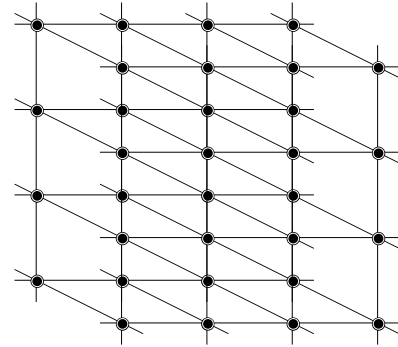
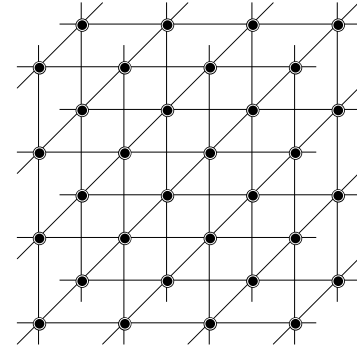
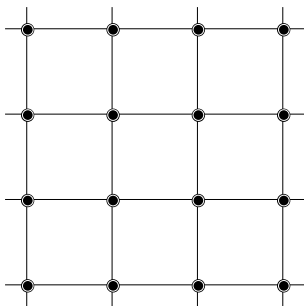


FIG. 2 : Transformation Mojette en 3D de la grille cartésienne avec les projections  $(1 \ 0 \ 0)$ ,  $(-2 \ -1 \ 1)$  et  $(1 \ 1 \ 2)$

On remarque également que la description informatique de chacun des plans doit être effectuée soigneusement pour ne pas produire un surplus d'informations. Ainsi, lorsque l'on connaît la taille du volume  $P \times Q \times R$  projeté avec  $(p,q,r)$  on peut avoir un ordre de parcours unique (liste) relié au choix de la matrice  $P_{32}$  pour ne noter que les valeurs et éviter un surplus dû aux points de la grille sans intersection avec la projection du volume.

## 3. Transformée Mojette inverse en 3D

L'algorithme de reconstruction est le même qu'en dimension 2. Plus précisément, on prend une relation univoque voxel-bin et après reconstruction du voxel on soustrait la valeur du bin dans les bins des autres projections correspondant à ce voxel. On effectue cette opération autant de fois que de voxels à reconstruire de  $\mathbb{R}$  (complexité linéaire en nombre de voxels) et pour chaque opération on met à jour un bin par plan de projection (complexité linéaire en nombre de bins) et le nombre de voxels contribuant à ce bin. L'ordre de complexité est donc identique au cas 2D : linéaire en nombre de voxels et en nombre de projections. La reconstruction n'utilise que des opérateurs de soustraction sur entiers. Cet algorithme a été mis en place en utilisant une liste de correspondances bi-univoques de voxels reconstructibles — bins associés. La complexité opératoire en est très légèrement augmentée (par la gestion de la file) mais permet une plus grande souplesse dans l'ordre de reconstruction.

Évidemment une transformation Mojette Haar peut être définie comme en dimension 2(cf. [3]) par simple convolution

sur les deux axes (b1,b2) de la projection discrete du voxel. Cette dernière peut permettre dans des applications tomographiques 3D ou de synthèse d'image de tenir compte de l'effet de volume partiel.

#### 4. Reconstructibilité en 3D

Les conditions de reconstructions d'un volume  $\mathcal{R}$  parallépipédique sont obtenues trivialement à partir des conditions de Katz [4] et sont données par l'équivalence des assertions:

- i) Région  $\mathcal{R} = (P \times Q \times R)$  reconstructible à partir d'un ensemble de projections  $S_I = \{(p_i, q_i, r_i), i \in I\}$
- ii)  $(P \geq \sum_i |p_i|)$  ou  $(Q \geq \sum_i |q_i|)$  ou  $(R \geq \sum_i |r_i|)$

L'extension de cette propriété de 2D en 3D est triviale puisque l'on utilise seulement la notion de produit tensoriel sur chacun des axes.

En procédant de façon similaire qu'en 2D, nous conjecturons que partant de la région convexe quelconque  $\mathcal{R}$  définie par un ensemble de projections  $S_I$ ; si la dilatation des éléments structurants à deux voxels notés  $\{O; (p_i, q_i, r_i)\}$  pour  $i \in I$ , produit une forme  $\mathcal{D}$  telle que  $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{R}$ , alors la reconstruction par  $S_I$  est possible et unique par la transformation Mojette inverse. Cette propriété, testée sur de nombreux exemples dans la mise en oeuvre réalisée [5], n'est pas primordiale dans le cadre de ce papier. Toutefois, la mise en oeuvre de la dilatation des éléments structurants à 2 voxels peut se faire en utilisant directement la propriété topologique de ces opérands par intersection et réunion de listes de voxels : il est donc très aisé et rapide de vérifier ainsi la reconstructibilité d'une forme convexe quelconque à partir d'un ensemble donné de projections. C'est également un premier pas vers des conditions de reconstructibilité en dimension N.

#### 5. Redondance Mojette en 2D et 3D

Intuitivement, l'apport de la troisième dimension donne de la souplesse dans le choix des projections qui doit permettre de réduire la redondance de la transformée (donné par le facteur  $Red = \frac{\#bins}{\#voxels} - 1$ ). Par exemple pour un cube de  $128^3$  voxels, l'ensemble de projections  $S_I = \{(32,1,0), (-32,1,0), (32,0,1), (-32,0,1)\}$  procure quatre vues expliquant tout le volume car une transformation Mojette inverse redonne le volume initial. (Notons que l'on peut recalculer un nouvel ensemble de projections sans perte d'information pour un coût de  $O(2IN)$ ). Le nombre de bins total produit est alors de 2 113 408 (pour 2 097 152 de voxels), ce qui veut dire que la redondance due à la transformée n'est que de 0.008. Il semble donc intéressant de stocker la représentation 3D par cette représentation de 4 projections.

Il est curieux de comparer ce résultat au cas où l'on aurait considéré une région du plan de  $128^2$  pixels avec 4 projections  $S_I = \{(32,1), (-32,1), (31,1), (33,1)\}$  et chaque

élément composé de 128 bits (au lieu d'un bit dans le cas précédent) : la redondance du même volume d'information par la transformée Mojette 2D est alors de 0.02 (2145920 bits). La comparaison théorique du nombre d'éléments dans l'espace transformée en 2D et en 3D montre cependant que l'on a généralement un taux de redondance très similaire. La souplesse gagnée en 3D lors du choix des projections (cf. les valeurs des  $p_i$ ) est compensée par la somme sur les trois composantes  $(p_i, q_i, r_i)$  au lieu de deux composantes seulement en 2D.

#### 6. Application à la synthèse d'image

Nous ne nous intéressons ici qu'aux scènes vues en rayons parallèles (sans utilisation de coordonnées homogènes nécessitant la dimension 4). Un objet est décrit par un ensemble de facettes dont les extrémités sont données par des coordonnées entières  $(k,l,m)$ . Un point appartenant à l'objet prend la valeur 1 et 0 sinon. Un point de vue (2D) de l'objet est alors construit simplement avec une projection Mojette 3D. Le résultat trivial de la section 4 concernant la reconstructibilité conduit alors à l'assertion suivante : si l'on connaît quelques plans de projections autour de l'axe  $(1,0,0)$  (comme dans le cas de figure étudié en section 5) on connaît tout l'objet ! Dans le cas de voxels valués (e.g. information de couleur), il suffit alors de reprendre l'algorithme de projection en remplaçant l'opérateur somme par la sélection du dernier voxel de l'objet sur la ligne: on obtient directement l'image de projection. Évidemment, ce type de projection empêche une reconstructibilité du volume. Un autre résultat trivial très important dans le cadre de la synthèse d'image est que l'on décrit au mieux les projections des facettes puisque l'échantillonnage sur les plans de projections correspond exactement aux points de projections des facettes. Une facette plane appartenant au volume 3D est ainsi projetée sur une facette plane sur chacun des plans de projections. Un algorithme de lancer de rayons (cas de l'observateur à l'infini) est alors simplifié et remplacé par une projection Mojette suivie d'un algorithme de réinterpolation de la grille du plan (cf. figure 2) par une grille régulière pour l'affichage. Ce dernier point peut être réalisé par une interpolation de type spline et mis en oeuvre avec des algorithmes rapides à cause de la structure régulière d'échantillonnage. Il est à noter que l'approche du lancer de rayon par droites discrètes possède d'autres idées similaires [7].

#### 7. Conclusion

Dans ce papier, nous avons tracé les grandes lignes de la correspondance entre transformation Mojette en deux et trois dimensions. Il semble clair que la dimensionnalité n'influe pas sur la mise en oeuvre de l'algorithme (même complexité) ni sur la souplesse apportée par la redondance de l'information dans le domaine Mojette. Les relations explicitées entre la tomographie discrète et la synthèse d'images semblent très

prometteuses pour l'obtention d'algorithmes plus élaborés (de type lancer de rayon) et de complexité opératoire réduite.

## Références

- [1] N. Normand, JP Guédon "La transformée Mojette : une représentation redondante pour l'image". C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I , pp.123-126, Janvier 1998.
- [2] N.Normand, JP Guédon, O.Philippé, D.Barba, "Controlled Redundancy for image coding and high-speed transmission". VCIP'96, Proc. SPIE Vol.2727, pp.1070-1081. Mars 1996.
- [3] O. Philippé, JP Guédon, D Barba, "Transformation Mojette : Corrélation et Qualité de service" GRETSI 97, pp.295-298, 1997.
- [4] M. Katz, Questions of uniqueness and resolution in reconstruction from projections. Lectures Notes in BioMathematics, Springer-Verlag, Vol. 26, 1979.
- [5] S. Le Coq, "Mojette 3D", rapport de DEA Auto.Info. Appl., Ecole Centrale Nantes, Juillet 1998.
- [6] I. Salam, P. Nehlig, E. Andres, "Discrete ray-casting", Lect. Notes in Comp. Science, Discrete geometry for computer imagery, DGCI 99, pp.435-446, Mars 1998.

Les auteurs appartiennent au GDR ISIS.