

Algorithme de détection de ruptures dans un modèle linéaire par morceaux

ALAIN DE CESARE et Alain HERMENT

INSERM U494 – CHU Pitié, 91 Bd de l'hôpital – 75634 Paris Cedex 13

Alain.Decesare@imed.jussieu.fr, Alain.Herment@imed.jussieu.fr

Résumé : Cette communication présente un algorithme pour l'identification de paramètres dans un modèle de description de signaux linéaire par morceaux. Dans un premier temps un modèle sans discontinuité est présenté. La méthode d'identification des paramètres se fait au sens des moindres carrés. Le modèle prenant en compte des ruptures possibles dans le signal est ensuite exposé. L'algorithme de complexité quadratique est présenté en détail et enfin un exemple de synthèse est donné.

Abstract : This communication presents an algorithm to identify the parameters of a model of piece-wise linear signal. First, a model without discontinuities is assumed for which identification of the parameters relies on a least squares optimization. Then, discontinuities are integrated in the signal description. A new quadratic algorithm, based on dynamic programming, is detailed for parameter estimation. Finally results obtained on a synthetic signal are provided.

1. Introduction

Nous proposons d'étudier un signal monodimensionnel composé d'un nombre inconnu de segments. Chacun de ces segment est décrit par un modèle linéaire dépendant de p paramètres. On doit simultanément estimer les frontières entre les segments et les paramètres qui décrivent chaque segment. Une telle approche conduit à optimiser une fonction en variables mixtes (il y a des inconnues réelles et binaires), non convexe et non dérivable. De plus cette optimisation doit se faire sous des contraintes d'égalités qui expriment le fait que si deux points voisins appartiennent au même segment, ils seront décrits par les mêmes p paramètres. Un tel problème peut être résolu exactement par programmation dynamique. Mais avant d'aborder le modèle général, nous allons présenter le modèle utilisé pour un segment.

2. Modèle sans discontinuité

Soit $Z = (z_0, \dots, z_{n-1})^t$ un signal de n points. On suppose que Z est obtenu par la mesure d'une fonction $f(j)$ échantillonnée aux abscisses entières $\{0, \dots, n-1\}$, et que la fonction f peut être décrite par un modèle dépendant linéairement de p paramètres qu'il faut identifier. On peut donc écrire $f(j)$ sous la forme :

$$f(j) = \sum_{k=0}^{p-1} v_k u_k(j) \quad (1)$$

Dans cette expression $V = (v_0, \dots, v_{n-1})^t$ est le vecteur inconnu caractéristique du modèle et les u_k sont des fonctions de j . On suppose en outre que la mesure introduit un bruit blanc Gaussien, et on cherche la meilleure estimation V_0 du vecteur V . On pose $U_j = (u_0(j) \dots u_{p-1}(j))^t$. Alors l'estimation de V_0 au sens des moindres carrés revient alors à résoudre le problème d'optimisation :

$$V_0 = \underset{V}{\text{Arg min}} \sum_{j=0}^{n-1} (V^t U_j - z_j)^2 \quad (2)$$

Si on fait l'hypothèse que les U_j forment une famille de vecteurs de rang p . La fonction à minimiser est quadratique définie positive, la solution optimale est alors :

$$V_0 = \left(\sum_{j=0}^{n-1} U_j U_j^t \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j U_j \right) \quad (3)$$

et le coût correspondant :

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^2 - \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j U_j \right)^t \left(\sum_{j=0}^{n-1} U_j U_j^t \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j U_j \right) \quad (4)$$

Si on est dans le cas où n est inférieur à p , et que les U_j forment une famille libre alors le coût sera nul.

3. Modèle avec discontinuités

On suppose maintenant que le signal Z est constitué de plusieurs segments successifs qui suivent chacun un modèle sans discontinuité précédent avec une valeur différente des paramètres inconnus V en chaque point. On va comme précédemment associer à chaque point j un vecteur U_j , et on fait l'hypothèse que p vecteurs consécutifs $\{U_j, \dots, U_{j+p-1}\}$ forment une famille de rang p . Ceci implique que tout segment de dimension inférieure à p aura un coût nul. On suppose que l'on ne connaît ni le nombre ni la position des segments. On va modéliser ce problème en associant à chaque site de discontinuité possible une variable binaire indiquant si deux points successifs font partie ou non du même segment. Les p valeurs modélisant un segment seront considérées comme des vecteurs inconnus distincts en chaque points du signal. La variable binaire associée à un site apparaîtra alors dans une contrainte d'égalité : si deux points font parti du même segment les vecteurs seront égaux.. Enfin chaque discontinuité doit être pénalisée par un quantité positive γ . Nous proposons donc de résoudre le problème d'optimisation suivant pour identifier les segments et les valeurs des paramètres associés :

$$\text{Min}_{\substack{V_0 \dots V_{n-1} \\ l_1 \dots l_{n-1}}} \sum_{j=0}^{n-1} (V_j^t U_j - z_j)^2 + \mathbf{g} \sum_{j=1}^{n-1} l_j$$

Sous les contraintes :

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\} \left| \begin{array}{l} (1-l_j)(V_j - V_{j-1}) = 0_p \\ l_j \in \{0, 1\} \end{array} \right. \quad (5)$$

Dans cette expression les U_j sont les même que dans la modélisation précédente. 0_p est le vecteur nul de dimension p . Les V_j représente le vecteur inconnu des paramètres au point j . Le vecteur $L = (l_1, \dots, l_{n-1})$ est constitué par des variables binaires indiquant la continuité ou la rupture du modèle entre 2 points. Si $l_j = 0$, les point l_{j-1} et l_j appartiennent au même segment et pour respecter la contrainte, les vecteurs V associés à ces points doivent être les mêmes. Si $l_j = 1$ il y a rupture de modèle et la fonction est pénalisée par la valeur positive γ qui est le seul hyperparamètre du modèle. Le choix de l'hyperparamètre ne sera pas discuté ici. Par contre il est clair que d'une part le nombre de discontinuités trouvées dans le modèle optimal sera une fonction décroissante de γ . D'autre part si γ est supérieur au coût du modèle sans discontinuité, la solution optimale contiendra un segment unique.

Des modélisations prenant explicitement en compte les discontinuités par des variables binaires ont déjà été proposées dans le domaine de l'image et du signal, par exemple dans [1][2][3]. L'originalité de ce modèle consiste à ne pas utiliser un terme de régularisation comme dans les exemples cités mais à introduire des contraintes d'égalité entre les valeurs trouvées en deux points successifs. La

solution du problème avec contraintes permet en fait d'obtenir la solution limite d'un problème régularisé lorsque le coefficient de régularisation tend vers l'infini.

4. Algorithme

La solution optimale pourrait être calculée à partir du coût des $n(n+1)/2$ segments qui peuvent être extraits du signal. Mais ce calcul direct aurait un coût algorithmique en $O(p^3 n^3)$. En fait ce problème d'optimisation peut être résolu par un algorithme de programmation dynamique[4] qui consiste à décomposer un problème en un certain nombre de sous-problèmes dont les solutions sont liées par des relations de récurrence. Les sous-problèmes considérés permettent en particulier d'introduire dans l'algorithme les valeurs du signal z_j les unes après les autres. Nous formulerons d'abord la décomposition de l'algorithme en sous-problèmes. Ensuite nous verrons comment résoudre efficacement les relations de récurrence entre ces sous-problèmes. Enfin l'algorithme de calcul des sites de discontinuités sera présenté dans le dernier paragraphe.

4.1 Présentation générale

Pour $s = 0, \dots, n-1$ et pour $t = s + p, \dots, n$ nous considérons une famille de problèmes $P_{st}(X)$ dépendant d'un vecteur formel X de dimension p . Le problème à résoudre se déduira de la solution du problème $P_{0n}(X)$ en relaxant le paramètre X .

$$E_{st}(X) = \text{Min}_{\substack{V_0 \dots V_{t-1} \\ l_1 \dots l_{t-1}}} \sum_{j=0}^{t-1} (V_j^t U_j - z_j)^2 + \mathbf{g} \sum_{j=1}^{t-1} l_j$$

Sous les contraintes :

$$\left| \begin{array}{l} \forall j \in \{0, \dots, t-1\} \left| \begin{array}{l} (1-l_j)(V_j - V_{j-1}) = 0_p \\ l_j \in \{0, 1\} \end{array} \right. \\ l_s = 1 \\ \forall j \in \{s+1, \dots, t-1\} \quad l_j = 0 \\ V_{t-1} = X \end{array} \right. \quad (6)$$

Résoudre le problème $P_{st}(X)$ revient à rechercher la modélisation optimale pour le signal $(z_0, \dots, z_{t-1})^t$, sous la contrainte que la dernière discontinuité soit située au point s et que le dernier segment ait pour paramètre le vecteur X . Alors les solutions optimales de ces problèmes sont reliées par une relation de récurrence permettant de calculer le modèle avec une complexité algorithmique en $O(p^2 n^2)$. Cette approche algorithmique est une généralisation de l'algorithme

proposé dans [5] sur un modèle de « weak string » [2], dans le cas limite où le paramètre de régularisation tend vers l'infini.

4.2 Forme des solutions et relations de récurrence

On va calculer itérativement les coûts des solutions optimales des sous-problèmes. On aura besoin pour cela des valeurs E_t qui représentent le coût de la modélisation optimale pour le signal (z_0, \dots, z_{t-1}) :

$$E_t = \text{Min}_{s < t} E_{st} \quad (7)$$

On peut maintenant écrire $E_{st}(X)$ qui est une forme quadratique en X . Il s'écrit :

$$E_{st}(X) = (X - X_{st})^t A_{st} (X - X_{st}) + e_{st} \quad (8)$$

Dans cette expression X_{st} est la valeur du vecteur de paramètre optimal pour le dernier segment, e_{st} est le coût de la solution correspondante. La matrice carrée A_{st} de dimension $p \times p$ s'écrit :

$$A_{st} = \left(\sum_{j=s}^{t-1} U_j U_j^t \right)^{-1} \quad (9)$$

Cette matrice ne dépend pas des valeurs z_j du signal.

4.2.1 Initialisation

Pour $t = s + p$, A_{st} est calculée directement à partir de la formule (9). X_{st} est calculé à partir de la formule (3). Comme le dernier segment de longueur p a un coût nul, e_{st} est obtenu en ajoutant à E_s le coût d'une discontinuité. Ce qui nous donne :

$$e_{st} = E_s + g \quad (10)$$

4.2.2 Itérations

On calcule les inverses des matrices A_{st} pour $t > s+p$ grâce à la formule d'inversion matricielle :

$$A_{st}^{-1} = A_{s,t-1}^{-1} - \frac{A_{s,t-1}^{-1} U_{t-1} U_{t-1}^t A_{s,t-1}^{-1}}{U_{t-1}^t A_{s,t-1}^{-1} U_{t-1}} \quad (11)$$

On a par ailleurs les relations de récurrence suivantes sur les vecteurs X :

$$X_{st} = X_{s,t-1} + (z_{t-1} - U_{t-1}^t X_{s,t-1}) A_{st}^{-1} U_{t-1} \quad (12)$$

et sur les coûts e :

$$e_{st} = e_{s,t-1} + (1 - U_{t-1}^t A_{st}^{-1} U_{t-1}) (z_{t-1} - U_{t-1}^t X_{s,t-1})^2 \quad (13)$$

4.3 Algorithme de calcul des discontinuités

Les relations précédentes sont utilisées une première passe pour calculer les valeurs E_t , défini par (7), s_t et Y_t . s_t est l'adresse du début du dernier segment ayant permis d'obtenir le coût optimal E_t . Y_t est la valeur du vecteur de paramètre optimal pour le segment commençant au point s_t et se terminant au point $t-1$.

Les sites de rupture du signal sont alors obtenus en suivant la liste chaînée des indices s à partir de s_n . Le coût du modèle vaut E_n . Les vecteurs V en tous points sont donnés par le vecteur Y du segment auquel le point appartient.

5. Exemple

On considère le signal de synthèse de 180 points constitué de 4 segments de droites ($p = 2$) représenté figure 1. Le tableau 1 donne les intervalles et les coefficients définissant les droites. La forme de la modélisation est fixée par les vecteurs U_j qui s'écrivent simplement $U_j = (j \ 1)^t$.

Tableau 1 : Valeurs utilisées pour le signal de synthèse

Intervalle	Pente	Valeur à l'origine
0-49	1.3	8
50-79	0.7	39
80-129	-0.1	102
130-179	0.5	24

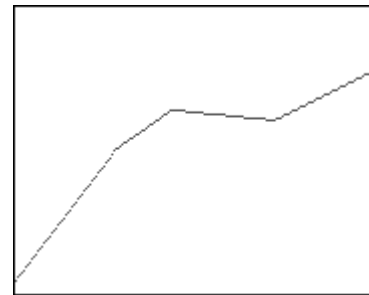


Figure 1 : Signal de synthèse non bruité

Les coefficients ont été choisis de façon à obtenir un signal continu ce qui augmente la difficulté de détecter la rupture qui ne porte que sur la dérivée du signal dont les variations sont elle même faibles. On lui ajoute un bruit blanc Gaussien d'écart type 3, ce qui donne le signal représenté figure 2.

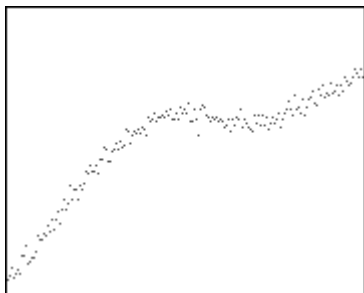


Figure 2 : Signal de synthèse bruité

La figure 3 donne le résultat du signal reconstitué après traitement avec $\gamma = 100$. Le tableau 2 donne les valeurs trouvées par l'algorithme. Le traitement a été effectué en 60 ms CPU sur Pentium 133.

Tableau 2 : Valeurs trouvées par l'algorithme

Intervalle	Pente	Valeur à l'origine
0-51	1.323	7.007
52-78	0.795	31.611
79-132	-0.107	102.679
133-179	0.525	20.035

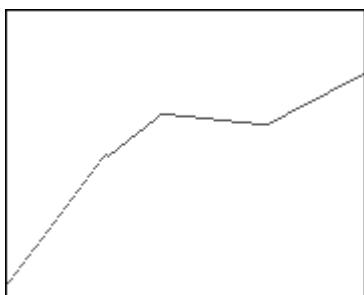


Figure 3 : Signal reconstitué

6. Conclusion

Le calcul des paramètres du modèle nécessite la résolution d'un problème d'optimisation en variables mixtes (réelles et binaires) sous contraintes d'égalités. L'algorithme proposé fournit la solution exacte de ce problème avec un complexité algorithmique en $O(p^2n^2)$ pour un signal de taille n et un modèle caractérisé par p paramètres. On remarquera enfin que

si la modélisation pourrait être étendu sans problème pour des signaux multidimensionnels, par contre on ne pourrait pas généraliser l'algorithme de programmation dynamique qui nécessite d'avoir des données sur un ensemble de site totalement ordonnés.

7. Références

- [1] S. Geman and D. Geman : Stochastic relaxation, Gibbs distribution and bayesian restoration of images. IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 6, n°6, pp.721-741, 1984.
- [2] A. Blake and A. Zisserman : Visual reconstruction. MIT Press, cambridge MA, 1987.
- [3] A. De Cesare : Algorithmes rapides de restauration des signaux : Application à l'imagerie médicale. Thèse Paris XI-Orsay, 1996.
- [4] Michel Minoux. Programmation mathématique (tome 2, ch 9). Dunod 1983.
- [5] A. De Cesare, R. Zéboudj : Algorithmes rapides de restauration de signaux avec prise en compte des discontinuités. GRETSI 97, vol2, pp. 1347-1350, Grenoble 1997.