

Détection de sinusoides noyées dans du bruit par les régions d'inclusion des valeurs propres

Olivier CASPARY¹, Jean-Baptiste MAJ²

¹CRAN, UPRESA CNRS 7039 – Université H. Poincaré, Nancy 1
11, rue de l'Université, 88100 Saint-Dié, France

²Lab. Exp. ORL, KULeuven, Kapucijnenvoer 33, B-3000 Leuven
et ESAT-SISTA, KULeuven, Kardinaal Mercierlaan 94, B-3001, Leuven, Belgique

ocaspary@cran.iutsd.u-nancy.fr, Jean-Baptiste.Maj@uz.kuleuven.ac.be

Résumé – Les régions d'inclusion des valeurs propres permettent l'élaboration de critères d'estimation du nombre de sinusoides efficaces. Pour exploiter ces régions, une transformation préalable de la matrice de covariance est nécessaire. Aussi, nous proposons une transformation reposant sur une approximation de valeurs et vecteurs propres afin d'obtenir les rayons et les centres des disques de Gerschgorin, les disques étant les régions d'inclusion étudiées. Nous montrons que l'introduction des informations rayons et centres dans les critères de détection améliore considérablement leurs performances. Un nouveau critère utilisant la distance euclidienne, appelé GDE_{dist} , est ainsi proposé.

Abstract – The inclusion regions of the eigenvalues enable us to work out efficient criteria for the estimation of the number of sinusoids. To exploit those regions, it is necessary first to transform the covariance matrix. That is why we put forward a transformation based on an approximation of the eigenvalues and eigenvectors, so as to obtain the radii and the centres of the Gerschgorin disks, the disks being the studied inclusion regions. We show that the introduction of information concerning the radii and the centres in the detection criteria improves their performances tremendously. A new criterion using the Euclidean distance (and called GDE_{dist}) is also suggested.

1. Introduction

L'estimation du nombre de sources ou de composantes fréquentielles d'un signal est un problème crucial en analyse spectrale mais également en séparation de sources. En analyse spectrale, les performances de nombreuses méthodes "haute résolution" sont étroitement associées à la décomposition du signal en sous-espaces signal et bruit, la pire des situations pour ces méthodes étant la sous-estimation du sous-espace signal. Pour traiter ce problème, de nombreux critères existent dans la littérature, les plus connus étant les critères AIC et MDL [1]. Ils peuvent être regroupés en plusieurs grandes familles distinctes (valeurs propres, vecteurs propres, détection-estimation conjointes, ...) auxquelles peut s'ajouter une nouvelle famille qui s'appuie sur les régions d'inclusion des valeurs propres. Dans les cas de figures suivants : propriétés statistiques du bruit inconnues, pas de valeurs propres dominantes associées au signal, peu d'échantillons, la plupart des critères ne sont plus applicables. Par exemple, ils ne répondent plus aux hypothèses de sous-espaces disjoints, de variance du bruit uniformément répartie sur les valeurs propres exactes du signal, de densité de probabilité a priori. Aussi, pour limiter ou supprimer toute hypothèse restrictive d'application, et contrairement à la plupart des travaux réalisés sur la détection du nombre de sources, nous tentons d'agir "en amont" de la théorie des matrices et non seulement "en aval" (après factorisation, décomposition ou inversion de matrices).

2. Les régions d'inclusion

Par définition, une région d'inclusion d'une matrice A est une région du plan complexe qui contient au moins une de ses valeurs propres. Les régions d'inclusion sont à la base de la plupart des méthodes d'analyse numérique permettant de localiser et d'évaluer les perturbations des valeurs propres. Les plus courantes sont celles de Gerschgorin et d'Ostrowski [2]. Elles tentent de répondre à la question suivante : si une matrice A dont on connaît exactement les valeurs propres est sujette à une perturbation E telle que $A \rightarrow A+E$, comment évoluent ses valeurs propres ? La matrice A peut s'écrire $A=D+B$ où $D=\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ contient la diagonale principale de A tandis que les éléments de la diagonale principale de B sont nuls. En posant $A_\varepsilon = D + \varepsilon B$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{C}$, alors si ε est suffisamment petit, les valeurs propres de A_ε seront localisées dans des petits voisinages des éléments a_{11}, \dots, a_{nn} . Une manière de décrire ces voisinages est le théorème de Gerschgorin selon lequel les valeurs propres λ d'une matrice carrée $A=[a_{ij}]$ d'ordre N appartiennent à l'union des N disques de Gerschgorin, soit :

$$\bigcup_{i=1}^N \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ii}| \leq R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \right\} \quad (1)$$

Chaque disque de Gerschgorin D_i est défini dans le plan complexe par un rayon R_i et un centre : $O_i = a_{ii}$. Les rayons sont calculés à partir de la somme en ligne des éléments de A .

On peut également prendre en compte la somme en colonne, ou tenir compte des deux comme le fait le théorème d'Ostrowski.

Cependant, l'application directe de ces théorèmes sur une matrice de covariance ne fournit pas d'indication sur le nombre de sources car les rayons sont grands et les disques fortement entrelacés. A titre d'exemple, nous considérons un signal $x(t)$ composé d'une sinusoïde (nombre de sources $M=2$), de fréquence normalisée 0,25, noyée dans du bruit blanc gaussien $b(t)$ de variance unitaire tel que :

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + b(t) \quad (2)$$

avec $t = 1, \dots, 8$, $A_1 = 4.47$ (10 dB), $f_1 = 0.25$. La matrice de covariance C de dimension (4,4) est mise sous la forme avant-arrière et constitue l'exemple 1 :

$$C = \begin{bmatrix} 130,11 & 4,15 & -119,70 & -26,29 \\ 4,15 & 121,41 & 9,98 & -119,70 \\ -119,70 & 9,98 & 121,41 & 4,15 \\ -26,29 & -119,70 & 4,15 & 130,11 \end{bmatrix} \quad (3)$$

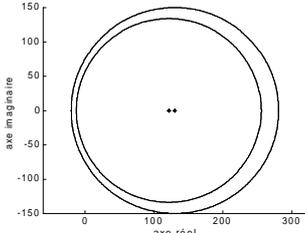


Fig. 1 Disques de Gerschgorin de C
(* : centres des disques)

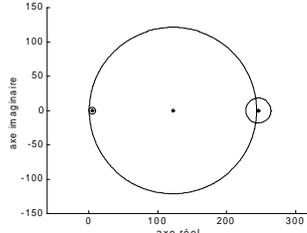


Fig. 2 Disques de Gerschgorin de C_T
(* : centres des disques)

L'application du théorème de Gerschgorin à la matrice C donne la figure 1. Le domaine d'appartenance des valeurs propres associées au bruit recoupe le domaine d'appartenance des valeurs propres associées au signal, empêchant toute détection. C'est pourquoi nous présentons ci-après deux voies possibles pour exploiter avantageusement les régions d'inclusion.

3. Transformations de la matrice de covariance

D'après la partie précédente, les régions d'inclusion ne peuvent être utiles à la détection du nombre de sources qu'à la condition de tendre vers une matrice A à diagonale principale telle que $A=D$ où, idéalement, D contiendrait les valeurs propres exactes de A . Pour cela, une première voie possible consiste à transformer la matrice de covariance C de dimension (N,N) à l'aide d'une matrice unitaire U qui ne modifie pas les valeurs propres [3]. La matrice U choisie est définie par :

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

elle s'applique à la matrice de covariance C partitionnée de la manière suivante :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (5)$$

où le vecteur \mathbf{c} correspond à la dernière colonne de C excepté le dernier élément, afin d'obtenir la matrice C transformée, appelée C_T , telle que :

$$C_T = U^H C U = \begin{bmatrix} S_1 & U_1^H \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H U_1 & c_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda'_1 & & & R_1 \\ & \lambda'_2 & & R_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ R_1^H & R_2^H & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Gerschgorin décrit dans la deuxième partie, la matrice S_1 est diagonale et contient les valeurs propres λ' de la sous-matrice C_1 obtenues après la décomposition propre $C_1 = U_1 S_1 U_1^H$, où U_1 est une matrice contenant les vecteurs propres \mathbf{u}_i de C_1 telle que $U_1 = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{N-1}]$. D'après la propriété d'entrelacement des valeurs propres, les valeurs λ' sont ordonnées dans le même ordre que les valeurs propres λ de C . Ainsi, pour les régions d'inclusion de Gerschgorin, on peut déduire les rayons et centres suivants directement à partir de C_T :

$$R_i = |\mathbf{u}_i^H \mathbf{c}|, \quad O_i = \lambda'_i \quad (7)$$

pour $i=1, \dots, N-1$. En théorie, dans le cas d'un nombre d'échantillons infini, et donc d'une matrice de covariance exacte, les rayons associés au sous-espace bruit sont nuls tandis que ceux associés au sous-espace signal ne le sont pas. En pratique, nous cherchons deux jeux de disques distincts. A cet égard, il faut rappeler qu'un disque est composé d'un centre et d'un rayon. Par rapport aux critères reposant uniquement sur les valeurs propres de C (voir [1]), on dispose d'une dimension supplémentaire constituée des rayons.

En appliquant la méthode de la transformation unitaire de C à l'exemple 1, on observe que le bruit, correspondant à une seule valeur, est projeté à des valeurs proches des origines (0,0), les deux autres valeurs pouvant être associées au signal (cf. figure 2). La figure 2 donne une représentation des centres des disques et les disques associés. Visuellement, elle privilégie les rayons et peut apporter une certaine confusion quand les disques sont nombreux. C'est pourquoi nous préférons la figure 3 qui fournit les rayons en fonction des centres des disques, en l'occurrence les valeurs propres de C_1 . De plus, une grande valeur propre peut avoir un petit rayon et un grand rayon peut correspondre à une petite valeur propre dans le cas d'entrelacement des sous-espaces signal et bruit. A titre d'exemple, la figure 4 représente les disques de Gerschgorin d'un signal comprenant 2 sinusoïdes de faible puissance noyées dans du bruit coloré. En prenant séparément les valeurs propres ou les rayons, il n'est pas possible de retrouver nos 4 composantes, car seulement 2 valeurs propres ou 3 rayons se distinguent des autres, alors que la représentation des rayons en fonction des valeurs propres le permet (voir figure 5).

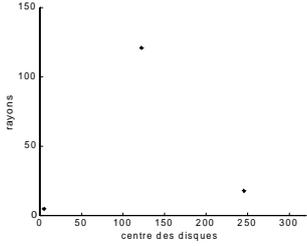


Fig. 3 Représentation des rayons en fonction des centres de l'exemple 1

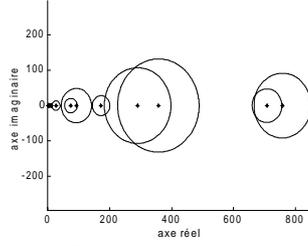


Fig. 4 Disques de Gerschgorin de C après transformation unitaire (exemple bruit coloré)

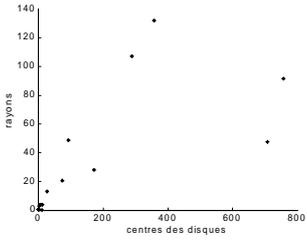


Fig. 5 Représentation des rayons en fonction des centres (exemple bruit coloré)

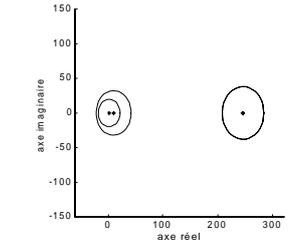


Fig. 6 Disques de Gerschgorin de A d'après l'exemple 1

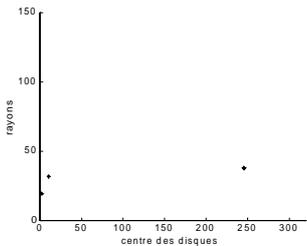


Fig. 7 Représentation de Gerschgorin de A d'après l'exemple 1

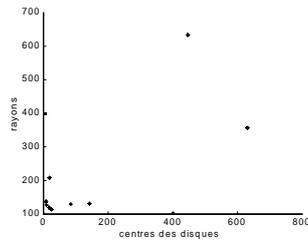


Fig. 8 Représentation de Gerschgorin de A d'après l'exemple du bruit coloré

Le prétraitement consistant à transformer C avant l'application d'un théorème de localisation des valeurs propres est efficace, mais il requiert une décomposition propre, donc une complexité numérique importante. Dans le cas d'un signal avec peu d'échantillons, d'où une matrice C de faible dimension, le fait d'utiliser la sous-matrice C_1 est encore plus imprécis.

Aussi, nous proposons une seconde voie dont le prétraitement consiste à utiliser des approximations de valeurs et vecteurs propres à l'aide des vecteurs de Fourier. Soit la matrice A de dimension (N,N) constituée des éléments a_{ij} , et qui est obtenue après transformation similaire unitaire de C :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} = Q^H C Q = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_i^H C \mathbf{q}_j \quad (8)$$

avec $Q = [\mathbf{q}_1 \ \cdots \ \mathbf{q}_N]$ et les vecteurs de Fourier :

$\mathbf{q}_i = [1 \ e^{j2\pi f_i} \ \cdots \ e^{j2\pi f_i(N-1)}]^T / \sqrt{N}$ pour $i=1, \dots, N$ tels que $\|\mathbf{q}_i\|_2 = 1$. Chaque vecteur \mathbf{q}_i est orthogonal aux autres. Les N fréquences normalisées f_i sont linéairement distantes de $1/N$ sur l'intervalle des fréquences $[0, 1-1/N]$.

La propriété $Q^H Q = I$ étant vérifiée, les valeurs propres de la matrice A sont identiques à celles de C. En posant l'égalité suivante, précédemment utilisée pour élaborer le théorème de Gerschgorin, soit $A = D + B$, nous obtenons la matrice diagonale D suivante :

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (9)$$

où $a_{ii} = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i^H C \mathbf{q}_i = \hat{\lambda}_i$ d'après la définition $C \mathbf{q} = \hat{\lambda} \mathbf{q}$

les valeurs $\hat{\lambda}_i$ sont les valeurs propres estimées de C associées aux vecteurs propres estimés \mathbf{q}_i . La matrice B, dont les éléments de la diagonale principale sont nuls, est la suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si Q est une base constituée des vecteurs propres de C, alors la diagonale de D contient les valeurs propres de C et les éléments de B sont nuls. Dans ce cas, les rayons R_i sont nuls. Si Q est une approximation de cette base, la diagonale de D tend vers les valeurs propres de C et les éléments de B représentent des limites pour la déviation de chacun de ses éléments diagonaux d'une valeur propre exacte (voir également le théorème de Bauer-Fike dans [2]).

En appliquant le prétraitement proposé sur l'exemple 1, puis ensuite le théorème de Gerschgorin sur A, nous obtenons 2 centres (d'abscisse 245) et 2 rayons identiques, bien séparés des autres (cf. fig. 6 et fig. 7). Comparée à la figure 2, la figure 6 permet de séparer distinctement les deux sous-espaces. Ainsi, dans le cas où la dimension (N,N) de C est faible, elle illustre l'intérêt de travailler sur un prétraitement de C plutôt que sur celui exploitant la sous-matrice C_1 .

4. Critères de détection

Dans le cadre de la détection du nombre de sinusoïdes, il est nécessaire d'élaborer des critères exploitant les centres et les rayons des disques de Gerschgorin. Les critères peuvent être de trois types différents :

- les critères heuristiques tels que les critères GDE, GDEE et leurs variantes [4].
- les critères utilisant une classe avec rejet, où la classe comprenant les valeurs proches de (0,0) est supposée associée au bruit dans la représentation des rayons en fonction des centres.
- les critères fondés sur 2 classes, une classe signal et une classe bruit.

Nous nous limitons à un critère heuristique faisant appel à la distance euclidienne. Celle-ci est normalisée de manière à

prendre en compte les contributions des rayons et des centres, soit la distance, appelée dist , suivante :

$$\text{dist}(i) = \sqrt{(O_i / O_{\max})^2 + (R_i / R_{\max})^2} \quad (11)$$

où O_{\max} et R_{\max} sont respectivement les valeurs maximales des centres et des rayons de Gerschgorin, où $i = 1, \dots, P$. Dans le cas où la matrice considérée est C , $P = N-1$ et, dans le cas où il s'agit de la matrice A , $P = N$. Les distances $\text{dist}(i)$ sont triées dans un ordre décroissant. Le critère heuristique proposé repose sur un seuil arbitraire raisonnable en enlevant la moyenne des distances à chacune d'entre elles, soit le critère GDE_{dist} décrit par :

$$\text{GDE}_{\text{dist}}(k) = \text{dist}(k) - \frac{F(L)}{P} \sum_{i=1}^P \text{dist}(i) \quad (12)$$

avec $k = 1, \dots, P$ et $F(L)$ est une valeur constante ou une fonction ajustable selon le nombre d'échantillons L du signal. Nous prenons $F(L) = 1$. Quand la première valeur négative du critère est atteinte, l'estimation du nombre de sources M devient $M = k-1$. D'autres critères sont possibles. Cependant, le critère proposé présente l'avantage de ne pas être élaboré à partir de statistiques supposées connues du bruit.

5. Performances des critères

Nous effectuons les simulations dans les mêmes conditions que la référence [4], en considérant un signal $x(t)$ de 16 échantillons comprenant 2 sinusoïdes ($M=4$) de même amplitude et de fréquences normalisées $f_1=0,25$, $f_2=0,3$ noyées dans un bruit blanc gaussien $b(t)$ de variance unitaire, tel que :

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + b(t) \quad (13)$$

où $t=1, 2, \dots, 16$. Pour chaque résultat, 200 réalisations indépendantes sont réalisées. La matrice de covariance estimée C est de dimension 8 sous la forme de covariance modifiée. Dans la première simulation, $A_1=A_2$ et ces amplitudes varient de -5 dB à +15 dB. Dans la seconde simulation, A_1 est fixée à 4,47 pour 10 dB et A_2 varie de 10 dB à 20 dB. Le bruit non-blanc gaussien est obtenu au travers d'un filtre AR(1) de coefficient 0,9. D'après la figure 9, que le bruit soit blanc ou non, le critère GDE_{dist} associé à A offre un meilleur taux de détection (4 à 6 dB d'écart) que celui associé à C . De plus, ses performances sont comparables à celles des meilleurs critères de la référence [4]. Ainsi, pour un nombre d'échantillons peu élevé, le prétraitement qui permet $P=N$ est préférable à celui où $P=N-1$. Dans le cas où les amplitudes sont différentes (fig. 10), le critère GDE_{dist} associé à A atteint 100 % de taux de détection sur toute la gamme de rapports signal sur bruit (RSB) considérée, tandis que celui associé à C voit ses performances se dégrader rapidement au delà de 3 dB d'écart en amplitude. Ses résultats sont très supérieurs à ceux obtenus en [4] où la chute du taux de détection se produisait en moyenne à partir de 5 dB d'écart.

6. Conclusion

Les régions d'inclusion des valeurs propres offrent une dimension supplémentaire aux critères d'estimation du nombre de sources. Ainsi, les critères qu'il est possible d'élaborer, comme le critère proposé GDE_{dist} , sont plus efficaces que certaines familles de critères, par exemple celles reposant uniquement sur les valeurs propres. Des études supplémentaires sont en cours pour mieux évaluer leurs performances.

Références

- [1] Wax M., Kailath T., "Detection of signals by information theoretic criteria", IEEE Trans. on ASSP, vol. 33, n°2, pp. 387-392, April 1985.
- [2] Householder A. S., "The theory of matrices in numerical analysis", Dover publications, New-York, 1975, d'après un retraitage de 1964.
- [3] Wu H-T, Yang J-F, Chen F-K., "Source number estimators using transformed Gerschgorin radii", IEEE Trans. on SP, vol. 43, n°6, pp. 1325-1333, June 1995.
- [4] Caspary O., Nus P., "New criteria based on Gerschgorin radii for source number estimation", Proc. of EUSIPCO, vol. I, pp. 77-80, Rhodes, 8-11 september 1998.

GDE_{dist} sur C , bruit blanc (—○—); GDE_{dist} sur A , bruit blanc (—*—)
 GDE_{dist} sur C , bruit coloré (- - ○ - -); GDE_{dist} sur A , bruit coloré (- - * - -)

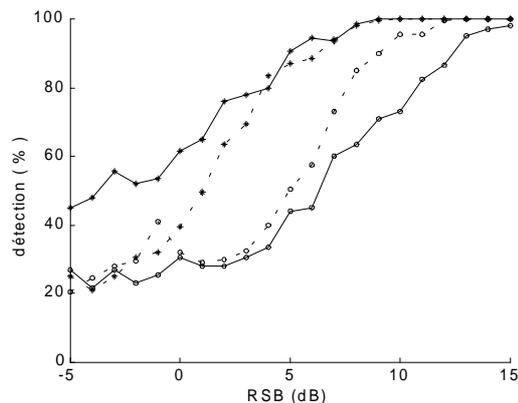


Fig. 9 Performances du critère GDE_{dist} (amplitudes identiques)

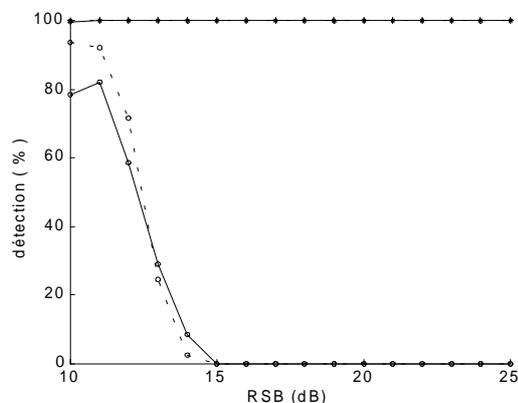


Fig. 10 Performances du critère GDE_{dist} (amplitudes différentes)