Dix-septième colloque GRETSI, Vannes, 13-17 septembre 1999

Une nouvelle approche pour la détection en présence de paramètres inconnus

Marius MATEI[1], Nathalie DELFOSSE[1], Marcel STAROSWIECKI[1], Boris DARKHOVSKI[2]

[1]LAIL, UPRESA 8021
Bât. P2, Université des Sciences et Technologies de Lille,
59655 Villeneuve d'Ascq cedex

[2]Académie des Sciences de Russie
Prospect 60-letya Oktiabria,117312 Moscou,Russie
Marius.Matei@univ-lille1.fr, Nathalie.Delfosse@eudil.fr
Marcel.Staroswiecki@univ-lille1.fr, darbor@isa.ac.ru

Résumé – Nous considérons le problème de détection de défaillances dans les systèmes linéaires en présence de paramètres inconnus. Deux méthodes nouvelles basées sur des critères classiques d'optimisation en détection sont formulées. La position du problème est une transposition directe du problème du jeu à deux joueurs dans la théorie de la décision. De nouveaux critères d'évaluation des performances d'une décision en présence de nuisances déterministes sont élaborés. Ils conduisent à des solutions moins conservatives que les approches minmax classiques. Un exemple est étudié.

Abstract – This paper deals with the Fault Detection problem in linear systems with nuisance parameters. Two new detection methods making use of a game theoretic point of view are presented here. In this context new performance criteria of a decision making problem are defined. Solutions of the developed decision tests are less conservative than those of a minmax one. An example is given.

1 Introduction

La prise en compte des perturbations est un point délicat du problème de détection de défaillances. Les perturbations viennent en effet contaminer le processus de décision, pouvant parfois conduire à de graves erreurs. Ce problème statistique de détection en présence de nuisances a été abordé dans les années 50 dans le cas des distributions gaussiennes par Chatterjee [5]. Récemment, Basseville et Nikiforov [3] ont proposé des solutions pour des perturbations déterministes dans le cas de la détection de ruptures.

Nous passons d'abord en revue les principes des tests d'hypothèses utilisés pour la détection des pannes en présence de nuisances déterministes, en mettant en évidence leurs inconvénients. Nous considérons à la fois les test dérivés de l'optimisation d'un critère unique (de type Bayes) et de l'optimisation conjointe de deux crières (de type minmax ou GLR). Ensuite nous proposons une nouvelle approche basée sur des critères classiques en théorie de la décision, mais faisant usage de la notion de jeu à deux joueurs (la nature et l'expérimentateur). Elle introduit la notion de *regret* - celui-ci provenant du fait que la décision est prise pour une valeur de la nuisance différente de sa valeur réelle, et consiste ensuite à optimiser la fonction de regret introduite. L'approche a l'avantage de n'attribuer qu'une unique valeur au paramètre de nuisance. Nous illustrons cette méthode dans le cas d'un modèle simple $y = Ax + \epsilon$ entaché d'un bruit gaussien.

2 Position du problème de décision

2.1 Modèle du système

Nous considérons le problème de détection de défaillances dans le système décrit par le modèle statique

$$y \;=\; Ax + \epsilon\,, \tag{1}$$

où $y \in \mathcal{Y}$ est l'observation, x une nuisance déterministe à valeur dans un convexe $\mathcal{X}$, A une matrice de rang plein colonne, et ϵ un bruit aléatoire, de loi $\mathcal{F}_0$ sous l'hypothèse H_0 où le système est en fonctionnement normal, et de loi $\mathcal{F}_1$ sous l'hypothèse H_1 où le système est en fonctionnement défaillant. Les lois $\mathcal{F}_i$ sont supposées à densités f_i. Bien que simple, ce modèle n'est pas dénué d'intérêt : en effet, on sait que le modèle d'état dynamique d'un système linéaire perturbé par un bruit gaussien et où les pannes agissent de manière additive se réduit, pour une fenêtre temporelle de taille fixée, à un modèle statique ([3, 6]). C'est alors l'état inconnu du système à l'instant initial qui joue le rôle du vecteur de nuisance dans le modèle statique.

Plusieurs solutions ont été proposées pour résoudre le problème de détection de défaillances dans ce contexte ([3, 4]). Elles reposent principalement sur les stratégies minmax de décision ou sur des tests du rapport de vraisemblance généralisé. Nous présentons les critères de décision les plus souvent utilisés.

2.2 Problème à critère unique

Une décision δ est une application de $\mathcal{Y}$ dans $\{0, 1\}$. $\delta(y)$ est l'indice de l'hypothèse retenue au vu de la donnée y. On peut évaluer les performances d'une décision δ à l'aide de divers critères. On cherche alors une décision optimale pour un seul de ces critères ou pour un ensemble de critères.

Lorsque les probabilités a priori P_i des deux hypothèses sont connues, une décision bayésienne consiste à optimiser un critère unique [2]

$$J = \alpha P(\delta = 0/H_1, x) + \beta P(\delta = 1/H_0, x), \tag{2}$$

qui est la probabilité d'erreur moyenne associée à la décision δ, pondérée par un coût propre à chaque type d'erreur (probabilité de fausse alarme : $P\big(\delta(y) = 1|H_0\big)$, probabilité de non détection : $P\big(\delta(y) = 0|H_1\big)$). Quand ces deux coûts sont égaux, $\alpha = 1 - P_0$, $\beta = P_0$. Lorque x est connu, la décision δ^* qui minimise le risque bayésien J est, en notant $f_i(y - Ax) = f_i(y, x)$,

$$\delta^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{f_1(y,x)}{f_0(y,x)} < \lambda \\ 1 & \text{si} \quad \frac{f_1(y,x)}{f_0(y,x)} \geq \lambda \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\alpha}{\beta} \tag{3}$$

Lorque x est inconnu, il n'existe pas de méthode bayésienne classique pour résoudre ce problème.

2.3 Problème à deux critères

Au lieu de chercher à optimiser sa décision par un critère unique, on peut l'évaluer par plusieurs critères, ce qui ne conduit pas à une unique solution optimale, mais à un ensemble de solutions, chacune étant optimale dans une certaine classe. Les critères retenus sont les probabilités de fausse alarme et de non-détection qu'il faut minimiser. On les appelle respectivement J_0 et J_1. Elles sont données par :

$$J_0(\delta, x) = \int_{\mathcal{Y}} \delta(y) f_0(y, x) \mathrm{d}y$$

$$\text{et} \quad J_1(\delta, x) = \int_{\mathcal{Y}} (1 - \delta(y)) f_1(y, x) \mathrm{d}y$$

Bien qu'elles soient définies de façon symétrique, les méthodes classiques privilégient l'une des deux pour définir une classe d'optimalité. Lorsque la nuisance x est connue, on est en présence d'un test d'hypothèses simples. Le test de Neyman-Pearson consiste à minimiser la non-détection, la fausse alarme étant fixée au niveau a. Il conduit à la décision définie par le rapport de vraisemblance (3), le seuil λ étant donné par $P(\delta(y) = 1|H_0) = a$.

Lorsque le paramètre de nuisance x est inconnu, on n'est plus en présence d'un test d'hypothèses simples. On peut alors avoir recours au test minmax ou au test GLR. La stratégie minmax de décision [3] consiste à prendre la décision qui minimise le maximum, sur la nuisance $x \in X$, de la probabilité de non-détection :

$$\min_{\delta} \max_{x} J_1(\delta, x) \,.$$

Cette optimisation est effectuée pour la classe C_a :

$$C_a = \big\{\delta : \max_x J_0(\delta, x) \leq a\big\}, \tag{4}$$

contenant les tests de niveau de fausse alarme a ($0 \leq a \leq 1$). Par construction, la solution minmax est optimale pour la classe C_a. La mise en œuvre de ce test est cependant difficile dans le cas général, car elle ne conduit pas à un domaine de décision défini explicitement. Dans le cas gaussien où la probabilité de détection est une fonction croissante de la distance de Kullback entre les distributions de (y, x) sous H_0 et sous H_1, $\mathcal{F}_0(y - Ax)$ et $\mathcal{F}_1(y - Ax)$, il faut trouver un couple de nuisances x_0, x_1 minimisant cette distance. Pour ces deux valeurs, la probabilité de non-détection d'une décision optimale est minimum.

Le test GLR est l'une des méthodes les plus utilisées pour le test d'hypothèses composites (car il définit simplement le domaine de décision, et se calcule aisément numériquement). Il est donné par :

$$\delta^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \dfrac{\max_x f_1(y,x)}{\max_x f_0(y,x)} < \lambda \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{5}$$

le seuil λ étant défini comme pour le test minmax. Ces deux tests sont équivalents dans certaines situations (en particulier quand la décision de réduit à une comparaison à un seuil d'une des composantes de y), où le GLR est alors optimal dans la classe C_a. Cependant, en général, ce n'est pas un test optimal.

On remarque que le GLR comme le test minmax conduisent à effectuer deux estimations du paramètre de nuisance, qui ne prend cependant qu'une unique valeur. De plus, la solution minmax du problème de décision est optimale, mais conservative (elle amène rarement à décider que le système est défaillant). C'est pourquoi nous recherchons des méthodes moins pénalisantes.

3 Approche proposée.

3.1 Idée générale

Nous proposons une autre solution basée sur la formulation du problème comme un jeu à deux joueurs [1]. L'expérimentateur dispose d'un ou plusieurs critères d'évaluation d'une décision. Il suppose que le paramètre de nuisance x inconnu prend la valeur $z \in \mathcal{X}$. Pour cette valeur, sa décision est

- s'il dispose d'un critère unique, la décision optimale :

$$\min_{\delta} J(\delta, z) = J(\delta_z, z) \,,$$

- sinon, la décision suivante, dérivée du test GLR :

$$\delta^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \dfrac{f_1(y,z)}{\max_x f_0(y,x)} < \lambda \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{6}$$

avec λ tel que $\max_x J_0(\delta_z, x) \leq a$, où $a \in \mathbb{R}^+$.

L'expérimentateur évalue ensuite cette décision δ_z par le critère unique J, ou, s'il dispose de deux critères, par le critère non contraint J_1, sachant que le paramètre de nuisance vaut x (et non z). Il calcule donc : $J(\delta_z, x)$ ou $J_1(\delta_z, x)$. Puis il définit deux fonctions de regret qui expriment le fait que la décision δ_z a été prise pour z choisi arbitrairement et non pour x, inconnu.

1. Une correspondant au critère unique :

$$F_1 = J(\delta_z, x) - J(\delta_z, z).$$

2. L'autre correspondant au critère double :

$$F_2 = J_1(\delta_z, x) - J_1(\delta_z, z).$$

Les fonctions de regret dépendent explicitement de ce que la nature joue (x) et de ce que l'expérimentateur devine (z) ; elles peuvent prendre des valeurs positives ou négatives. On propose alors la stratégie de décision suivante

$$\min_z \max_x F_1 \quad \text{ou} \quad \min_z \max_x F_2.$$

On peut aussi construire une autre fonction regret en prenant comme référence un critère calculé pour la vraie valeur de la nuisance x (c'est évidemment là qu'est son inconvénient), et la décision correspondante, δ_x, et qui s'exprime par :

1. Cas mono critère : $G_1 = J(\delta_z, x) - J(\delta_x, x)$ (On a alors $G_1 \geq 0$)
2. Cas bi critère : $G_2 = J_1(\delta_z, x) - J_1(\delta_x, x)$.

Le problème d'optimisation devient :

$$\min_z \max_x G_1 \text{ ou } \min_z \max_x G_2.$$

Cette conception du problème fait appel à des critères généralement utilisés en statistique et possède l'avantage d'être moins conservative. Nous présentons les solutions générales pour le cas que nous étudions ($y = Ax + \epsilon$), puis nous détaillons les algorithmes de décision pour des lois gaussiennes.

3.2 Application à $y = Ax + \epsilon$

3.2.1 Problème à critère unique

Le critère de l'expérimentateur est (2) et l'algorithme devient :

1. On résout le problème de décision pour le paramètre deviné z et on calcule le domaine $D_1(z)$ (décision H_1) :

$$D_1(z) = \left\{ y \in \mathcal{Y} \mid \frac{\beta f_1(y,z)}{\alpha f_0(y,z)} \geq 1 \right\}$$

2. On définit la fonction regret F_1 ou G_1 :

$$F_1(z,x) = \int_{D_1(z)} k(y,x)\mathrm{d}y - \int_{D_1(z)} k(y,z)\mathrm{d}y,$$

$$G_1(z,x) = \int_{D_1(z)} k(y,x)\mathrm{d}y - \int_{D_1(x)} k(y,x)\mathrm{d}y,$$

en posant $k(y,x) = \alpha f_0(y,x) - \beta f_1(y,x)$.

On a représenté par x le choix de la nature.

3. On établit la règle de décision par maximisation et minimisation :

$$\min_z \max_x F_1 \quad \text{ou} \quad \min_z \max_x G_1$$

Nous obtenons z^* et nous acceptons H_1 dans $D_1(z^*)$.

3.2.2 Problème à deux critères

1. On résout le problème de décision en supposant que la nuisance vaut z, par un test GLR appliqué à H_0 composite et H_1 simple. Le domaine de décision associé est

$$D_1(z, \lambda(z)) = \left\{ y \in \mathcal{Y} \ \mid \ \frac{f_1(y,z)}{\max_{x \in \mathcal{X}} f_0(y,x)} \geq \lambda(z) \right\}$$

la constante $\lambda(z)$ étant fixé par la contrainte portant sur la fausse alarme :

$$J_1 = \max_{x \in \mathcal{X}} \int_{D_1(z, C(z))} f_0(y,z)\mathrm{d}y = a.$$

2. La fonction de regret porte alors sur le second critère (non-détection) :

$$F_2(z,x) = \int_{D_1(z,\lambda(z))} f_1(y,x)dy - \int_{D_1(z,\lambda(z))} f_1(y,z)\mathrm{d}y$$

$$\text{ou } G_2(z,x) = \int_{D_1(z,\lambda(z))} f_1(y,x)dy - \int_{D_1(x,\lambda(x))} f_1(y,x)\mathrm{d}y$$

3. On établit la règle minmax de décision :

$$\min_z \max_x F_2(z,x) \text{ ou } \min_z \max_x G_2(z,x)$$

On obtient z^* qui définit le domaine $D_1(z^*, \lambda(z^*))$ de décision $\delta(y) = 1$.

Pour les deux algorithmes présentés précédemment, de même que pour les algorithmes classiques, on ne peut en général envisager que des solutions numériques. Nous proposons un exemple simple ayant une solution accessible pour le cas mono-critère.

3.2.3 Exemple

On considère le modèle le plus simple décrit par l'équation :

$$y = x + \epsilon, \quad \text{où} \quad y \in \mathbb{R}^n, \ x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n.$$

On suppose que la nuisance déterministe x évolue dans la boule $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ ||x|| \leq b\}$. On suppose également que ϵ est une variable aléatoire gaussienne, et que les hypothèses de test sont (voir la figure 1, réalisée pour $n = 2$) :

$$H_0 : (y,x) \sim \mathcal{N}(0, I) \text{ contre } H_1 : (y,x) \sim \mathcal{N}(m, I).$$

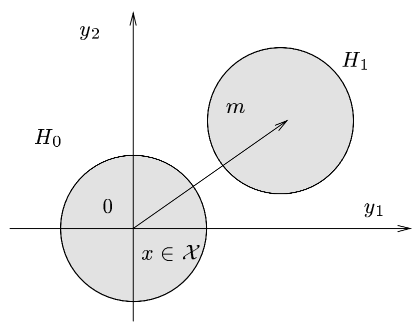

FIG. 1: Hypothèses de test. Exemple.

Problème à critère unique

Pour simplifier, on admet tout d'abord que les paramètres α et β sont égaux et valent 1, et on prendra $n = 2$ sans perte de généralité. Si la nuisance est connue et vaut z, le domaine de décision (de H_1) est un demi-plan :

$$D_1(z) \quad = \quad \left\{ y \in \mathcal{Y} \mid m \cdot (y - z) \geq \frac{1}{2}||m||^2 \right\}.$$

On remarque que le coût optimal est le même pour toutes les valeurs de z, et que deux valeurs de z qui se projettent au même point sur la direction de la moyenne m définissent les mêmes domaines de décision. En comparant le coût réel de la décision prise pour z au coût optimal, on obtient la fonction regret (positive),

$$F_1(x,z) = G_1(x,z) = \int_{D_1(z)} k(y,x)dy - \int_{D_1(z)} k(y,z)\mathrm{d}y \quad (7)$$

Nous posons alors le problème d'optmisation du critère $F_1 = G_1$ de la manière suivante :

$$\min_{z \in \mathcal{X}} \max_{x \in \mathcal{X}} G_1(x,z).$$

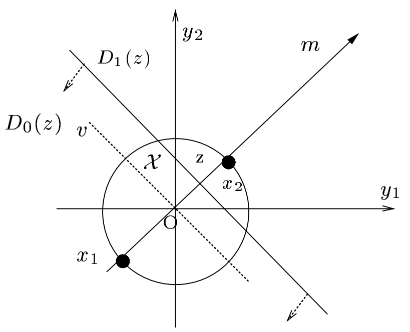

FIG. 2: Problème mono-critère/cas gaussien, $n = 2$

Lorsque $\alpha = \beta$, les paramètres $x^*(z)$ pour lesquels $G_1(x,z)$ est minimal sont les points dont les projections sur la direction de m sont les plus éloignées de celle de z. Pour notre exemple, il s'agit donc d'un des deux points d'intersection de $\mathcal{X}$ avec la droite (Om). L'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $\max_x G_1(x,z)$ est minimal est le diamètre du domaine $\mathcal{X}$ orthogonal au vecteur de variation de moyenne m.

Si $\alpha \neq \beta$, la solution est le segment de droite inclus dans $\mathcal{X}$, orthogonal à m situé à $-\ln\frac{\beta}{\alpha}$ du centre de symétrie de la boule $\mathcal{X}$. (Le résultat peut être étendu facilement au cas où $\mathcal{X}$ est un domaine borné quelconque : il s'agit alors de l'intersection de $\mathcal{X}$ avec la droite orthogonale à m, passant par le point situé à $-\ln\frac{\beta}{\alpha}$ du milieu de la projection de $\mathcal{X}$ sur m).
Pour tout z^* solution du problème on obtient évidemment le même domaine de décision de l'hypothèse H_1, $D_1(y,z^*) = \left\{ y | \frac{f_1(y,z^*)}{f_0(y,z^*)} \geq \frac{\alpha}{\beta} \right\}$.

Problème à deux critères

Pour une valeur z de la nuisance, fixée, il n'est pas possible de donner une forme analytique du domaine de décision associé (ce n'est pas possible non plus pour le GLR) On ne peut pas conclure sur les propriétés d'optimalité de ce test vis-à-vis de la classe des tests qui minimisent le critère J_0 pour une pire nuisance. Mais on peut le comparer à un test minmax et à un test GLR [3] envisagé pour les mêmes hypothèses de jeu, dans le cas très simple où $n = 1$ (les calculs sont alors élémentaires). Dans ce cas simple, le test GLR est équivalent au test minmax : pour l'un ou l'autre, on compare la variable y à un seuil ; le niveau de fausse alarme étant fixé, les domaines de décision obtenus sont bien semblables avec ces deux tests. Pour le test que nous proposons, le domaine de décision se détermine également à l'aide d'un seuil pour la variable y, et le niveau de fausse alarme est toujours fixé à la même valeur. Les trois tests sont donc équivalents dans ce cas particulier.

Le test que nous proposons est cependant moins conservatif, et est compatible avec l'hypothèse physique que la nuisance (état du système à l'instant initial) possède une valeur unique.

4 Conclusion

Nous avons présenté deux nouvelles solutions pour le problème de décision en présence de nuisances déterministes. Définies selon un formalisme de la théorie des jeux, elles permettent de fournir des solutions moins pénalisantes aux problèmes de détection posés. Ces approches pourront facilement être adaptées au problème de la détection de ruptures, la taille de la fenêtre de décision étant fixée *a priori*. D'autres critères de choix de la stratégie de décision pourront être définis.

Références

[1] B. Darkhovski (1998), On hypotheses checking in presence of unknown parameter, *Rapport interne - LAIL.*

[2] Fourgeaud C., Fuchs A. (1972), Statistique, *Dunod.*

[3] M. Basseville, I.V. Nikiforov (1993), Detection of abrupt changes, Theory and applications, Prentice Hall, *Information and System Sciences Series.*

[4] I.V. Nikiforov, M. Staroswiecki, B. Vozel (1996), Duality of analitycal redundancy relations and statistical approach in fault diagnosis, *IFAC'96 World Congress*, San Francisco, CA

[5] S.K. Chatterjee, (1959), On an Extension of Stein's Two-Sample Procedure to the Multi-normal Problem, *Statistical Association Bulletin*, Calcutta.

[6] M. Basseville (1997), Information Criteria for Residual Generation and Fault Detection and Isolation *Automatica*, Vol. 33, no. 5, pp. 783-803.