

# Méthode du linogramme octogonal pour la reconstruction d'une image 3D à partir de ses intégrales de plan

Jean-Marc WAGNER<sup>1</sup>, Frédéric NOO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Liège  
Institut Montefiore, bât. B28. 4000 Liège  
wagner@montefiore.ulg.ac.be, noo@montefiore.ulg.ac.be

**Résumé** — Ce travail concerne le problème de la reconstruction d'une image 3D à partir de ses intégrales de plan. Premièrement, nous présentons, d'une manière générale, le principe de la méthode linogramme. Ensuite, nous proposons une nouvelle application de cette méthode que nous appelons méthode linogramme octogonale. Celle-ci est bien adaptée pour reconstruire des objets à support cylindrique, tout en fournissant rapidement des images de bonne résolution.

**Abstract** — This work concerns the problem of reconstruction of a 3D image from its plane integrals. First, we present in a general way, the principle of the linogram method. Then, we propose a new application that we call the octogonal linogram method. This method suits for reconstruction of objects the support of which is cylindrical. It also produces rapidly images with good resolution.

## 1 Introduction

Ce travail concerne le problème de la reconstruction d'une image 3D à partir de projections coniques. Il trouve ses applications dans le domaine de la tomodensitométrie par transmission de rayons X ou par émission monophotonique. Utiliser une géométrie de projections coniques dans ce domaine permet d'une part d'améliorer la résolution des images reconstruites, et d'autre part d'accélérer le processus d'acquisition des mesures. En imagerie médicale, ce dernier point est particulièrement critique car il correspond à une réduction des artefacts dus au mouvement du patient, ainsi qu'à une augmentation de la rentabilité du scanner, augmentation qui résulte de l'accroissement du nombre de patient pouvant être examinés en un temps donné. Voir [5] pour une description de la géométrie de projections coniques.

La reconstruction d'une image 3D à partir de projections coniques s'effectue généralement en deux étapes. La première étape consiste en une conversion des mesures en intégrales de l'image sur des plans de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . La seconde étape consiste à reconstruire l'image 3D à partir de ses intégrales de plan. On notera que les plans pris en compte peuvent être échantillonnés de façon arbitraire pour autant qu'ils couvrent correctement la région d'intérêt de l'image. Ici, nous sommes intéressés par le développement d'un algorithme qui permet d'effectuer cette seconde étape rapidement tout en fournissant des images de bonne résolution.

Comme méthode rapide et précise déjà développée, on cite couramment la méthode linogramme (voir [2]). Cette méthode est en effet très performante mais présente toutefois ses limites. Celles-ci se situent au niveau du volume où la reconstruction est exacte. Que la région d'intérêt soit de forme cubique ou de forme cylindrique (les deux formes

couramment considérées), la méthode linogramme ne permet pas de reconstruire exactement la totalité de cette région dans des conditions d'échantillonnage optimales.

Afin d'essayer d'améliorer les performances de la méthode linogramme classique, Kudo et Saito proposèrent en 1995 une méthode linogramme modifiée (voir [4]). Cette méthode a l'avantage d'être plus rapide mais conduit aussi à un volume de reconstruction exacte réduit. Dans [2], il fut montré que le gain en temps de calcul est inférieur à la perte en volume, ce qui relativise l'intérêt de la méthode linogramme modifiée.

Dans ce travail, nous présentons, d'une manière générale et rigoureuse, le principe de la méthode linogramme. Ensuite, nous nous basons sur les idées de Kudo et Saito afin de développer une nouvelle méthode linogramme qui est aussi rapide que la méthode linogramme classique mais qui permet d'accéder à un volume de reconstruction exacte plus grand dans des conditions d'échantillonnage optimales, dans le cas où la région d'intérêt est cylindrique. Nous appelons cette méthode la méthode linogramme octogonale.

## 2 Principe

Soit  $f(\underline{x})$ , l'image 3D à reconstruire dans  $\mathbb{R}^3$ . Le principe de base de la méthode linogramme est de calculer  $f(\underline{x})$  à partir de sa transformée de Fourier tridimensionnelle (3D) échantillonnée sous une forme spéciale, grâce à une formule d'inversion que nous nous proposons d'établir.

Soit  $\Pi(l, \underline{\theta})$  le plan de  $\mathbb{R}^3$  perpendiculaire au vecteur unitaire  $\underline{\theta}$  et situé à une distance signée  $l$  de l'origine. La transformée de Radon de la fonction  $f(\underline{x})$  est définie par

$$[\mathcal{R}f](l, \underline{\theta}) = \int_{\Pi(l, \underline{\theta})} f(\underline{x}) d\underline{x} \quad (1)$$

Pour  $l$  et  $\underline{\theta}$  fixés, elle est égale à l'intégrale de la fonction  $f(\underline{x})$  sur le plan  $\Pi(l, \underline{\theta})$ . Dans ce travail, l'ensemble des valeurs de  $[\mathcal{R}f](l, \underline{\theta})$  pour une direction  $\underline{\theta}$  fixée est appelé projection de Radon et est noté  $[\mathcal{R}_{\underline{\theta}}f](l)$ . Une des propriétés les plus importantes de la transformée de Radon est le théorème du profil central de la transformée de Fourier

$$[\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{\underline{\theta}}f](L) = [\mathcal{F}_3 f](L\underline{\theta}) \quad (2)$$

qui exprime que la transformée de Fourier 1D de  $[\mathcal{R}_{\underline{\theta}}f](l)$  est identique à la transformée de Fourier 3D de la fonction  $f(\underline{x})$  le long de la droite de direction  $\underline{\theta}$  passant par l'origine.

Nous allons à présent décrire la manière dont la méthode linogramme échantillonne la transformée de Fourier 3D de l'image. Considérons l'espace de Fourier de  $f(\underline{x})$  rapporté aux axes  $A_X A_Y A_Z$  et un point  $\underline{X} = L\underline{\theta}$  de cet espace. Les coordonnées du point  $\underline{X}$  peuvent être décrites à l'aide du triplet  $(U, v, w)$ , comme indiqué à la figure 1. Nous écrivons alors  $\underline{X} = L\underline{\theta} = (U, vU, wU)$  où

$$\begin{cases} L = U\sqrt{1+v^2+w^2} \\ \underline{\theta}(v, w) = (1, v, w)/\sqrt{1+v^2+w^2} \end{cases}$$

La méthode linogramme échantillonne l'espace de Fourier de l'image à  $\Delta U$ ,  $\Delta v$  et  $\Delta w$  constants. Les échantillons de  $[\mathcal{F}_3 f]$  sont donc situés à l'intersection de plans perpendiculaires à l'axe  $A_X$  et de droites passant par l'origine.

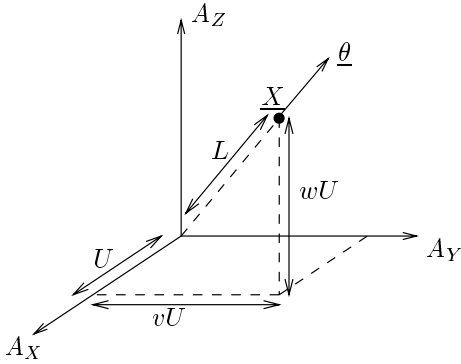


FIG. 1 – Espace de Fourier de  $f(\underline{x})$ . Description des coordonnées  $U, v, w$ .

Afin de relier les échantillons de  $[\mathcal{F}_3 f]$  aux intégrales de plan de  $f(\underline{x})$  qui constituent, rappelons-le, les données du problème, réécrivons le théorème du profil central (2) en utilisant  $U, v$  et  $w$  :

$$[\mathcal{F}_3 f](U, vU, wU) = [\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{\underline{\theta}(v, w)} f] \left( U\sqrt{1+v^2+w^2} \right) \quad (3)$$

Après quelques manipulations, il vient

$$[\mathcal{F}_3 f](U, vU, wU) = [\mathcal{F}_1 g](U, v, w) \quad (4)$$

où nous avons défini

$$g(u, v, w) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2+w^2}} [\mathcal{R}_{\underline{\theta}(v, w)} f] \left( \frac{u}{\sqrt{1+v^2+w^2}} \right) \quad (5)$$

Les coordonnées  $u, v, w$  sont appelées coordonnées linogrammes et (4) constitue le théorème du profil central de la transformée de Fourier exprimé en coordonnées linogrammes. Pour  $u, v, w$  fixés,  $g(u, v, w)$  est égale, au facteur  $1/\sqrt{1+v^2+w^2}$  près, à l'intégrale de  $f(\underline{x})$  sur le plan perpendiculaire à  $\underline{\theta}(v, w)$  et situé à une distance signée  $l = u/\sqrt{1+v^2+w^2}$  de l'origine. Dans la méthode linogramme, les coordonnées  $(u, v, w)$  sont utilisées pour échantillonner la transformée de Radon de  $f(\underline{x})$  à  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  et  $\Delta w$  constants. La direction de chaque projection est fixée par  $v$  et  $w$  et la distance entre deux plans adjacents est donnée par  $\Delta l = \Delta u/\sqrt{1+v^2+w^2}$ . Pour toute direction  $\underline{\theta}(v, w)$  tendant à être perpendiculaire à la direction de l'axe  $A_X$ , la valeur de  $v$  et/ou  $w$  tend vers l'infini, ce qui résulte en une valeur de  $\Delta l$  tendant vers zéro. Pour de telles directions, la distance séparant deux plans adjacents tend donc vers zéro, entraînant un nombre  $N_u$  d'échantillons tendant vers l'infini pour couvrir la région d'intérêt,  $N_u$  étant le nombre de plans parallèles pris en considération pour une direction donnée.

Il reste maintenant à établir la formule de reconstruction de  $f(\underline{x})$  à partir de  $g(u, v, w)$ . Pour ce, exprimons  $f(\underline{x})$  en fonction de sa transformée de Fourier 3D :

$$f(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} [\mathcal{F}_3 f](\underline{X}) e^{j2\pi(\underline{x}, \underline{X})} d\underline{X} \quad (6)$$

Après le changement de variable  $\underline{X} = (X, Y, Z) = (U, vU, wU)$ , il vient

$$f(\underline{x}) = \lim_{v_0, w_0 \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} dU e^{j2\pi x U} \int_{-v_0}^{v_0} dv \int_{-w_0}^{w_0} dw e^{j2\pi(yvU + zwU)} U^2 [\mathcal{F}_1 g](U, v, w) \quad (7)$$

où nous avons remplacé  $[\mathcal{F}_3 f](U, vU, wU)$  par  $[\mathcal{F}_1 g](U, v, w)$  et où  $\underline{x} = (x, y, z)$ . (7) constitue la formule d'inversion de la transformée de Radon en coordonnées linogrammes, les données de Radon étant contenues dans la fonction  $g(u, v, w)$ , appelée linogramme de la fonction  $f(\underline{x})$ . La formule d'inversion suppose quatre opérations à réaliser. Sous forme de pseudo-code :

1. Pour tous  $v$  et  $w$  fixés, transformée de Fourier 1D du linogramme  $g(u, v, w)$ , de la variable  $u$  en la variable  $U$ . En d'autres mots, transformée de Fourier radiale de chaque projection. Par le théorème du profil central de la transformée de Fourier, nous avons à présent des échantillons de  $[\mathcal{F}_3 f]$  sur des grilles rectangulaires concentriques, perpendiculaires à l'axe  $A_X$ .
2. Pour tous  $v$  et  $w$  fixés, filtrage de chaque projection par le filtre parabolique  $U^2$ .
3. Pour tous  $U$  fixés, transformée Chirp-Z selon  $v$ , transformant la variable  $v$  en la variable  $y$  et transformée Chirp-Z selon  $w$ , transformant la variable  $w$  en la variable  $z$ .
4. Pour tous  $y$  et  $z$  fixés, transformée de Fourier 1D inverse, transformant la variable  $U$  en la variable  $x$ .

La transformée Chirp-Z (voir [3]) est une transformée de Fourier discrète (DFT) d'un genre un peu particulier, mais

pouvant être implémentée par transformée de Fourier rapide (FFT). Chaque étape de la reconstruction peut donc être réalisée par FFT, ce qui constitue un avantage certain de la méthode linogramme.

Venons-en à présent à l'ambiguïté qu'introduit la limite dans la formule d'inversion (7). La présence de cette limite rend en effet impraticable l'implémentation directe de cette formule. La solution à ce problème, utilisée dans la méthode linogramme, est de limiter les valeurs de  $v$  et  $w$  à un ensemble fini  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Il en résulte cependant que l'espace de Fourier 3D de l'image n'est plus entièrement couvert d'échantillons, provoquant une perte d'information nécessaire à une reconstruction exacte.

L'idée est alors de scinder l'espace de Fourier 3D de l'image en sous-espaces qui seront traités séparément et ensuite rassemblés pour reconstruire la fonction  $f(\underline{x})$ . La méthode linogramme décompose l'espace de Fourier de l'image en  $m$  sous-espaces "coniques"<sup>1</sup>  $E_i$ , décrits à la figure 2 et vérifiant

$$\bigcup_{i=1}^m E_i = \mathbb{R}^3 \quad \bigcap_{i=1}^m E_i = \emptyset$$

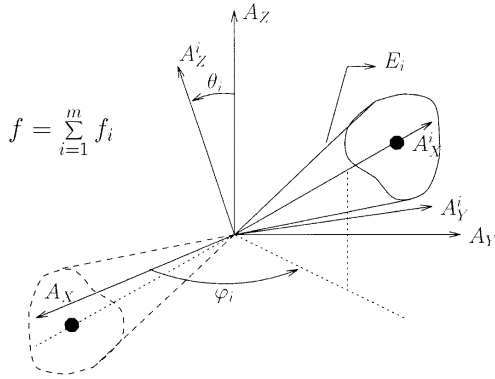


FIG. 2 – Décomposition de l'espace de Fourier 3D de l'image.

La fonction  $f(\underline{x})$  est alors vue comme une somme de  $m$  fonctions  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) de telle sorte que

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m f_i(\underline{x}) \quad (8)$$

où les fonctions  $f_i$  sont définies par

$$[\mathcal{F}_3 f_i](\underline{X}) = \begin{cases} [\mathcal{F}_3 f](\underline{X}) & \underline{X} \in E_i \\ 0 & \underline{X} \notin E_i \end{cases} \quad (9)$$

La transformée de Fourier de  $f_i$  coïncide avec celle de  $f$  sur le sous-espace  $E_i$  et est nulle partout ailleurs. À chaque fonction  $f_i$ , on associe un système d'axes  $A_x^i A_y^i A_z^i$  de direction  $\underline{e}_x^i \underline{e}_y^i \underline{e}_z^i$ , comme le montre la figure 2, et dans lequel la fonction  $f_i$  est reconstruite indépendamment des autres. L'image  $f$  est alors obtenue par rotation et sommation des différentes  $f_i$ .

1. Le terme "coniques" vient du fait que les sous-espaces  $E_i$  sont constitués de 2 cônes situés dans le prolongement l'un de l'autre et dont les sommets sont situés à l'origine.

Le contenu fréquentiel de  $f_i$  correspondant à celui de  $f$  sur  $E_i$ , les échantillons de  $[\mathcal{F}_3 f_i]$  sont obtenus, en utilisant les coordonnées  $U, v, w$ , celles-ci étant cette fois-ci mesurées par rapport aux axes  $A_x^i A_y^i A_z^i$ , à partir de la transformée de Radon de  $f$  grâce au théorème du profil central (4). Nous définissons alors

$$g_i(u, v, w) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2+w^2}} [\mathcal{R}_{\underline{\theta}_i(v,w)} f] \left( \frac{u}{\sqrt{1+v^2+w^2}} \right) \quad (10)$$

où  $\underline{\theta}_i(v, w)$  est mesuré par rapport aux axes  $A_x^i A_y^i A_z^i$ .  $g_i(u, v, w)$  est appelée linogramme associé à la fonction  $f_i$ . La limite mise à part, la formule d'inversion de  $f_i$  a la même allure que celle de  $f$  (7) et est donnée par

$$f_i(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}} dU e^{j2\pi x U} \int_{\Omega_i} dv dw e^{j2\pi U(vy+wz)} U^2 [\mathcal{F}_1 g_i](U, v, w) \quad (11)$$

où  $\Omega_i$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  permettant aux points  $(X_i = U, Y_i = vU, Z_i = wU)$  de couvrir entièrement le sous-espace 3D  $E_i$  avec  $(v, w) \in \Omega_i$  et  $U \in \mathbb{R}$ ,  $(X_i, Y_i, Z_i)$  étant les coordonnées d'un point dans les axes  $A_x^i A_y^i A_z^i$ . Les équations (8) et (11) constituent la formule d'inversion utilisée en pratique dans la méthode linogramme. La formule (11) ainsi que le pseudo-code décrit plus haut inspirent le schéma de reconstruction de la figure 3.

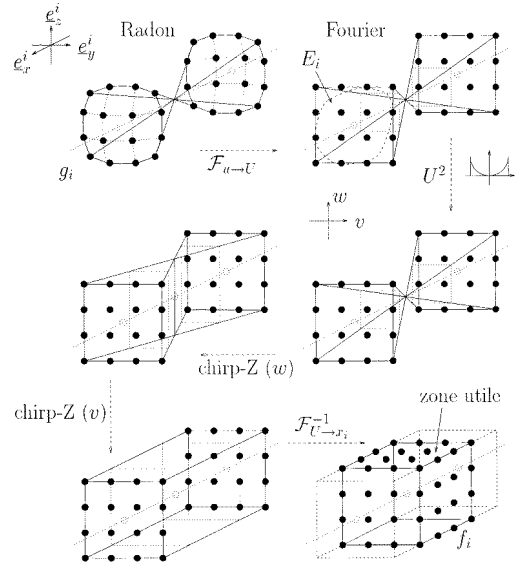


FIG. 3 – Schéma de reconstruction d'une  $f_i$ .

### 3 Linogramme octogonal

La méthode linogramme classique [2] décompose l'espace de Fourier de l'image en 6 pyramides à base carrée ( $m = 3$ ) dont la réunion forme un cube. Celle de Kudo et Saito [4] décompose l'espace de Fourier de l'image en 12 pyramides identiques à base pentagonale ( $m = 6$ ) dont la réunion forme un dodécaèdre. La méthode linogramme octogonale que nous proposons décompose l'espace de Fourier de l'image en 10 pyramides ( $m = 5$ ) dont 2 sont à

base octogonale et 8 à base rectangulaire, comme montré à la figure 4.

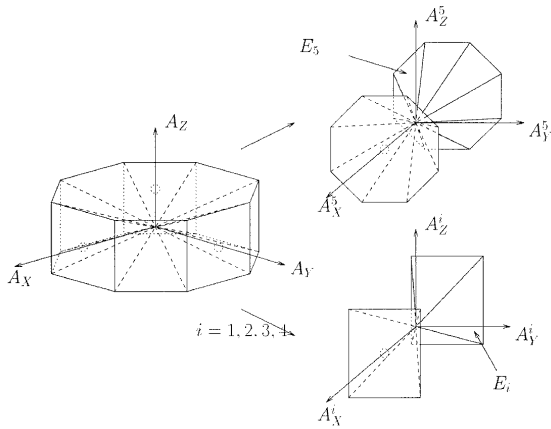


FIG. 4 – Description de la méthode linogramme octogonale.

Intuitivement, au vu de la figure 4, on peut déjà sentir que la méthode linogramme octogonale est bien adaptée pour reconstruire des objets à support cylindrique orientés selon l'axe  $A_Z$ .

## 4 Résultats

Le tableau 1 fournit les valeurs de quelques grandeurs qui permettent de comparer les performances des méthodes linogrammes classique, modifiée et octogonale. Ces grandeurs sont (i) le nombre d'intégrales de plan, normalisé à 1 pour la méthode classique, (ii) le temps de calcul, normalisé à 1 pour la méthode classique, (iii) la fraction  $V_{cube}^*$  de la région cubique d'intérêt où la reconstruction est exacte, et (iv) la fraction  $V_{cyl}^*$  de la région cylindrique d'intérêt où la reconstruction est exacte. On observe que la méthode octogonale est plus performante que la méthode classique en de nombreux points ; en l'occurrence elle nécessite moins de données pour, en plus, fournir un volume de reconstruction plus grand dans le cas d'une région d'intérêt de forme cylindrique.

Nous montrons, à la figure 5 le résultat de la reconstruction du fantôme de Shepp-Logan (voir [2]) sur une grille  $128 \times 128 \times 128$  pour la méthode classique, la méthode modifiée et la méthode octogonale. Ce fantôme est couramment utilisé pour tester la précision des algorithmes. On voit que la méthode octogonale est aussi précise que la méthode classique.

TAB. 1 – Comparaison des algorithmes.

Méthode	Données	Temps	$V_{cube}^*$	$V_{cyl}^*$
Classique	1.0	1.0	84.1%	94.4%
Modifiée	0.265	0.224	<20.0%	<25.0%
Octogonale	0.896	1.075	82.8%	100%



FIG. 5 – De haut en bas : Méthodes classique, modifiée et octogonale.

## Références

- [1] A.C. Kak, M. Slaney. *Principle of computerized tomography imaging*. IEEE Press, 1987.
- [2] C. Axelsson-Jacobson. *Fourier methods in 3D reconstruction from cone-beam data*. PhD Thesis, dpt. of Elect. Eng., Linköping University, S-581 83 Linköping, Sweden, 1996.
- [3] L.R. Rabiner, R.W. Schaffer, C.M. Rader. "The chirp-Z transform algorithm". *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, AU-17,86-92, 1969.
- [4] H. Kudo and T. Saito. "An efficient Linogram Sampling Method for Cone-Beam Reconstruction". *Conference Record of 1995, IEEE Medical Imaging Conference*, 1995.
- [5] P. Grangeat, P. Sire, R. Guillemaud, V. La, "Indirect cone-beam three-dimensional image reconstruction", dans C. Roux, J. L. Coatrieux (eds.), *Contemporary Perspectives in Three-Dimensional Biomedical Imaging*, chapitre 2, 29-52; 343-350, *Studies in Health Technology and Informatics*, vol. 30, IOS Press, 1997.