

Extraction et détection automatique de pistes fréquentielles en sonar passif

Sébastien PARIS¹, Claude JAUFFRET¹, Georges GOULLET²

¹MS-GESSY, Avenue G.Pompidou, 83160 La Valette du Var, France

²DCE, CTSN, Chemin de la Gardiole, 83140 Six Fours, France
paris@isitiv.univ-tln.fr, jauffret@isitiv.univ-tln.fr

Résumé – Nous proposons une nouvelle approche pour l'extraction automatique de plusieurs pistes fréquentielles de signaux "bandes étroites" par chaînes de Markov cachées. L'algorithme présenté est une extension du *Forward-Backward* dans un cadre multisources.

Abstract – A new approach of the multiple frequency line tracking based upon the so called "Hidden Markov Models" is proposed. More precisely, the *Forward-Backward* algorithm is showed to be very efficient.

1 Introduction

L'extraction des pistes fréquentielles en sonar passif permet *a posteriori* la classification de bâtiments. Produites par les parties mécaniques et arbres moteurs des navires, la fluctuation des raies fréquentielles au cours du temps, permet l'identification des bâtiments, voire leur trajectographie. Ces raies fréquentielles sont observées sur un lofargramme, représentation temps-fréquence utilisée en sonar passif. L'extraction de pistes consiste à retrouver les raies dans un environnement fortement bruité. Ces pistes au nombre inconnu, peuvent également se croiser ou disparaître et réapparaître au cours de l'observation. Récemment, en modélisant le problème en termes de chaînes de Markov cachées, l'utilisation d'algorithmes du type *Forward-Backward* ou de *Viterbi*, ont montré leur efficacité à très faibles rapports signal à bruit [4].

Nous proposons un nouvel algorithme pour l'extraction et la détection automatique de pistes fréquentielles s'appuyant sur l'algorithme *Forward-Backward* [7, 1], qui tient à la fois compte des naissances et morts des pistes (partie détection), du croisement des pistes, et détermine le nombre de piste présentes. Ceci est réalisé en deux étapes; la partie estimation d'abord qui consiste à retrouver les pistes fréquentielles les plus probables à l'intérieur du lofargramme; puis la partie détection qui valide *a posteriori* les résultats de la partie estimation. Pour les deux étapes, l'algorithme *Forward-Backward* est utilisé.

2 Définitions

2.1 Modélisation de l'observation

Soit l'observation sur une période T d'un signal échantillonné à la fréquence f_e . Ce signal est découpé en K blocs adjacents de N échantillons tel que $T = NK$. L'ensemble des blocs indexés par l'instant k forme la mesure $Z_K =$

$\{z_k\}_{k=1,\dots,K}$.

Pour chaque instant k , on suppose observer au plus L cysoïdes dans un bruit additif :

$$z_k(n) \triangleq \sum_{l=1}^L b_k^l e^{-j(2\pi f_k^l n + \phi_k^l)} + \varepsilon_k(n), \quad (1)$$

avec $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K) \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2 I_d)$. En extraction de pistes, les paramètres b_k^l et ϕ_k^l sont considérés comme paramètres de nuisance. On identifie alors l'état $x_k^l \triangleq f_k^l$.

Pour chaque mesure z_k , le calcul de la partie *Coarse search* [6] de l'estimateur du *maximum de vraisemblance* est réalisé à l'aide du périodogramme :

$$P_k(i) \triangleq \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} z_k(n) e^{-j2\pi \frac{ni}{M}} \right|^2, \quad i = 1, \dots, M, \quad (2)$$

où M peut être un multiple de N , si la technique du zero-padding est utilisée. L'ensemble des K périodogrammes forme le lofargramme. L'état x_k^l à chaque instant k , prend la réalisation $\gamma_k^l = 0, \dots, M-1$, un des M canaux fréquentiels. La piste l parmi les L maxima présents est définie par la séquence d'états X_K^l de réalisation $\Upsilon_K^l \triangleq \{\gamma_1^l, \dots, \gamma_K^l\}$.

2.2 Equation dynamique de l'état

On modélise le comportement de chacune des pistes à l'aide d'une marche aléatoire, c'est-à-dire une chaîne de Markov du premier ordre en x_k^l . Néanmoins, pour tenir compte des croisements de pistes possibles, il faut modéliser à la fois, les variations de x_k^l et de sa dérivée \dot{x}_k^l de réalisation $\dot{\gamma}_k^l = -(\frac{I-1}{2}), \dots, (\frac{I-1}{2})$ (I impair), à l'aide d'une équation dynamique d'ordre 0 en $y_k^l \triangleq (x_k^l, \dot{x}_k^l)$ de réalisation $\Gamma_k^l \triangleq (\gamma_k^l, \dot{\gamma}_k^l)$:

$$y_k^l \triangleq D^e y_{k-1}^l + \eta_k, \quad (3)$$

avec $D^e \triangleq \begin{pmatrix} 1 & \frac{T}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\eta_k \triangleq N(0, R)$ où R est la matrice de variance-covariance du bruit d'état, la durée. En

admettant que x_k^l et \hat{x}_k^l sont deux *v.a* indépendantes, R se met sous la forme $R \triangleq \begin{pmatrix} \sigma_{\eta_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta_2}^2 \end{pmatrix}$.

La probabilité de transition de l'état y_k^l se calcule par,

$$\Pr(y_k^l = \Gamma_k^l | y_{k-1}^l = \Gamma_{k-1}^l) \triangleq \frac{1}{2\pi\sqrt{\det R}} e^{-\frac{1}{2}\|y_k^l - D^e \Gamma_{k-1}^l\|_{R^{-1}}^2}. \quad (4)$$

Pour toutes les L pistes, la probabilité de transition de l'état y_k^l sera identique $\forall l = 1, \dots, L$.

2.3 Vraisemblance de l'observation

La vraisemblance de l'observation z_k conditionnée à l'état y_k^l et notée $\Pr(z_k | y_k^l = \Gamma_k^l)$, est l'un des trois *a priori* définissant la chaîne de Markov cachée associée à la piste l . Contrairement aux approches établissant l'expression de cette vraisemblance après une phase de détection sur le lo-fargramme (*cf PDA [3]*), nous utilisons directement l'information brute de chaque périodogramme calculé pour instant k .

Nous supposons pour la suite, que la probabilité d'avoir l'état y_k^l égal à la réalisation Γ_k^l en ayant observé z_k , est proportionnelle à :

$$\Pr(z_k | y_k^l = \Gamma_k^l) \propto \frac{1}{I} \frac{P_k(\gamma_k^l)}{\sum_{j=0}^{M-1} P_k(j)}, \quad \forall \gamma_k^l = -\left(\frac{I-1}{2}\right), \dots, \left(\frac{I-1}{2}\right), \quad (5)$$

homogène à une probabilité.

Dans un premier temps, nous présenterons l'algorithme *Forward-Backward* associée à la partie estimation des pistes fréquentielles, puis nous l'utiliserons de nouveau pour cette fois la partie détection.

3 Forward-Backward pour la partie estimation des pistes

Le *Forward-Backward* calcule la probabilité *a posteriori* $\chi_k^{e,l}(\Gamma_k^l) = \Pr(y_k^l = \Gamma_k^l | Z_K)$ d'avoir y_k^l égal à la réalisation Γ_k^l connaissant l'ensemble des mesures Z_K [5].

La nouvelle approche consiste à estimer les états y_k^l sachant qu'ils sont mutuellement tous différents les uns des autres. Pour cela, on introduit l'événement Δ_k^l défini par $\Delta_k^l \triangleq \forall j = 1, \dots, L, \text{ avec } l \neq j, \vartheta(y_k^l = \Gamma_k^l) \cap \vartheta(y_k^j = \Gamma_k^j) = \emptyset$, c'est-à-dire que la réalisation de y_k^l ne doit pas être dans le même voisinage ϑ que celui des autres états. Une nouvelle probabilité *Forward-Backward* $\Pr(y_k^l = \Gamma_k^l | Z_K, \Delta_k^l)$ est alors calculée et notée $\xi_k^{e,l}(\Gamma_k^l)$. On montre que $\xi_k^{e,l}(\Gamma_k^l)$ est égal à :

$$\xi_k^{e,l}(\Gamma_k^l) = \frac{\alpha_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l) \beta_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l)}{\sum_{\Gamma_k^l} \left[\alpha_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l) \beta_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l) \right]}, \quad (6)$$

avec les nouvelles expressions itératives des lois *Forward* $\alpha_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l)$ et *Backward* $\beta_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l)$ modifiées :

$$\alpha_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l) = \frac{q_k^{\alpha,l}(\Gamma_k^l) \alpha_k^{e,l}(\Gamma_k^l)}{\sum_{\Gamma_k^l} q_k^{\alpha,l}(\Gamma_k^l) \alpha_k^{e,l}(\Gamma_k^l)}, \quad (7)$$

avec :

$$\begin{aligned} & \alpha_k^{e,l}(\Gamma_k^l) \\ &= \frac{\Pr(z_k | y_k^l = \Gamma_k^l) \sum_{\Gamma_{k-1}^l} \alpha_{k-1}^{\Delta,l}(\Gamma_{k-1}^l) \Pr(y_k^l = \Gamma_k^l | y_{k-1}^l = \Gamma_{k-1}^l)}{\sum_{\Gamma_k^l} \left[\Pr(z_k | y_k^l = \Gamma_k^l) \sum_{\Gamma_{k-1}^l} \alpha_{k-1}^{\Delta,l}(\Gamma_{k-1}^l) \Pr(y_k^l = \Gamma_k^l | y_{k-1}^l = \Gamma_{k-1}^l) \right]}, \quad (8) \end{aligned}$$

pour $k = 2, \dots, K$, et $\alpha_1^{\alpha,l}(\Gamma_1^l) = \pi_1^{\alpha,l}$ probabilité initiale *Forward*, et

$$q_k^{\alpha,l}(\Gamma_k^l) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^L \left[1 - \sum_{i=\Gamma_k^j - v^\alpha}^{\Gamma_k^j + v^\alpha} \alpha_k^{e,j}(i) \right].$$

Et

$$\beta_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l) = \frac{q_k^{\beta,l}(\Gamma_k^l) \beta_k^{e,l}(\Gamma_k^l)}{\sum_{\Gamma_k^l} q_k^{\beta,l}(\Gamma_k^l) \beta_k^{e,l}(\Gamma_k^l)}, \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned} & \beta_k^{e,l}(\Gamma_k^l) \\ &= \frac{\sum_{\Gamma_{k+1}^l} \Pr(z_{k+1} | y_{k+1}^l = \Gamma_{k+1}^l) \Pr(y_{k+1}^l = \Gamma_{k+1}^l | y_k^l = \Gamma_k^l) \beta_{k+1}^{\Delta,l}(\Gamma_{k+1}^l)}{\sum_{\Gamma_k^l} \left[\sum_{\Gamma_{k+1}^l} \Pr(z_{k+1} | y_{k+1}^l = \Gamma_{k+1}^l) \Pr(y_{k+1}^l = \Gamma_{k+1}^l | y_k^l = \Gamma_k^l) \beta_{k+1}^{\Delta,l}(\Gamma_{k+1}^l) \right]}, \quad (10) \end{aligned}$$

pour $k = K-1, \dots, 1$, et $\beta_K^{\beta,l}(\Gamma_K^l) = \pi_K^{\beta,l}$ probabilité initiale *Backward*, et

$$q_k^{\beta,l}(\Gamma_k^l) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^L \left[1 - \sum_{i=\Gamma_k^j - v^\beta}^{\Gamma_k^j + v^\beta} \beta_k^{e,j}(i) \right].$$

v^α et v^β représentent deux voisinages autour de la réalisation de l'état.

On supposera que $\alpha_{k-1}^{e,l}(\Gamma_{k-1}^l) = \alpha_{k-1}^{\Delta,l}(\Gamma_{k-1}^l)$ et que $\beta_{k+1}^{e,l}(\Gamma_{k+1}^l) = \beta_{k+1}^{\Delta,l}(\Gamma_{k+1}^l)$, c'est-à-dire que les états y_k^l sont déjà au préalable séparés à l'itération précédente. Cette hypothèse impose que les probabilités d'initialisation $\pi_1^{\alpha,l}$ et $\pi_K^{\beta,l}$ doivent être définies différemment pour chacune des pistes. Un exemple d'initialisation est :

$$\begin{aligned} \pi^{\alpha,l} & \triangleq \begin{pmatrix} \frac{L}{MI}, & \text{si } \gamma_1^l = \left[\frac{(L-1)}{M}, \frac{L}{M} \right] \text{ et } \dot{\gamma}_1^l = -\left(\frac{L-1}{2}\right), \dots, \left(\frac{L-1}{2}\right) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{pmatrix} \\ \pi^{\beta,l} & \triangleq \begin{pmatrix} \frac{L}{MI}, & \text{si } \gamma_K^l = \left[\frac{(L-1)}{M}, \frac{L}{M} \right] \text{ et } \dot{\gamma}_K^l = -\left(\frac{L-1}{2}\right), \dots, \left(\frac{L-1}{2}\right) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{pmatrix} \quad (11) \end{aligned}$$

Les deux probabilités $q_k^{\alpha,l}(\Gamma_k^l)$ et $q_k^{\beta,l}(\Gamma_k^l)$ sont égales respectivement à $\Pr(\Delta_k^l | y_k^l = \Gamma_k^l, Z_k)$ et $\Pr(\Delta_k^l | z_{k+1}, \dots, z_K, y_k^l = \Gamma_k^l)$. La probabilité $q_k^{\alpha,l}(\Gamma_k^l)$ pour que l'état y_k^l ne soit pas dans le même voisinage des autres $y_k^i, i = 1, \dots, L$, connaissant également l'ensemble des mesures Z_k , est calculée à partir des probabilités $\alpha_k^{e,i}, i = 1, \dots, L$, les seules informations *a posteriori* disponibles.

De même pour la probabilité $q_k^{\beta,l}(\Gamma_k^l)$ est définie à partir

des probabilités $\beta_k^{e,j}$.

L'estimé $\hat{y}_{k|K}^l$ est donné par le MMSE (*Minimum Mean Square Estimator*) de $\chi_k^{e,l}(\Gamma_k^l)$, c'est-à-dire $\hat{y}_{k|K}^l \triangleq E[y_k^l | Z_K]$. La séquence estimée correspondant à la piste est définie par $\hat{Y}_{k|K}^l \triangleq (\hat{y}_{1|K}^l, \dots, \hat{y}_{k|K}^l)$. Les résultats peuvent être comparés avec ceux de Bethel [2] mais ici, dans une approche *Forward-Backward*.

3.1 Réassociation des probabilités Forward et Backward en multipistes

En présence de plusieurs pistes fréquentielles, il est nécessaire de réassocier les probabilités *Forward* et *Backward* appartenant à la même source (surtout lors de croisement de pistes). Pour $l = 1, \dots, L$, on cherche $\hat{r} = 1, \dots, L$ tel que :

$$\hat{r} = \arg \max_r \left\{ \sum_{\Gamma_1^l} \dots \sum_{\Gamma_K^l} \left(\prod_{i=1}^K \alpha_i^{\Delta,l}(\Gamma_i^l) \beta_i^{\Delta,r}(\Gamma_i^l) \right) \right\}, \quad (12)$$

avec $r = 1, \dots, L$.

La probabilité *Forward-Backward* $\xi_k^{e,l}(\Gamma_k^l)$ associée à la piste l sera *a posteriori* définie par :

$$\xi_k^{e,l}(\Gamma_k^l) = \frac{\alpha_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l) \beta_k^{\Delta,\hat{r}}(\Gamma_k^l)}{\sum_{\Gamma_k^l} \alpha_k^{\Delta,l}(\Gamma_k^l) \beta_k^{\Delta,\hat{r}}(\Gamma_k^l)}. \quad (13)$$

4 Forward-Backward pour la partie détection

Il est utile d'associer à la partie estimation pour chacune des raies fréquentielles, un détecteur dont le rôle est de valider individuellement chacun des états \hat{y}_k^l estimés. L'idée est d'introduire un nouvel état h_k^l (*v.a* de réalisation $\nu_k^l = \{0, 1\}$) qui serait observé via la nouvelle mesure fournie par la partie estimation, i.e. \hat{y}_k^l . On considère cette nouvelle séquence d'états $H_K^l = \{h_k^l\}_{k=1, \dots, K}$ suivant également une marche aléatoire, et modélisée par une nouvelle HMM.

4.1 Equation dynamique pour la détection

Contrairement à la partie estimation, nous modélisons les variations temporelles de l'état h_k^l à l'aide d'une simple équation dynamique d'ordre 0, c'est-à-dire :

$$h_k^l = D^d h_{k-1}^l + \epsilon_k^d, \quad (14)$$

avec $D^d = 1$ et ϵ_k^d bruit d'état iid.

La probabilité de transition du nouvel état entre 2 instants successifs, $\Pr(h_k^l = \nu_k^l | h_{k-1}^l = \nu_{k-1}^l)$ est définie par la matrice A^d (identique pour toutes les L pistes), d'éléments $\{a_{i,j}\}_{i,j=0,1}$ telle que :

$$A^d \triangleq \begin{bmatrix} 1-w & w \\ w & 1-w \end{bmatrix}, \quad (15)$$

avec w proportionnel à la variance du bruit d'état ϵ_k^d .

4.2 Vraisemblance de la nouvelle mesure

La vraisemblance de la mesure \hat{y}_k^l conditionnée à l'état $h_k^l = 1$ est égale à :

$$\Pr(\hat{y}_k^l | h_k^l = 1) \quad (16)$$

$$= \sum_{\Gamma_k^l} q_k^{\alpha,l}(\Gamma_k^l) \alpha_k^{e,l}(\Gamma_k^l) \sum_{\Gamma_k^l} q_k^{\beta,l}(\Gamma_k^l) \beta_k^{e,l}(\Gamma_k^l),$$

c'est-à-dire à la somme des probabilités *a posteriori* $\Pr(y_k^l = \Gamma_k^l, Z_k)$ pour que l'état y_k^l soit égale à l'une des réalisations possibles Γ_k^l et conjointement à la somme des probabilités *a posteriori* $\Pr(z_{k+1}, \dots, z_K | y_k^l = \Gamma_k^l)$ pour que y_k^l soit aussi égal à la même réalisation Γ_k^l .

La vraisemblance $\Pr(\hat{y}_k^l | h_k^l = 0)$ est proportionnelle à $\frac{1}{(MT)^2}$, c'est-à-dire quand y_k^l est absent, l'estimée \hat{y}_k^l prend uniformément une des valeurs possibles.

4.3 Forward-Backward associé à la partie détecteur

Bien que les hypothèses standard de mise en œuvre de l'algorithme *Forward-Backward* ne soient pas vérifiées (les nouvelles mesures \hat{y}_k^l ne sont pas indépendantes entre elles), nous l'utiliserons également pour la partie détection.

La nouvelle probabilité *Forward-Backward* $\chi_k^{d,l}(\nu_k^l) = \Pr(h_k^l = \nu_k^l | \hat{Y}_{K}^l)$ associée à l'état h_k^l est :

$$\chi_k^{d,l}(\nu_k^l) \triangleq \frac{\alpha_k^{d,l}(\nu_k^l) \beta_k^{d,l}(\nu_k^l)}{\sum_{\nu_k^l} \alpha_k^{d,l}(\nu_k^l) \beta_k^{d,l}(\nu_k^l)}, \quad (17)$$

avec

$$\alpha_k^{d,l}(\nu_k^l) \triangleq \frac{\Pr(\hat{y}_k^l | h_k^l = \nu_k^l) \sum_{\nu_{k-1}^l} \alpha_{k-1}^{d,l}(\nu_{k-1}^l) \Pr(h_{k-1}^l = \nu_{k-1}^l | h_{k-2}^l = \nu_{k-2}^l)}{\sum_{\nu_k^l} \left[\Pr(\hat{y}_k^l | h_k^l = \nu_k^l) \sum_{\nu_{k-1}^l} \alpha_{k-1}^{d,l}(\nu_{k-1}^l) \Pr(h_{k-1}^l = \nu_{k-1}^l | h_{k-2}^l = \nu_{k-2}^l) \right]}$$

$$\beta_k^{d,l}(\nu_k^l) \triangleq \frac{\sum_{\nu_{k+1}^l} \Pr(\hat{y}_k^l | h_k^l = \nu_k^l) \Pr(h_k^l = \nu_k^l | h_{k-1}^l = \nu_{k-1}^l) \beta_{k+1}^{d,l}(\nu_{k+1}^l)}{\sum_{\nu_k^l} \left[\sum_{\nu_{k+1}^l} \Pr(\hat{y}_k^l | h_k^l = \nu_k^l) \Pr(h_k^l = \nu_k^l | h_{k-1}^l = \nu_{k-1}^l) \beta_{k+1}^{d,l}(\nu_{k+1}^l) \right]}. \quad (18)$$

L'estimée de $\hat{h}_{k|K}^l$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_{k|K}^l = 1 \text{ si } \Pr(h_k^l = 1 | \hat{Y}_{K}^l) > t \\ \hat{h}_{k|K}^l = 0 \text{ sinon.} \end{array} \right\}, \quad (19)$$

avec t probabilité de confiance (par exemple $t = 0.99$). La nouvelle séquence liée à la détection $\hat{H}_{K|K}^l \triangleq (\hat{h}_{1|K}^l, \dots, \hat{h}_{K|K}^l)$ valide la séquence estimée $\hat{Y}_{K|K}^l$ de la partie estimation. Pour cela, on forme une nouvelle séquence

$$\hat{G}_{K|K}^l \triangleq \hat{Y}_{K|K}^l \hat{H}_{K|K}^l, \quad (20)$$

correspondant à la piste l validée après détection. La séquence $\hat{G}_{K|K}^l$ est le résultat final des extracteurs de pistes.

5 Application pratique

Un exemple d'extraction de deux pistes qui se croisent au centre du lofargramme est présenté. On choisit comme paramètre de l'application $M = 256$, $K = 200$, $L = 3$, $w = 10e - 5$, $I = 5$, $v^\alpha = v^\beta = [3, 12]$ ou 3 est la taille du voisinage en nombre de pente et 12 en nombre de canaux de fréquentiels. Le rapport signal à bruit de deux pistes est de 9dB après gain FFT. $\sigma_{\eta_1}^2 = 1.3$ et $\sigma_{\eta_2}^2 = 1$. La figure 3 montre le résultat de l'extraction. Les probabilités de présence $\chi_k^{d,l}(1)$ associées à chacune des pistes (cf figure 4) montrent que seules les pistes 1 et 3 ont été retenues (probabilité supérieure à $t = 0.99$). On a bien retrouvé les deux pistes réellement présentes dans la figure 1.

6 Conclusions

Nous proposons une nouvelle approche dans l'extraction multipistes fréquentielles. Une extension de l'algorithme *Forward-Backward* est utilisée dans la partie estimation. La partie détection est également mis en œuvre avec un algorithme *Forward-Backward*, permettant de valider *a posteriori* les morceaux de pistes potentiellement présents. Une extension à ce travail est d'utiliser l'algorithme EM pour la réestimation de la HMM liée à la partie détection.

Références

- [1] R. Barrett and D. Holdsworth. Frequency tracking using hidden markov models with amplitude and phase information. *IEEE Transactions on signal processing*, vol 41, no. 10, pages 2965–2976, October 1993.
- [2] R. Bethel and G. Paras. A pdf multitarget tracker. *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 30, no. 2, pages 386–403, April 1994.
- [3] C. Jauffret and D. Bouchet. Frequency line tracking on a lofargram. *Asilomar*, 1996.
- [4] S. Paris and C. Jauffret. Frequency line tracker in passive sonar system. *GDR-PRC ISIS*, 10 november 1998.
- [5] L. Rabiner and B. Juang. An introduction to hidden markov models. *IEEE ASSP Magazine*, vol. 3, pages 4–16, January 1986.
- [6] D. Rife and R. Boorstyn. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation. *IEEE Transactions on information theory*, vol. IT-20, pages 591–598, September 1974.
- [7] R. Streit and R. Barrett. Frequency line tracking using hidden markov models. *IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing*, vol.38, no. 4, pages 586–598, April 1990.

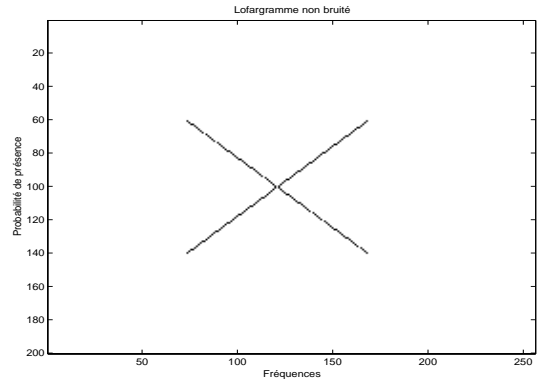


FIG. 1: Lofargramme avec deux pistes fréquentielles qui se croisent

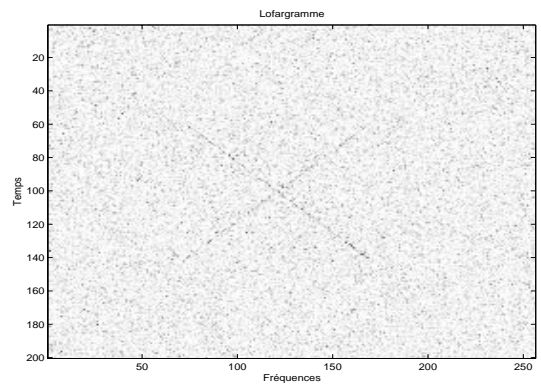


FIG. 2: Lofargramme en entrée de l'extracteur

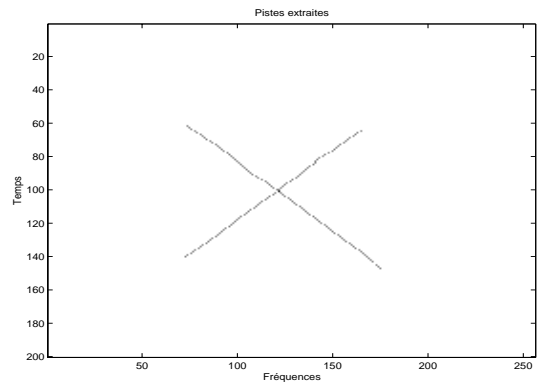


FIG. 3: Pistes extraites

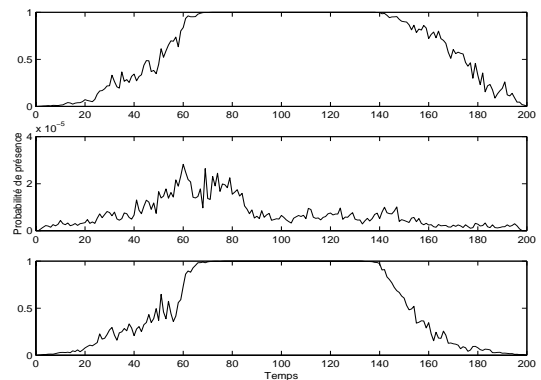


FIG. 4: Probabilité de présence des trois pistes