Fonctions de contraste et cumulants croisés pour la séparation de mélanges convolutifs

Nadège THIRION-MOREAU et Eric MOREAU

MS-GESSY, ISITV, Université de Toulon et du Var
Avenue G. Pompidou, BP 56, 83162 La Valette du Var Cedex, France
thirion@isitv.univ-tln.fr, moreau@isitv.univ-tln.fr

Résumé – Nous considérons le problème de la séparation de mélanges de signaux statistiquement indépendants en contexte convolutif. Notre approche est fondée sur la maximisation de fonctions de contraste. Après un rappel préalable de la définition des fonctions de contraste, nous montrons que dans le cadre des mélanges convolutifs, on peut considérer des contrastes comportant des cumulants croisés. Quatre nouveaux contrastes contenant des cumulants croisés sont donc introduits, l'un d'eux généralise au cas convolutif celui de [1], deux des quatre autres sont intermédiaires entre le contraste de P. Comon [3] et le précédent. Enfin le dernier se révèle spécifique au cas des mélanges convolutifs.

Abstract – We consider the problem of the multichannel blind separation problem for convolutive mixtures of independent signals. Our approach is based on the maximization of high order contrast functions. After recalling the definition of contrast functions, we generalize to the case of convolutive mixtures some contrasts. Four new contrasts involving high-order crossed-cumulants are proposed. One of them enables to generalize contrast [1] to the convolutive case, two of the four others enable to fill the gap between the P. Comon's contrast [3] and the first one. Finally the latter one is specific to the convolutive case.

1 Introduction

Le problème traité est celui de la déconvolution aveugle de systèmes multi-entrées/multi-sorties (MEMS), linéaires et invariants en temps (LIT), excités par des signaux d'entrée indépendants et identiquement distribués (i.i.d.).

Les observations sont constituées par les sorties d'un système réalisant un mélange convolutif des signaux d'entrée aléatoires *inconnus* que l'on appelle généralement *sources*. Le mélange étant lui aussi supposé *inconnu*, l'objectif est de parvenir à restituer le plus fidèlement possible, chacune des sources, à partir de la seule connaissance des signaux de sortie. Autrement dit, il s'agit d'estimer un inverse du système mélangeant.

Ce problème souvent qualifié d'*aveugle* ou de *non supervisé* trouve des applications dans de nombreux domaines, notamment en télécommunications, en radar, en sonar, en traitement de la parole, dans l'analyse des signaux biomédicaux...

Parmi les nombreuses approches développées dans la littérature, nous nous concentrons sur celles qui reposent sur l'optimisation de critères impliquant des statistiques d'ordre strictement supérieur à deux, en nous intéressant plus particulièrement à celles qui passent par la maximisation de fonctions de contraste (appelées plus simplement *contrastes*). En contexte multi-capteurs, les contrastes ont d'abord été développés dans le cadre de la séparation aveugle de sources (mélanges purement spatiaux), avant d'être étendus plus récemment au problème de la déconvolution aveugle multi-dimensionnelle.

Après quelques rappels concernant les contrastes, nous montrons que l'on peut considérer des contrastes impliquant des cumulants croisés (d'ordre strictement supérieur à deux) en mélanges convolutifs. Quatre nouveaux contrastes de ce type sont ensuite détaillés, l'un d'eux généralise au cas convolutif celui de [1], deux des quatre autres sont intermédiaires entre le contraste de P. Comon [3] et le précédent. Enfin le dernier s'avère spécifique au cas des mélanges convolutifs.

2 Formulation du problème et hypothèses

Nous considérons le système *stable* et *inversible* décrit par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{x}(n) = \sum_k \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{a}(n-k) \tag{1}$$

où
- $\boldsymbol{x}(n)$ est le vecteur $(N,1)$ des observations,
- $\boldsymbol{a}(n)$ le vecteur $(N,1)$ des sources réelles inconnues,
- $n \in \mathbb{Z}$ l'indice des temps et
- $\{\boldsymbol{G}\} \triangleq \{\boldsymbol{G}(n), n \in \mathbb{Z}\}$ une suite de matrices carrées réelles (N,N) représentant le système LIT mélangeant.

Nous introduisons également la matrice de transfert (N,N) du système $\{\boldsymbol{G}\}$:

$$[\widehat{\boldsymbol{G}}] \triangleq \widehat{\boldsymbol{G}}(z) \triangleq \sum_k \boldsymbol{G}(k) z^{-k} \tag{2}$$

où z^{-1} correspond à l'opérateur de retard.

Par ailleurs, nous émettons les trois hypothèses suivantes en ce qui concerne les composantes du vecteur des sources :

`A1a`. "*Indépendance*" Les sources $a_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, sont centrées, de puissance unitaire et statistiquement indépendantes,

`A1b`. "*Signaux d'entrée i.i.d.*" Les différentes sources $a_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, sont des processus aléatoires i.i.d. dont le cumulant d'ordre $R \in \mathbb{N}^*$

$$\mathsf{Cum}\,[\underbrace{a_i(n), \ldots, a_i(n)}_{R\times}]$$

existe et est donc une fonction indépendante du temps n. Il est noté $\mathsf{C}_R[a_i]$,

`A1c`. "*Au plus un cumulant nul*" Pour un ordre R donné, les cumulants des sources satisfont l'une des deux conditions suivantes :
`C1`. $|\mathsf{C}_R[a_1]| \geq \cdots \geq |\mathsf{C}_R[a_N]| > 0$;
`C2`. $|\mathsf{C}_R[a_1]| \geq \cdots \geq |\mathsf{C}_R[a_{N-1}]| > |\mathsf{C}_R[a_N]| = 0$.

Ce qui implique qu'un au plus des cumulants $\mathsf{C}_R[a_i]$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ peut être nul.

Pour des raisons pratiques, les sources ont été indicées dans l'ordre décroissant de la valeur absolue de leur cumulant d'ordre R-ième. Notons toutefois que cette hypothèse n'est pas restrictive dans la mesure où tout mélange linéaire de sources peut toujours se réécrire sous la forme d'un mélange de sources agencées de cette manière. Précisons, enfin, que par la suite nous nous limiterons au cas $R = 4$ bien que les résultats soient aisément généralisable pour un ordre de cumulant $R \geq 3$ [13].

Le but étant de restituer les sources, il s'agit d'identifier l'inverse du système mélangeant. Cela se fait grâce à l'estimation d'un système $\{\boldsymbol{H}\}$ agissant sur les observations $\boldsymbol{x}(n)$ de telle sorte que :

$$\boldsymbol{y}(n) = \sum_k \boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{x}(n-k) \tag{3}$$

redonne les N sources d'entrée $a_i(n)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$.

On définit le système LIT global $\{\boldsymbol{S}\}$ par :

$$\boldsymbol{y}(n) = \sum_k \boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{a}(n-k) \stackrel{\triangle}{=} [\widehat{\boldsymbol{S}}]\boldsymbol{a} \tag{4}$$

où

$$[\widehat{\boldsymbol{S}}] \stackrel{\triangle}{=} \widehat{\boldsymbol{S}}(z) = \sum_k \boldsymbol{S}(k) z^{-k}$$

est la matrice (N, N) de transfert du système global. L'élément (i, j), $(\boldsymbol{S}(k))_{ij}$ de la matrice $\boldsymbol{S}(k)$ est noté $S_{ij}(k)$.

Ce système global est supposé satisfaire l'hypothèse suivante :

`A2`. "*Para-unitarité*" $\widehat{\boldsymbol{S}}(z)\widehat{\boldsymbol{S}}^H(1/z^*) = \boldsymbol{I}$ où $\boldsymbol{I}$ représente la matrice identité (N, N).

Cette hypothèse peut être faite sans la moindre perte de généralité dans la mesure où elle revient à considérer que :

$$\mathsf{E}[\boldsymbol{y}(n)\boldsymbol{y}^T(n-k)] = \boldsymbol{I}\delta[k] \tag{5}$$

($\mathsf{E}[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique et $\delta[k] = 1$ si $k = 0$ et 0 sinon). On peut toujours se ramener à cette hypothèse moyennant un blanchiment (spatial et temporel) préalable des observations.

Les sources étant supposées inobservables, certaines indéterminations subsistent au niveau de leur restitution : dans la majeure partie des cas, leur ordre de même que leur puissance et leur retard ne peuvent être identifiés. Ces limitations résultent des indéterminations inhérentes à la séparation de sources combinées à celles de la déconvolution scalaire aveugle. Ainsi, les signaux seront-ils considérés comme étant séparés ssi le système global LIT $\widehat{\boldsymbol{S}}(z)$ se met sous la forme :

$$\widehat{\boldsymbol{S}}(z) = \widehat{\boldsymbol{D}}(z)\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P} \tag{6}$$

où

$$\widehat{\boldsymbol{D}}(z) = \mathrm{Diag}(z^{-d_1}, \ldots, z^{-d_N}) ,$$

$\boldsymbol{\Lambda}$ est une matrice diagonale constante inversible et $\boldsymbol{P}$ une matrice de permutation.

Pour terminer cette partie, nous introduisons des notations qui nous seront utiles par la suite. $\mathcal{A}$ représente l'ensemble des vecteurs aléatoires qui satisfont les hypothèses `A1a`, `A1b` et `A1c`. $\mathcal{S}$ représente l'ensemble des systèmes $\widehat{\boldsymbol{S}}(z)$ satisfaisant l'hypothèse `A2`. Le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ de systèmes de la forme de (6) est noté $\mathcal{P}$. L'ensemble de vecteurs aléatoires $\boldsymbol{y}(n)$ construits selon (4) avec $\boldsymbol{a}(n) \in \mathcal{A}$ et $\widehat{\boldsymbol{S}}(z) \in \mathcal{S}$ est noté $\mathcal{Y}_\mathcal{A}$.

3 Fonctions de contraste

3.1 Rappels

Les fonctions de contraste ont d'abord introduites pour des mélanges instantanés [2] avant d'être récemment généralisées au cas des mélanges convolutifs [3]–[8]. Rappelons donc leur définition la plus générale [8] dans le cas de mélanges convolutifs :

Définition 1. *Un contraste sur $\mathcal{Y}_\mathcal{A}$ est une fonction multivariable $\mathcal{I}(\cdot)$ de l'ensemble $\mathcal{Y}_\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant les trois propriétés suivantes :*
`P1`. $\forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}_\mathcal{A}$, $\forall \widehat{\boldsymbol{D}}(z) \in \mathcal{D}$, $\mathcal{I}([\widehat{\boldsymbol{D}}]\boldsymbol{y}) = \mathcal{I}(\boldsymbol{y})$;
`P2`. $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$, $\forall \widehat{\boldsymbol{S}}(z) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{I}([\widehat{\boldsymbol{S}}]\boldsymbol{a}) \leq \mathcal{I}(\boldsymbol{a})$;
`P3`. $\forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$, $\forall \widehat{\boldsymbol{S}}(z) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{I}([\widehat{\boldsymbol{S}}]\boldsymbol{a}) = \mathcal{I}(\boldsymbol{a}) \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{S}}(z) \in \mathcal{P}$.

Un des premiers contrastes pour des mélanges convolutifs a été proposé par P. Comon [3], il s'écrit :

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i_1=1}^{N} |\mathsf{Cum}[y_{i_1}(n), y_{i_1}(n), y_{i_1}(n), y_{i_1}(n)]|^2 \ . \tag{7}$$

C'est une extension directe d'un contraste qu'il avait proposé dans le cadre des mélanges instantanés [2].

Pour la suite, il est intéressant de rappeler la propriété suivante [8]

Propriété 1. *Soient* $\mathcal{I}_1(\cdot)$ *une fonction de* $\mathcal{Y}_\mathcal{A}$ *vers* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{I}_2(\cdot)$ *un contraste sur* $\mathcal{Y}_\mathcal{A}$. *Si*

$$\begin{array}{lrcl} \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}_\mathcal{A}, & \mathcal{I}_1(\boldsymbol{y}) & \leq & \mathcal{I}_2(\boldsymbol{y}) \\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}, & \mathcal{I}_1(\boldsymbol{a}) & = & \mathcal{I}_2(\boldsymbol{a}) \end{array} \quad (8)$$

alors $\mathcal{I}_1(\cdot)$ *est un contraste sur* $\mathcal{Y}_\mathcal{A}$.

3.2 Quatre nouveaux contrastes

Notre objectif principal dans cette partie est de montrer qu'en mélange convolutif, il est possible de considérer des contrastes comportant des cumulants croisés. En premier lieu, nous proposons une généralisation au cas convolutif du contraste donné dans [1]. Nous démontrons donc le résultat suivant :

Proposition 1. *La fonction*

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{N} |\mathsf{Cum}[y_{i_1}(n), y_{i_1}(n), y_{i_2}(n), y_{i_3}(n)]|^2 \quad (9)$$

est un contraste pour des mélanges convolutifs.

`Preuve.` Commençons par établir quelques résultats préliminaires à l'ordre deux. De l'hypothèse `A2`, il vient que l'inverse du système global est $\widehat{\boldsymbol{S}}^H(1/z^*)$ et donc

$$\boldsymbol{a}(n) = \sum_k \boldsymbol{S}^T(-k)\boldsymbol{y}(n-k)$$

ou encore

$$a_j(n) = \sum_l \sum_i S_{ij}(-l) y_i(n-l) \ .$$

Par conséquent, en notant

$$R_{a_{j_1},a_{j_2}}(k_1,k_2) = \mathsf{E}[a_{j_1}(n+k_1)a_{j_2}(n+k_2)]$$

on a

$$\begin{aligned} R_{a_{j_1},a_{j_2}}(k_1,k_2) &= \sum_{l_1,l_2} \sum_{i_1,i_2} S_{i_1j_1}(-l_1) S^*_{i_2j_2}(-l_2) \\ &\quad \mathsf{E}[y_{i_1}(n+k_1-l_1) y_{i_2}(n+k_2-l_2)] \\ &= \sum_{l_1} \sum_{i_1} S_{i_1j_1}(k_2-l_1) S_{i_1j_2}(k_1-l_1) \end{aligned}$$

La dernière égalité découlant de (5). Comme par ailleurs

$$R_{a_{j_1},a_{j_2}}(k_1,k_2) = \delta[j_1-j_2]\delta[k_1-k_2]$$

nous en déduisons que

$$\sum_{l_1} \sum_{i_1} S_{i_1j_1}(k_2-l_1) S_{i_1j_2}(k_1-l_1) = \delta[j_1-j_2]\delta[k_1-k_2] \quad (10)$$

et donc que

$$\sum_{k_1} \sum_{i_1} |S_{i_1j_1}(k_1)|^2 = 1 \quad (11)$$

Ces deux résultats préliminaires établis, nous introduisons maintenant la fonction intermédiaire $\mathcal{J}_i(\boldsymbol{y})$, définie de la manière suivante

$$\mathcal{J}_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{i}} \sum_{\boldsymbol{l}} |\mathsf{Cum}[y_{i_1}(n), y_{i_1}(n), y_{i_2}(n-l_2), y_{i_3}(n-l_3)]|^2 \quad (12)$$

où $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, i_3)$ et $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2)$. On va maintenant montrer que $\mathcal{J}_i(\boldsymbol{y})$ est un contraste.

En utilisant la propriété de multi-linéarité des cumulants, ainsi que les hypothèses `A1a` et `A1b`, on montre aisément, grâce à (10), que

$$\mathcal{J}_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{j_1} \sum_{k_1} (\sum_{i_1} |S_{i_1j_1}(k_1)|^4)(\mathsf{C}_4[a_{j_1}])^2$$

Maintenant grâce à (11) on a

$$\sum_{k_1} \sum_{i_1} |S_{i_1j_1}(k_1)|^4 \leq \sum_{k_1} \sum_{i_1} |S_{i_1j_1}(k_1)|^2 = 1$$

et donc

$$\mathcal{J}_i(\boldsymbol{y}) \leq \sum_{j_1} (\mathsf{C}_4[a_{j_1}])^2 = \mathcal{J}_i(\boldsymbol{a})$$

De plus il est facile de vérifier que l'égalité n'aura lieu que si $\widehat{\boldsymbol{S}}(z)$ vérifie (6), donc $\mathcal{J}_i(\boldsymbol{y})$ est un contraste. De plus on a les deux relations suivantes

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}(\boldsymbol{y}) & \leq & \mathcal{J}_i(\boldsymbol{y}) \\ \mathcal{J}(\boldsymbol{a}) & = & \mathcal{J}_i(\boldsymbol{a}) \end{array} \quad (13)$$

La propriété 1 permet de conclure, *i.e.* $\mathcal{J}(\boldsymbol{y})$ est un contraste. □

Les deux contrastes qui vont maintenant être donnés sont intermédiaires entre le contraste de P. Comon [3] et le précédent. En effet, pour le contraste $\mathcal{I}(\boldsymbol{y})$ la somme des carrés des cumulants se fait sur un indice alors que pour le contraste $\mathcal{J}(\boldsymbol{y})$ la somme est effectuée sur trois indices. Nous montrons maintenant qu'une somme sur deux indices peut aussi être considérée. Cette sommation peut être réalisée avec deux types de cumulants croisés et donne donc lieu aux deux contrastes suivants.

Proposition 2. *La fonction*

$$\mathcal{J}_1(\boldsymbol{y}) = \sum_{i_1,i_2=1}^{N} |\mathsf{Cum}[y_{i_1}(n), y_{i_1}(n), y_{i_2}(n), y_{i_2}(n)]|^2 \quad (14)$$

est un contraste pour des mélanges convolutifs.

`Preuve.` On a les deux relations suivantes

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}_1(\boldsymbol{y}) & \leq & \mathcal{J}_i(\boldsymbol{y}) \\ \mathcal{J}_1(\boldsymbol{a}) & = & \mathcal{J}_i(\boldsymbol{a}) \end{array} \quad (15)$$

La propriété 1 permet donc de conclure que $\mathcal{J}_1(\boldsymbol{y})$ est un contraste. □

Ce contraste est en fait une généralisation au cas convolutif d'un contraste donné dans [10] dans le cas de mélanges instantanés. La deuxième possibilité d'une somme sur deux indices est donnée par

Proposition 3. *La fonction*

$$\mathcal{J}_2(\boldsymbol{y}) = \sum_{i_1,i_2=1}^{N} |\mathsf{Cum}[y_{i_1}(n), y_{i_1}(n), y_{i_1}(n), y_{i_2}(n)]|^2 \quad (16)$$

est un contraste pour des mélanges convolutifs.

`Preuve.` On a les deux relations suivantes

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}_2(\boldsymbol{y}) & \leq & \mathcal{J}_i(\boldsymbol{y}) \\ \mathcal{J}_2(\boldsymbol{a}) & = & \mathcal{J}_i(\boldsymbol{a}) \end{array} \tag{17}$$

La propriété 1 permet donc de conclure que $\mathcal{J}_2(\boldsymbol{y})$ est un contraste. □

Ce contraste est une généralisation au cas convolutif du contraste proposé par L. De Lathauwer [4] qui est à la base de l'algorithme STOTD. Algorithme qui permet la résolution du problème de la séparation de sources classique grâce à la diagonalisation conjointe d'un ensemble de tenseurs d'ordre trois.

Le résultat suivant illustre le fait que pour des mélanges convolutifs "stricts", *i.e.* ne pouvant pas être réduits à un mélange instantané, une somme sur quatre indices peut être considérée.

Proposition 4. *La fonction*

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{N} |\mathsf{Cum}[y_{i_1}(n), y_{i_2}(n), y_{i_3}(n), y_{i_4}(n)]|^2 \tag{18}$$

est un contraste pour des mélanges convolutifs stricts.

`Preuve.` Elle est similaire à celle de la proposition 1 et elle est par conséquent omise. □

Rappelons que, dans le cas de mélanges instantanés, la fonction $\mathcal{T}(\boldsymbol{y})$ est invariante par transformation unitaire de son argument vectoriel et ne peut donc pas être un contraste.

4 Conclusion

Dans cette communication quatre nouveaux contrastes ont été donnés. Ils généralisent pour le cas des mélanges convolutifs des contrastes donnés pour le cas des mélanges instantanés. Impliquant des cumulants d'ordre quatre, ils peuvent être facilement généralisés à un ordre quelconque supérieur ou égal à trois.

Références

[1] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non Gaussian signals", *IEE Proceedings-F*, Vol. 40, pp 362-370, 1993.

[2] P. Comon, "Independent component analysis, a new concept?", *Signal Processing*, Vol. 36, pp 287-314, 1994.

[3] P. Comon, "Contrasts for multichannel blind deconvolution", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 3, No. 7, pp 209-211, July 1996.

[4] L. De Lathauwer, B. De Moor and J. Vandewalle, "Blind source separation by simultaneous third-order tensor diagonalization", in Proc. *European Signal Processing Conference (EUSIPCO'96)*, Trieste, Italy, pp 2089-2092, Sept. 1996.

[5] P. Loubaton and P. Regalia, "Blind Deconvolution of Multivariate signals: A Deflation Approach", in Proc. *IEEE Int. Conf. on Communication, (ICC'93)*, Geneva, Switzerland, Vol. 2, pp 1160-1164, May 1993.

[6] O. Macchi and E. Moreau, "Self-adaptive source separation, Part I: Convergence analysis of a direct linear network controled by the Hérault-Jutten algorithm", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 45, No. 4, pp 918-926, April 1997.

[7] E. Moreau and J.-C. Pesquet, "Generalized contrasts for multichannel blind deconvolution of linear systems", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 4, No. 6, pp 182-183, June 1997.

[8] E. Moreau, J.-C. Pesquet and N. Thirion-Moreau, "An equivalence between non symmetrical contrasts and cumulant matching for blind signal separation", in Proc. *First Int. Workshop on Independent Component Analysis and Signal Separation, (ICA'99)*, Aussois, France, pp 301-306, Jan. 1999.

[9] E. Moreau and N. Thirion-Moreau, "Non symmetrical contrasts for source separation", *IEEE Trans. Signal Processing*, accepted for publication, Feb. 1999.

[10] E. Moreau, "A Generalization of joint diagonalization criteria for source separation", submitted to *IEEE Trans. Signal Processing*, March 1999.

[11] H.L. Nguyen Thi and C. Jutten "Blind source separation for convolutive mixtures", *Signal Processing*, Vol. 45, pp 209-229, 1995.

[12] C. Simon, P. Loubaton, C. Vignat, C. Jutten and G. d'Urso, "Blind source separation of convolutive mixtures by maximization of fourth-order cumulants: the non i.i.d. case", in Proc. *ASILOMAR'98*, Nov. 1998.

[13] N. Thirion-Moreau and E. Moreau, "Cross-cumulants based contrasts for signal separation", en préparation.