

Estimation de Fréquence Porteuse en Transmission par Satellite

Somsai THAO¹, Maurice BELLANGER¹, André MARGUINAUD², Tristan de COUASNON²

¹CNAM, Électronique
292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France

²ALCATEL
5, rue Noël-Pons, 92734 Nanterre Cedex, France

thaos@cnam.fr, bellang@cnam.fr

Résumé – Une étude du seuil de décrochement de l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde complexe additionnée d'un bruit blanc gaussien est effectuée, en considérant le cas où le module des échantillons du signal reçu est ramené à l'unité. Une méthode de calcul basée sur l'espérance d'un échantillon bruité de module unité est proposée et vérifiée par simulation, en utilisant un algorithme efficace pour l'estimation de fréquence. L'application est l'estimation de la fréquence porteuse dans un récepteur satellite fonctionnant en mode paquet.

Abstract – A study of the operating threshold of the frequency estimation for a complex sinusoid in additive white gaussian noise is carried out, considering the special case where the signal amplitude is set to unity. A technique based on the expectation of a noisy sample with unit amplitude is proposed and verified by simulation, with the help of an efficient algorithm for the frequency estimation. The application envisaged is the estimation of the carrier frequency in a satellite receiver in burst mode transmission.

1. Introduction

Les transmissions numériques par satellite conduisent à utiliser des paquets de données courts, par exemple de quelques centaines de bits, dans un environnement particulier, caractérisé par des rapports signal à bruit très faibles et même négatifs, des décalages en fréquence de grande ampleur, mais avec des trajets multiples généralement négligeables.

Dans ces conditions, il est nécessaire, dans le processus de démodulation, de procéder à une estimation de la fréquence de décalage, ou fréquence porteuse, afin de la compenser dans le récepteur [1]. Cette estimation doit avoir le maximum de précision pour faciliter la récupération des données. Elle est généralement réalisée directement sur les échantillons du signal reçu, après une opération d'élimination de la modulation par les données, ce qui ramène au problème de l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde bruitée.

L'objet du présent article est d'étudier cette estimation, de déterminer la valeur théorique du seuil de décrochement et de proposer un algorithme efficace pour la mise en œuvre, conduisant à des performances très proches des valeurs théoriques. L'algorithme proposé, basé sur une méthode dite des corrélations itérées, présente une complexité réduite et des performances indépendantes de la valeur de la fréquence de décalage.

2. Seuil de décrochement

Pour un nombre d'échantillons fixé N , la précision de l'estimation d'une sinusoïde dans un bruit est limitée par la borne dite de Cramer-Rao [2]. Quant le rapport signal à bruit décroît, à partir d'une certaine valeur appelée seuil de

décrochement, l'estimation s'écarte sensiblement de la borne. La valeur théorique de ce seuil de décrochement est déterminée, pour un bruit blanc supposé gaussien, dans deux cas, avec conservation du module du signal reçu et en ramenant ce module à l'unité, procédure couramment utilisée dans les récepteurs.

2.1 Cas d'une sinusoïde pure bruitée

On considère l'ensemble des N échantillons complexes $x(n)$ de la sinusoïde bruitée suivante :

$$x(n) = s(n) + b(n) ; 1 \leq n \leq N \quad (1)$$

où $s(n) = ae^{j(n\omega + \varphi)}$, a est l'amplitude de la sinusoïde, φ est la phase à l'origine, $\omega T = 2\pi f_d T$ est la pulsation normalisée à estimer, T est la période d'échantillonnage, $b(n)$ est un bruit blanc gaussien complexe de moyenne nulle et de puissance $\sigma_b^2 = 2\sigma^2$.

Pour simplifier, on prendra par la suite une amplitude a égale à l'unité et une phase nulle à l'origine, $\varphi = 0$.

L'estimation ω_{MV} de la pulsation ω de la sinusoïde selon le principe du maximum de vraisemblance est donnée par le maximum du spectrogramme $|X(\omega_i)|$, où

$$X(\omega_i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n) e^{-jn\omega_i} ; -\pi < \omega_i T \leq +\pi \quad (2)$$

Soit :

$$\omega_{MV} = \arg \left\{ \max_{\omega_i} \left\{ \operatorname{Re} \left[X(\omega_i) e^{-j \arg \{ E[X(\omega_i)] \}} \right] \right\} \right\} \quad (3)$$

L'espérance de $X(\omega_i)$ dépend de la pulsation ω_i , elle suit en module la fonction suivante :

$$\left| \frac{1 \sin(N\omega_d/2)}{N \sin(\omega_d/2)} \right| \quad (4)$$

et sa plus grande valeur pour un écart de fréquence significatif correspond à :

$$\frac{1}{N \sin(3\pi/2N)} \sim 2/3\pi \approx 0,2 \quad (5)$$

Le terme $X(\omega)$ a une espérance égale à l'unité et comporte une composante de bruit gaussien de moyenne nulle et de variance σ_b^2/N . Les termes $X(\omega_i \neq \omega)$ de plus grande espérance peuvent être assimilés (d'après le théorème de la limite centrale) à des bruits gaussiens de moyenne 0,2 et de variance σ_b^2/N .

Une erreur d'estimation se produit si, pour une valeur $\omega_i \neq \omega$, on a :

$$|X(\omega_i)| > |X(\omega)| \quad (6)$$

On peut considérer que cet événement se produit quand l'inégalité suivante est vérifiée :

$$1 + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N b(n) e^{-jn\omega} \right] < 0,2 + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N b(n) e^{-jn\omega_d} \right] \quad (7)$$

La puissance de bruit σ_d^2 au seuil de décrochement de l'estimation de la fréquence de la sinusoïde (1) selon le principe du maximum de vraisemblance (3) est donc donnée par l'égalité suivante :

$$1 - 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_d}{\sqrt{N}} = 0,2 + 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_d}{\sqrt{N}} \quad (8)$$

où le facteur de crête 3 a été pris à la valeur correspondant à une probabilité de $1,35 \times 10^{-3}$ pour que l'équation (7) se produise et le facteur $1/\sqrt{2}$ a été introduit pour tenir compte de la projection du bruit sur la direction $E[X(\omega_i)]$.

Le rapport signal à bruit au seuil de décrochement est donc relié au nombre d'échantillons N disponibles par la relation suivante :

$$[S/B]_d = 1/\sigma_d^2 = \frac{1}{[1-0,2]^2} \frac{2 \times 9}{N} \approx \frac{29}{N} \quad (9)$$

Il est inversement proportionnel au nombre d'échantillons N .

Pour une modulation QPSK, le rapport de l'énergie par bit transmis à la densité spectrale de bruit serait :

$$[E_b/N_0]_d = \frac{1}{2} [S/B]_d \approx \frac{14,5}{N} \quad (10)$$

2.2 Cas d'une sinusoïde pure bruitée avec échantillons de module unité

On considère maintenant le cas où les modules des échantillons $x(n)$ de l'équation (1) sont ramenés à l'unité avant estimation de la fréquence de la sinusoïde :

$$y(n) = \frac{x(n)}{|x(n)|} = e^{j[n\omega + \varphi + \varepsilon(n)]} ; 1 \leq n \leq N \quad (11)$$

où $\varepsilon(n)$ est le bruit de phase de chaque échantillon $y(n)$.

La densité de probabilité du bruit de phase $\varepsilon(n)$ est connue et donnée par :

$$p(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}}}{2\pi} + \frac{\sqrt{\gamma} \cos \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\gamma \sin^2 \varepsilon}{2}} Q(-\sqrt{\gamma} \cos \varepsilon) \quad (12)$$

où $\varepsilon \in]-\pi; +\pi]$, $\gamma = 2S/B = 2a^2/\sigma_b^2 = a^2/\sigma^2$, $\sqrt{\gamma} = a/\sigma$ et $Q(\cdot)$ est la fonction de Gauss intégrale complémentaire, définie par :

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (13)$$

L'estimation ω_{MV} de la pulsation ω de la sinusoïde est toujours faite selon le principe du maximum de vraisemblance et donnée par le maximum du spectrogramme $|Y(\omega_i)|$, où

$$Y(\omega_i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y(n) e^{-jn\omega_i} ; -\pi < \omega_i T \leq +\pi \quad (14)$$

Pour tout ω_i , on peut écrire $y(n) \exp[-jn\omega_i]$ sous la forme :

$$y(n) \exp[-jn\omega_i] = m(n) + u(n) \quad (15)$$

où $m(n) = E\{y(n) \exp[-jn\omega_i]\} = m \exp[jn(\omega - \omega_i)]$ et $u(n)$ est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance $\sigma_u^2 = 1 - m^2$.

La densité de probabilité de la partie réelle de $u(n)$, pour $\omega = \omega_i$, se calcule à partir de l'expression (12) de $p(\varepsilon(n))$ et on a :

$$p(\operatorname{Re}[u]) = 2 \frac{p(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} \quad (16)$$

où $\operatorname{Re}[u] \in]-1; +1]$ et $\varepsilon \in]0; +\pi]$.

Les composantes $Y(\omega_i)$ de la transformée de Fourier des échantillons $y(n)$ peuvent s'écrire :

$$Y(\omega_i) = E[Y(\omega_i)] + \nu(\omega_i)$$

où $E[Y(\omega_i)] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N m(n)$; $\nu(\omega_i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(n)$ (17)

Et d'après le théorème de la limite centrale, on peut considérer $\nu(\omega_i)$ comme une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma_\nu^2 = \sigma_u^2/N$. Quant à l'expression de l'espérance de $Y(\omega_i)$, elle dépend de ω_i :

– si $\omega_i = \omega$, l'espérance des termes $y(n) \exp[-jn\omega_i]$ de la somme $Y(\omega_i)$ est réelle et égale à m . Elle se calcule à partir de l'expression (12) de $p(\varepsilon(n))$:

$$\begin{aligned} m &= E[e^{j\varepsilon}] = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\varepsilon} p(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= 2 \int_0^{+\pi} \frac{\sqrt{\gamma} \cos^2 \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\gamma \sin^2 \varepsilon}{2}} Q(-\sqrt{\gamma} \cos \varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

– si $\omega_i \neq \omega$, les termes $y(n) \exp[-jn\omega_i]$, d'espérance $m(n)$ complexe, décrivent des arcs de cercle répartis sur tout le cercle unité. La densité de probabilité des termes $y(n)$

$\exp[-jn\omega_d]$ est donc presque uniforme sur tout le cercle unité. L'espérance de $Y(\omega_d)$ dépend de la fréquence ω_d utilisée, elle suit en module m fois la fonction (4) et sa plus grande valeur pour un écart de fréquence significatif correspond à m fois la valeur (5).

De la même manière que dans la section précédente, on peut considérer qu'une erreur d'estimation se produit si, pour une valeur $\omega_d \neq \omega$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|Y(\omega_d)| > |Y(\omega)| \quad (19)$$

Soit :

$$0,2 m + \text{Re}[v(\omega_d)] > m + \text{Re}[v(\omega)] \quad (20)$$

La valeur du module m de l'espérance des échantillons $y(n)$ au seuil de décrochement de l'estimation de fréquence est notée m_d et elle est donnée par l'équation suivante :

$$m_d - 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1-m_d^2}}{\sqrt{N}} = 0,2 m_d + 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1-m_d^2}}{\sqrt{N}} \quad (21)$$

Soit :

$$m_d = \frac{1}{\sqrt{1+(1-0,2)^2 \frac{N}{2 \times 9}}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+\frac{N}{29}}} \quad (22)$$

Le facteur de crête 3 a été pris à la même probabilité d'erreur d'estimation ($1,35 \times 10^{-3}$) que dans la section précédente.

La valeur du module m , donné par l'expression (18), est tracée sur la figure 1 pour des rapports signal à bruit compris dans l'intervalle $[-12 ; +10]$ dB.

Le rapport signal à bruit au seuil de décrochement de l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde avec échantillons de module unité est donné par l'abscisse du point de la figure 1 d'ordonnée m_d .

En introduisant un facteur de correction α dans l'approximation du module m pour des rapports signal à bruit voisins de 0 dB, on obtient l'approximation suivante de m pour tous les rapports signal à bruit :

$$m \approx \frac{1}{\sqrt{1+\alpha\sigma_b^2}} \quad (23)$$

où $\alpha > 1$ pour $S/B < 0$ dB
 $\alpha \leq 1$ sinon.

Le rapport signal à bruit au seuil de décrochement est alors relié au nombre d'échantillons N disponibles par la relation suivante :

$$[S/B]_d = 1/\sigma_d^2 \approx \alpha \frac{29}{N} \quad (24)$$

Il est inversement proportionnel au nombre d'échantillons N . Pour des paquets de longueur $N > 29$ échantillons, le rapport signal à bruit au seuil de décrochement (9) de l'estimation de fréquence est strictement inférieur à 0 dB et on se situe dans le cas où le facteur de correction α est strictement supérieur à l'unité, le rapport signal à bruit au seuil de décrochement (24) est alors strictement supérieur à la valeur (9) trouvée dans la section précédente.

Le rapport signal à bruit énergétique au seuil de décrochement devient :

$$[E_b/N_0]_d = \frac{1}{2} [S/B]_d \approx \alpha \frac{14,5}{N} \quad (25)$$

Comme application, un paquet de $N = 144$ échantillons est considéré. En conservant le module du signal, la valeur du seuil de décrochement obtenue est égale à $E_b/N_0 = -10$ dB alors qu'en imposant le module unité, on obtient un seuil de $-9,2$ dB, pour une valeur de module $m_d = 0,4$. L'écart entre ces deux approches est donc de 0,8 dB, ce qui montre l'intérêt de conserver le module.

3. Algorithme des corrélations itérées

Cet algorithme est capable d'approcher de très près les performances théoriques sur l'ensemble du domaine des fréquences. Il procède par étape et consiste d'abord à calculer la fonction d'autocorrélation du signal, en utilisant la transformation de Fourier discrète (TFD).

L'ensemble $\{r_p\}$ des éléments la fonction d'autocorrélation du signal $x(n)$ (resp. $y(n)$) cherché est :

$$r_p = \frac{1}{N-p} \sum_{n=p+1}^N x(n)\bar{x}(n-p) ; 1 \leq p \leq N-1 \quad (26)$$

Il peut être obtenu à une constante près par l'opération suivante sur les N échantillons (1) (resp. (11)) :

$$\{r_p'\} = \text{TFD}_{2N}^{-1} \{|\text{TFD}_{2N}(x)|^2\} \quad (27)$$

où $\text{TFD}_{2N}(x)$ représente la transformée de Fourier discrète (de taille $2N$) sur les N échantillons du signal $x(n)$ complétés par N zéros.

Le résultat obtenu par l'opération (27) est en fait :

$$r_p' = \frac{1}{N} \sum_{n=p+1}^N x(n)\bar{x}(n-p) ; 1 \leq p \leq N-1 \quad (28)$$

Les valeurs $r(p)$ ainsi obtenues sont considérées comme un nouveau signal dont on montre qu'il est avantageux de ne conserver que les $N/2$ premières valeurs.

L'opération (27) est ensuite renouvelée, en ne conservant que la moitié des valeurs à chaque étape. La taille de la TFD directe et inverse est divisée par deux à chaque itération, jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur deux.

La procédure s'arrête lorsqu'il ne reste que deux valeurs, d'une part la puissance du signal et d'autre part un terme dont la phase représente l'estimation de la fréquence porteuse.

La complexité arithmétique de l'algorithme, en nombre de multiplications complexes, se calcule pour un nombre pair N d'échantillons du signal et s'exprime en fonction de N .

Sur le plan théorique, l'algorithme approche le maximum de vraisemblance par une série d'élévations au carré des modules des valeurs du spectre du signal, combinées à des opérations d'interpolation.

4. Résultats de simulation

L'approche théorique est testée sur un paquet de $N = 144$ échantillons et une fréquence normalisée de la porteuse égale à $f_d T = 0,1$. Les écart-types obtenus pour l'estimation de fréquence sont donnés à la figure 2, en prenant 1000 tirages pour les échantillons de bruit. La méthode des corrélations itérées (CI) est appliquée avec conservation du module et avec module unité. Les résultats sont comparés à ceux de l'algorithme de Mengali et Morelli (M&M) [3].

Il apparaît que l'algorithme CI présente, en seuil de décrochement, un avantage de 3 à 4 dB à cette fréquence. On vérifie que l'algorithme CI possède des performances indépendantes de la valeur de la fréquence à estimer, alors que l'algorithme M&M se dégrade quand cette valeur croît. Pour une fréquence porteuse nulle, les deux algorithmes donnent des résultats comparables.

5. Application

Dans un récepteur numérique pour transmissions satellites en mode paquet, la première fonction à réaliser peut être l'estimation de la fréquence porteuse, suivie de sa compensation.

Une limite inférieure du fonctionnement du système est donc fixée par le rapport signal à bruit au seuil de décrochement de l'estimation de fréquence et dépend de la taille N des paquets de données utilisée.

La fonction suivante à réaliser par le récepteur est l'estimation de la phase de l'axe de référence à l'émission à chaque instant d'échantillonnage [4], [5] et ensuite effectuer un décodage optimal des données. L'ambiguïté de phase modulo $\pi/2$ sur l'estimation de l'axe de référence est éliminée à l'aide d'une séquence d'apprentissage préalablement insérée dans chaque paquet.

6. Conclusion

Le seuil de décrochement de l'estimation de fréquence d'une sinusoïde additionnée d'un bruit blanc gaussien a été calculé dans les cas où on conserve l'amplitude du signal et lorsqu'on le ramène à l'unité. Pour des paquets d'échantillons $N > 29$, les résultats théoriques montrent un léger avantage pour le premier cas et justifient son utilisation dans les récepteurs numériques.

L'algorithme des corrélations itérées pour l'estimation de la fréquence d'une sinusoïde a également été présenté. Les résultats expérimentaux sont proches des valeurs théoriques calculées. Les performances de cet algorithme sont indépendantes de la fréquence de la sinusoïde.

Références

- [1] H. Meyr, M. Moeneclay et S. A. Fechtel. *Digital Communication Receivers: Synchronization, Channel Estimation, and Signal Processing*. Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing, 1998.
- [2] D. C. Rife et R. R. Boorstyn. *Single-tone parameter estimation from discrete-time observations*. IEEE

Transactions on Information Theory, Vol. IT-9, No. 5, septembre 1974, p. 591-598.

- [3] M. Morelli et U. Mengali. *Feedforward frequency estimation for PSK: a tutorial review*. European Transactions on Telecommunications, ETT Vol. 9, No. 2, mars-avril 1998, p. 103-116.
- [4] A. J. Viterbi et A. M. Viterbi. *Nonlinear Estimation of PSK-Modulated Carrier Phase with Application to Burst Digital Transmission*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-29, No. 4, juillet 1983, pp. 543-551.
- [5] G. De Jonghe et M. Moeneclay. *Optimal Averaging Filter Length of the Viterbi & Viterbi Carrier Synchronizer for a Given Frequency Offset*. Globecom '94, pp. 1363-1368.

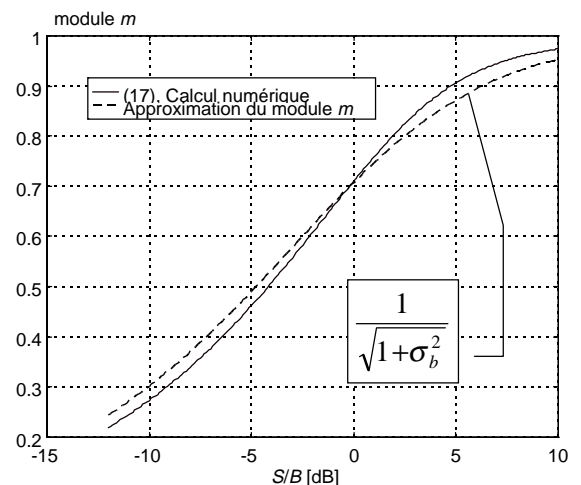


FIG. 1 : — Valeur théorique (18) du module m ,
- - Approximation du module m pour des rapports signal à bruit voisins de 0 dB.

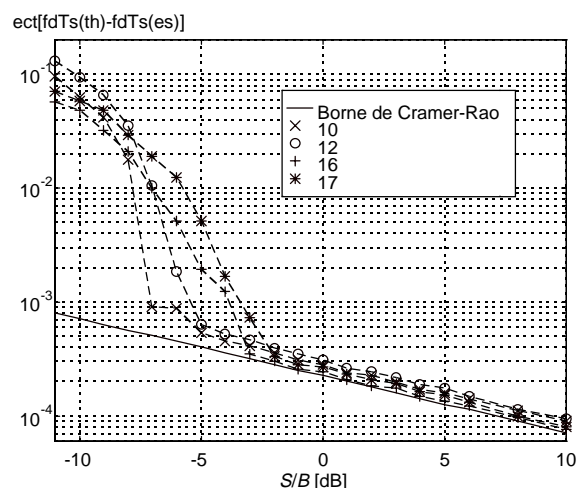


FIG. 2 : Écart-type de l'estimation d'une fréquence par la méthode CI, module conservé, courbe 10 ; module unité, courbe 12, et M&M, module conservé, courbe 16 ; module unité, courbe 17. $N = 144$ échantillons, $f_d T = 0,1$.