

# Estimation Paramétrique des Performances de Détection Radar en Environnement Inconnu

Emmanuelle JAY<sup>1,2</sup>, Jean-Philippe OVARLEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ENSEA/UCP-ETIS

6, avenue du Ponceau, BP 44, 95014 Cergy-Pontoise, France

<sup>2</sup>ONERA DEMR/TSI

BP 72, 92322 Châtillon Cedex, France

`jay@onera.fr`, `ovarlez@onera.fr`

**Résumé** – Dans le cadre de la détection d’une cible évoluant à site bas ou d’une cible éclairée par un radar à haute résolution distance, la nature impulsionnelle du bruit environnant écarte l’hypothèse gaussienne généralement retenue pour la modélisation de la statistique de ce fouillis. Nous proposons, dans ce papier, une modélisation par approximants de Padé de la fonction génératrice de moments de l’enveloppe du bruit additif, et, éventuellement des lois de fluctuations de la cible. Cette méthode permet l’évaluation des performances de détection d’un radar sans connaissance *a priori* sur la nature statistique du bruit environnant.

**Abstract** – The spiky nature of the clutter encountered in surface-sited radar for the detection of target illuminated at low grazing angles or in high resolution radar tends to have a statistic which strongly differs from the gaussian assumption. The parametric modelisation of the moment generating function of the noise envelope by Padé approximation proposed here leads to a powerful estimation of its probability density function and allows to evaluate the radar detection performances of target embedded in any noise without knowledge *a priori* of the closed form of its statistic. It allows in the same way to take into account any possible fluctuation of the target.

## 1 Description du problème

Des mesures de fouillis de sol issues d’expérimentation de l’ONERA ainsi que d’organismes extérieurs tel le MIT [1] ont montré le net écart entre la réalité et les modèles statistiques classiquement utilisés dès lors que la cible évolue à site très bas (incidence inférieure à quelques degrés) ou que le pouvoir de résolution distance du radar augmente (baisse du nombre de réflecteurs élémentaires du fouillis de sol). Dans ces situations, la statistique globale du fouillis peut ne plus s’apparenter à une loi gaussienne (le théorème central limite ne s’applique plus) mais à des lois possédant un nombre de degrés de liberté plus élevé (ex: loi de Weibull ou K-distribution).

L’utilisation de la méthode des approximants de Padé appliquée à l’estimation de la densité de probabilité (DP) de l’enveloppe du bruit permet de ne plus se donner de modèle *a priori* sur sa statistique. En effet, basées sur une estimation de la fonction génératrice de moments (FGM), les expressions des DP associées sont entièrement déterminées par deux jeux de coefficients complexes de petite taille, obtenus directement à partir des données via la connaissance ou l’estimation de leurs moments d’ordre supérieur. Ces expressions se présentent sous la forme d’une somme d’exponentielles décroissantes, et leur utilisation quant à l’évaluation des performances de détection (expressions de la probabilité de détection  $P_d$ ; calcul du seuil de détection  $\theta$  à probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  constante) simplifie considérablement les calculs à la fois pour les expressions

littérales et pour leur mise en œuvre.

Après avoir testé son efficacité sur signaux synthétiques, nous avons appliqué la méthode sur des relevés de fouillis de forêt (avec une cible virtuelle d’enveloppe constante) afin de comparer les résultats obtenus à ceux d’une hypothèse gaussienne généralement retenue pour ce type d’analyse.

## 2 Théorie générale de la détection

La théorie de la détection suivant le critère de NEYMAN-PEARSON fixe la probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  et maximise la probabilité de détection  $P_d$ . Le schéma de détection classiquement rencontré en radar est le suivant:

$$\begin{aligned} \text{Hypothèse } H_0 : x(t) &= n(t) + c(t) \\ \text{Hypothèse } H_1 : x(t) &= s(t) + n(t) + c(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Si on note par  $p_{H_0}(r)$  la densité de probabilité de l’enveloppe du signal  $x(t)$  complexe sous l’hypothèse  $H_0$  (bruit thermique gaussien et fouillis :  $|n(t) + c(t)|$ ), pour une probabilité de fausse alarme  $P_{fa}$  fixée, le seuil de détection  $\theta$  est donné par la résolution de l’équation :

$$P_{fa} = \int_{\theta}^{+\infty} p_{H_0}(r) dr, \quad (2)$$

tandis que, en notant  $p_{H_1}(r)$  la densité de probabilité de l’enveloppe du signal noyé dans le bruit  $|s(t) + n(t) + c(t)|$ , la probabilité de détection  $P_d$  est donnée par le calcul de :

$$P_d = \int_{\theta}^{+\infty} p_{H_1}(r) dr. \quad (3)$$

Sous l'hypothèse d'une densité de phase uniforme entre les voies I et Q en quadrature du signal  $x(t)$  reçu, il est possible de lier la densité de probabilité de l'enveloppe bruit + cible avec celle de l'enveloppe du bruit seul, en passant par les fonctions caractéristiques cohérentes radiales des différents processus.

Après quelques calculs élémentaires [2] la fonction caractéristique cohérente radiale d'un processus de densité d'enveloppe  $p(r)$  s'écrit :

$$C(\rho) = \int_0^{+\infty} p_r(r) J_0(\rho r) dr, \quad (4)$$

avec  $J_0(x)$  fonction de Bessel d'ordre 0. En inversant la formule (4), on peut exprimer  $p_r(r)$  à partir de  $C(\rho)$  :

$$p_r(r) = \int_0^{+\infty} r \rho C(\rho) J_0(\rho r) d\rho \quad (5)$$

Dans notre cas, où  $x(t) = s(t) + n(t) + c(t)$ , on obtient grâce à la formule précédente :

$$p_{H_1}(r) = \int_0^{+\infty} r \rho C_{s+n+c}(\rho) J_0(\rho r) d\rho$$

Le signal  $s(t)$  étant indépendant du bruit  $n(t) + c(t)$ , on a  $C_{s+n+c}(\rho) = C_s(\rho) C_{n+c}(\rho)$ .

Dans le cas où  $A$  est déterministe,  $p_r(r) = \delta(r - A)$  ( $\delta(\cdot)$  étant la distribution de Dirac) et, d'après (4),  $C_s(\rho) = J_0(\rho A)$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{H_1}(r/A) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} r \rho J_0(\rho r) J_0(\rho y) \mathbf{p}_{H_0}(y) \\ &\times J_0(\rho A) dy d\rho, \end{aligned} \quad (6)$$

Dans le cas d'une cible de loi de fluctuations  $p(A, A_0)$  (où  $A_0^2$  est la puissance moyenne des fluctuations), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{H_1}(r) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} r \rho J_0(\rho r) J_0(\rho y) \mathbf{p}_{H_0}(y) \\ &\times \left[ \int_0^{+\infty} J_0(\rho A) p(A, A_0) dA \right] dy d\rho \end{aligned} \quad (7)$$

Cette relation est très importante, car la seule détermination de la densité de probabilité de l'enveloppe du bruit seul permet d'obtenir toutes les autres expressions d'intérêt. La méthode décrite ci-dessous va nous permettre de simplifier cette DP (dès lors que  $p_{H_0}$  est approximée par une somme d'exponentielles décroissantes), et de calculer  $P_d$ .

### 3 Les approximants de Padé

Pour une variable aléatoire  $R$  de densité d'enveloppe  $p(r)$ , de fonction génératrice de moments  $\Phi(u) = E(e^{-uR})$ , on a  $\Phi(u) = \sum_{n \geq 0} \mu_n \frac{(-u)^n}{n!}$ , où  $\mu_n$  désignent les moments d'ordre  $n$  de  $R$ . La théorie des approximants de Padé

[3, 4] consiste à construire une approximation de  $\Phi(u)$  sous forme de fraction rationnelle dont le dénominateur et le numérateur sont respectivement de degré  $M$  et  $L$ , de telle sorte à ce que son développement en puissance croissante coïncide à l'ordre  $n$  avec celui de  $\Phi(u)$  jusqu'à l'ordre  $L + M$ . En notant par  $P^{[L/M]}(u)$  cette approximation, on a, par définition :

$$P^{[L/M]}(u) = \frac{\sum_{n=0}^L a_n u^n}{\sum_{n=0}^M b_n u^n} = \sum_{n=0}^{L+M} c_n u^n + \mathcal{O}(u^{L+M+1}) \quad (8)$$

où les coefficients  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$  sont définis pour avoir cette égalité.

La notation  $\mathcal{O}(u^{L+M+1})$  signifie que l'on néglige les termes de puissance strictement supérieure à  $L + M$ . La détermination des coefficients  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$ , qui constitue l'approximation de Padé à 1 point ( $u \rightarrow 0$ ) de la FGM, est décrite dans [2].

Il est désormais possible de calculer très simplement la densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable  $R$  par transformée de Laplace inverse, dès lors que la fonction génératrice de moments peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle du type (8), décomposée en éléments simples :

$$P^{[L/M]}(u) = \sum_{k=1}^M \frac{\lambda_k}{u - \alpha_k} \quad \mathcal{R}e(\alpha_k < 0) \quad (9)$$

En supposant que  $P^{[L/M]}(u)$  n'ait que  $M$  pôles simples  $\{\alpha_k\}$  distincts et à partie réelle négative, les expressions de la densité de probabilité et de la fonction de répartition s'écrivent :

$$p(r) = \sum_{k=1}^M \lambda_k e^{\alpha_k r} \quad ; \quad F(r) = 1 + \sum_{k=1}^M \frac{\lambda_k}{\alpha_k} e^{\alpha_k r} \quad (10)$$

Le réglage des paramètres  $L$  et  $M$  nécessaires à la détermination des coefficients  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$  se fait selon le signe de la partie réelle des pôles  $\alpha_k$  (changement de valeurs si elle n'est pas négative). Dans la suite, nous considérons le cas des approximations *subdiagonales* (cas où  $L = M - 1$ ) pour lesquelles la convergence et l'unicité ont été établies [5] ainsi que la convergence vers 0 de la FGM en  $l \rightarrow \infty$ .

## 4 Application à la détection

### 4.1 Cible non fluctuante

Dans le cas d'une cible d'enveloppe constante  $|s(t)| = A$  noyée dans un bruit supposé inconnu, mais dont la statistique de test  $p_{H_0}(r)$  est entièrement déterminée par les deux jeux de  $M$  coefficients  $\{\lambda_k\}$  et  $\{\alpha_k\}$ , le calcul du seuil de détection  $\theta$  à  $P_{fa}$  fixée est donné par la résolution de l'équation suivante (recherche de zéros par la méthode de Newton) :

$$P_{fa} = - \sum_{k=1}^M \frac{\lambda_k}{\alpha_k} e^{\alpha_k \theta}, \quad (11)$$

et la probabilité  $P_d$  de détecter la cible devient

$$P_d = 1 - \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^M \lambda_k \theta \frac{J_0(\rho A) J_1(\rho \theta)}{\sqrt{\rho^2 + \alpha_k^2}} d\rho, \quad (12)$$

où  $J_n(x)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$ , et d'après les tables [6].

## 4.2 Cible fluctuante

Il est également possible de prendre en compte les fluctuations de la cible, en modélisant la loi  $p(A, A_0)$  (où  $A_0^2$  est la puissance moyenne des fluctuations) comme (10), grâce à deux autres jeux de  $N$  coefficients  $\{\gamma_i\}$  et  $\{\delta_i\}$ , calculés pour  $A_0^2 = 1$  :

$$p(A, A_0) = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{A_0} e^{\frac{\delta_i}{A_0} A} \quad (13)$$

On obtient alors, après intégration de (12) sur  $A$  selon (13), et avec le même seuil  $\theta$  calculé avec (11) :

$$P_d = 1 - \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N \lambda_k \frac{\gamma_i}{A_0} \frac{\theta J_1(\rho \theta)}{\sqrt{\rho^2 + \alpha_k^2} \sqrt{\rho^2 + \frac{\delta_i^2}{A_0^2}}} d\rho, \quad (14)$$

Cette expression est un résultat important car elle permet de calculer toute performance de détection radar (d'enveloppe), pour une cible de comportement quelconque noyée dans un bruit totalement inconnu. La méthode par modélisation paramétrique réduit les temps de calculs nécessaires à l'évaluation de  $P_d$ , des sommes discrètes intervenant désormais à la place d'intégrales généralisées.

## 4.3 Schéma générique d'application

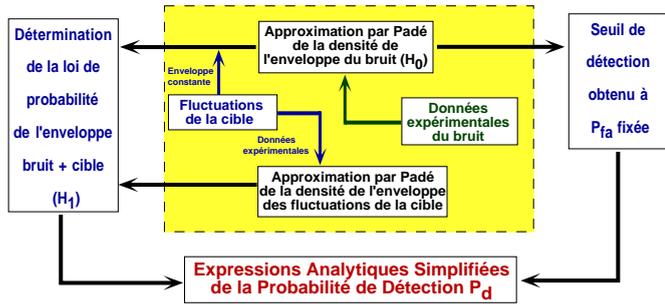


FIG. 1: Schéma générique d'application de la méthode des approximations de Padé

## 5 Exemples de résultats

### 5.1 Signaux synthétiques

La méthode a été testée sur un bruit de nature très éloignée d'un bruit gaussien, de densité d'enveloppe K-

distribuée de puissance  $\sigma^2 = 1$ , de paramètre de forme  $\nu = 0.1$ , et de paramètre  $b = 2\sqrt{\frac{\nu}{\sigma^2}} = 2\sqrt{0.1}$ , de densité de probabilité :

$$p_b(r) = \frac{2b}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{br}{2}\right)^\nu K_{\nu-1}(br),$$

de fonction de répartition

$$F(r) = 1 - \frac{(br)^\nu}{\Gamma(\nu) 2^{\nu-1}} K_\nu(br),$$

et de fonction caractéristique cohérente radiale

$$C(\rho) = \left(1 + \frac{\rho^2}{b^2}\right)^{-\nu}$$

où  $K_\nu(x)$  est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce.

Le seuil théorique  $\theta$  de détection dans un tel bruit est donné par la résolution de :  $P_{fa} = 1 - F(\theta)$ , et l'expression de  $P_d$  pour une cible d'enveloppe constante s'écrit :

$$P_d = 1 - \int_0^{+\infty} \theta \frac{J_0(\rho A) J_1(\rho \theta)}{\left(1 + \frac{\rho^2}{b^2}\right)^\nu} d\rho. \quad (15)$$

Nous allons considérer comme fluctuations de la cible  $A$ , une loi de Swerling I, qui a pour densité  $p(A, A_0)$  (de puissance  $A_0^2$ ) :

$$p(A, A_0) = \frac{2A}{A_0^2} e^{-A^2/A_0^2}.$$

En intégrant alors l'expression (15) sur  $A$  selon  $p(A, A_0)$ , l'expression théorique de la probabilité de détection d'une cible fluctuant selon une loi de Swerling I noyée dans un bruit K-distribué de paramètre  $\nu = 0.1$  et de puissance unité s'écrit :

$$P_d = 1 - \int_0^{+\infty} \theta \frac{J_1(\rho \theta) e^{-\rho^2 A_0^2/4}}{(1 + \rho^2/b^2)^\nu} d\rho. \quad (16)$$

La figure 2 (gauche) illustre des tracés théoriques de courbes  $P_d/P_{fa}$  pour un rapport Signal à Bruit variant de 10 à 50 dB, alors que la figure de droite expose des tracés similaires, obtenus par simulation puis estimation par approximations de Padé. Un seul calcul des coefficients de Padé est nécessaire pour les fluctuations de la cible (pour  $A_0^2 = 1$ ) ; la loi en est déduite pour chaque valeur du  $RSB$ .

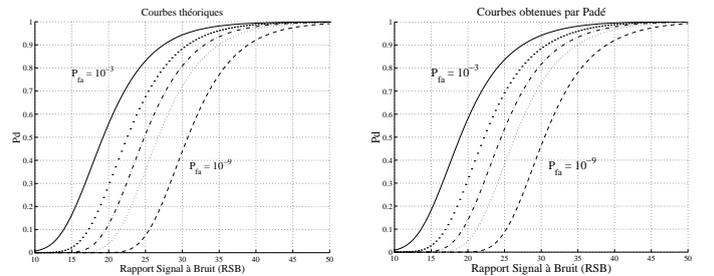


FIG. 2: Courbes théoriques (gauche) et approximations (droite) de détection pour  $P_{fa} = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-9}$  : cible (Swerling I) dans du bruit K-distribué ( $\nu = 0.1, \sigma^2 = 1$ ).

## 5.2 Signaux réels

Le signal réel analysé ici correspond à du fouillis de forêt enregistré spatialement dans 246 cases distance de 0.5 m (cf figure 3). Par commodité, la puissance du bruit a été normalisée à un. Les différents moments des données  $x_i$

ont été estimés classiquement ( $\hat{\mu}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^n$ ) jusqu'à l'ordre 11.

La figure 3 montre la densité de probabilité obtenue grâce aux approximations de Padé à l'ordre [5/6]. Sur la première courbe, l'enveloppe du bruit a été tracée et on peut se rendre compte des différences notables entre les deux seuils de détection calculés pour une même probabilité de fausse alarme de  $P_{fa} = 10^{-6}$  : le premier,  $\theta_1 = 6.47$  calculé par résolution de l'équation (11) correspond au véritable seuil de détection de ce bruit et l'autre,  $\theta_2 = 3.71$ , au seuil classique obtenu dans le cas de l'hypothèse gaussienne.

Pour calculer les performances théoriques de détection d'enveloppe d'une éventuelle cible d'enveloppe constante et non fluctuante noyée en amplitude et phase dans ce bruit complexe (normalisé ici à la puissance unité  $\sigma^2 = 1$ ), la probabilité de détection de l'expression (12) a été calculée numériquement pour différents rapports signal à bruit  $A^2/\sigma^2$ . La figure 4 montre ainsi les performances obtenues par rapport à l'hypothèse gaussienne. On peut voir d'après cette figure que le taux de fausses alarmes augmente considérablement dans le cas d'une hypothèse gaussienne (le tracé correspond, pour la réalité du fouillis, à  $P_{fa} = 1.34 \cdot 10^{-4}$ ).

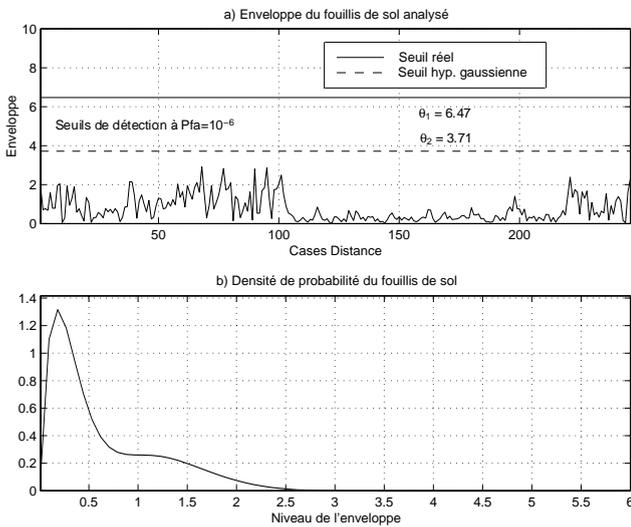


FIG. 3: Résultat d'approximation obtenu sur bruit réel de fouillis de forêt.

## 6 Conclusion

Ce papier propose une méthode de modélisation par un petit nombre de paramètres de la vraie densité de probabilité d'un processus complexe à partir de sa fonction génératrice de moments, mise sous forme d'une fraction ration-

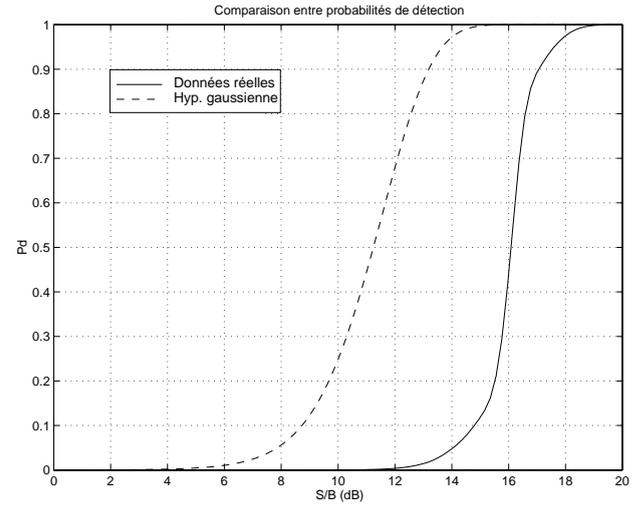


FIG. 4: Comparaison entre les performances de détection dans un bruit réel (fouillis de forêt) et un bruit complexe gaussien de même puissance pour une  $P_{fa} = 10^{-6}$ .

nelle. Elle rappelle les méthodes de modélisation de densité spectrale AR, ARMA, et permet de simplifier considérablement les calculs pour l'analyse des performances de détection d'un radar. Elle nécessite (entre autres) l'estimation des moments d'ordre supérieur des données, et à cet effet, plus on dispose de données, meilleure sera cette estimation. Ce problème n'a pas été abordé ici, puisque soit un nombre suffisant de variables a été simulé pour prétendre à des estimations de bonne qualité, soit les expressions analytiques des moments ont été utilisées.

## Références

- [1] J.B. BILLINGSLEY, "Ground Clutter Measurements for Surface-Sited Radar", Technical Report 780, MIT, February 1993
- [2] J.P. OVARLEZ, E. JAY, *New Methods of Radar Detection Performances Analysis*, Proc.IEEE-ICASSP99, Phoenix USA, March 1999
- [3] H. AMINDAVAR, J. A. RITCEY, "Padé Approximations for Detectability in K-Clutter and Noise, IEEE Trans.-AES, Vol.30, No.2, April 1994
- [4] H. AMINDAVAR, J. A. RITCEY, "Padé Approximations of Probability Density Functions, IEEE Trans.-AES, Vol.30, No.2, April 1994
- [5] H. AMINDAVAR, "Applications of Padé Approximations in Signal Analysis", UMI Dissertations Services, Ph.D., University of Washington, 1991
- [6] M. ABRAMOWITZ AND I.A. STEGUN, "Handbook of Mathematical Functions", National Bureau of Standard, AMS 55, June 1964
- [7] M. RANGASWAMY, D. WEINER, A. ÖZTÜRK, "Computer Generation of Correlated Non-Gaussian Radar Clutter", IEEE Trans.-AES, Vol.31, No.1, January 1995