

# Dynamique (max, +) pour la génération en ligne de bruit en $1/f^\alpha$

François CHAPEAU-BLONDEAU, Emmanuel GAZENGEL

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), Université d'Angers,  
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, FRANCE.  
chapeau@univ-angers.fr, gazengel@istia.univ-angers.fr

**Résumé** – Nous proposons un système dynamique exprimé au moyen des opérations max et + comme une récurrence d'ordre un excitée par un bruit blanc. Les statistiques des 1er et 2ème ordres du signal aléatoire produit par ce système sont calculées théoriquement et testées numériquement. Elles établissent que ce système peut être utilisé pour une génération en ligne très aisée de bruits en  $1/f^\alpha$ .

**Abstract** – We propose a dynamic system expressed by means of the max and + operations as a recurrence of order one excited by a white noise. The first- and second-order statistics of the random signal produced by this system are theoretically computed and numerically tested. They establish that this system can be used for very easy on-line generation of  $1/f^\alpha$  noises.

## 1 Introduction

Les bruits caractérisés par un spectre en  $1/f^\alpha$ , avec  $0 \leq \alpha \leq 2$ , sont des signaux aléatoires fréquemment observés expérimentalement, mais difficiles à modéliser théoriquement, hormis les cas simples  $\alpha = 0$  (bruit blanc) et  $\alpha = 2$  (mouvement brownien) [1]. Ces bruits, généralement, possèdent des corrélations décroissant en loi de puissance aux temps longs, qui leur confèrent des propriétés de self-similarité statistique ou encore un caractère fractal [2]. Parmi les modèles proposés pour la synthèse de bruits en  $1/f^\alpha$  figurent les mouvements browniens fractionnaires [3, 4], ou les systèmes incorporant des opérateurs de dérivation fractionnaire [5, 6], ou la convolution par des noyaux en loi de puissance [7], ou encore la synthèse multiéchelle par ondelettes [8]. La mise en œuvre de ces modèles est en général assez élaborée, et ne prend pas la forme d'un algorithme récursif d'ordre faible qui autorise une implémentation numérique directe et une génération en ligne du bruit en  $1/f^\alpha$ .

Ici nous proposons et analysons un modèle pour la génération de certains bruits en  $1/f^\alpha$ , qui présente les deux propriétés intéressantes suivantes : (i) le modèle prend la forme d'une simple récurrence d'ordre un autorisant une génération en ligne aisée; (ii) ses statistiques du 1er et 2ème ordres peuvent être calculées explicitement de façon théorique.

## 2 Le modèle et son analyse théorique

Nous considérons le système dynamique décrit par la récurrence d'ordre un :

$$X(k) = X(k-1) + x(k), \quad (1)$$

$$Y(k) = \max[Y(k-1), X(k)], \quad (2)$$

$$y(k) = Y(k) - Y(k-1), \quad (3)$$

pour  $k > 0$  entier, avec la condition initiale  $X(0) = Y(0) = 0$ . Pour tout  $k > 0$ , les quantités  $x(k)$  formant la séquence d'entrée sont des variables aléatoires centrées indépendantes et identiquement distribuées.

Le système des Éqs. (1)–(3) peut être classé dans la catégorie des systèmes dynamiques (max, +) [9]. Aussi, le signal aléatoire  $y(k)$  peut être vu comme la succession des incréments du maximum courant d'une marche aléatoire d'incrément  $x(k)$ . Le système possède une propriété de renouvellement : À chaque instant  $k$  où  $y(k) > 0$ , on a aussi  $Y(k) = X(k)$  d'après l'Éq. (2), et donc pour l'évolution ultérieure de l'incrément  $y$ , tout se passe comme si à un tel instant  $k$  le système était remis à sa condition initiale  $Y = X = 0$ .

Dans la suite de cette section nous considérons le cas d'une entrée discrète  $x(k) = \pm 1$  équiprobablement. Dans ce cas, les incréments  $y(k)$  de l'Éq. (3) se réduisent à 0 ou 1.

On s'intéresse à calculer la fonction d'autocorrélation  $R(k, \ell) = E[y(k)y(k+\ell)]$  pour tout  $k > 0$  et  $\ell \geq 0$ . On a donc

$$\begin{aligned} R(k, \ell) &= 1 \times 1 \times \Pr\{y(k) = 1; y(k+\ell) = 1\} \\ &= \Pr\{y(k+\ell) = 1 \mid y(k) = 1\} \Pr\{y(k) = 1\}. \end{aligned} \quad (4)$$

À cause de la propriété de renouvellement du système, on a  $\Pr\{y(k+\ell) = 1 \mid y(k) = 1\} = U(\ell)$ , une fonction qui ne dépend que de l'écart  $\ell$ , et qui vérifie en particulier  $U(0) = 1$ , et  $U(k) = \Pr\{y(k) = 1\} = E[y(k)] = E[y^2(k)]$  pour tout  $k > 0$ . On obtient donc  $R(k, \ell) = U(k)U(\ell)$ .

La fonction  $U(\ell)$  peut s'exprimer, en fonction des propriétés de la marche aléatoire  $X(k)$  d'incrément  $x(k) = \pm 1$ , comme

$$U(\ell) = \sum_{n=1}^{\ell} u(n, \ell) \quad (6)$$

pour  $\ell \geq 1$ , où  $u(n, \ell)$  est la probabilité de premier passage en  $X = n$  au pas  $\ell$  de la marche aléatoire partie de  $X = 0$

au pas 0. Ceci est dû au fait que  $y(k) = 1$  équivaut, d'après l'Éq. (2), à un premier passage de la marche  $X$  au pas  $k$ .

D'après [10] (p. 89 Éq. (7.5)), on a  $u(n, \ell) = 0$  pour  $n$  et  $\ell$  de parité opposée, et pour  $n$  et  $\ell$  de même parité

$$u(n, \ell) = \frac{2^{-\ell}}{\ell} n \operatorname{bino}[\ell, (\ell + n)/2], \quad (7)$$

où  $\operatorname{bino}(\cdot, \cdot)$  représente les standard coefficients du binôme de Newton.

La somme de l'Éq. (6) peut s'évaluer explicitement, et au moyen de la formule de Stirling du factoriel, son comportement asymptotique<sup>1</sup> pour  $\ell \gg 1$  peut s'exprimer comme

$$U(\ell) = a\ell^{-1/2}, \quad \ell \text{ grand}, \quad (8)$$

avec la constante  $a = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0.40$ . On a donc pour le signal aléatoire  $y(k)$ , l'espérance

$$\mathbb{E}[y(k)] = ak^{-1/2}, \quad k \text{ grand}, \quad (9)$$

et la fonction d'autocorrélation

$$R(k, \ell) = \mathbb{E}[y(k)y(k + \ell)] = a^2(k\ell)^{-1/2}, \quad k, \ell \text{ grands}, \quad (10)$$

ce qui établit  $y(k)$  comme un signal aléatoire non stationnaire asymptotiquement self-similaire (au moins au sens large) ou fractal [2].

On peut définir une fonction d'autocorrélation moyenne empirique comme

$$\bar{R}_{\text{emp}}(\ell) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k + \ell). \quad (11)$$

En vertu de l'Éq. (10), on a l'espérance

$$\mathbb{E}[\bar{R}_{\text{emp}}(\ell)] = \frac{2a^2}{\sqrt{N}} \ell^{-1/2}, \quad N, \ell \text{ grands}, \quad (12)$$

qui présente donc un comportement asymptotique en  $\ell^{-\beta}$  aux longs retards  $\ell$ , avec  $\beta = 1/2$ . À ceci on peut associer, par transformée de Fourier, un spectre moyen empirique [2]

$$S(f) \sim \frac{1}{f^{1/2}}, \quad f \text{ petit}, \quad (13)$$

qui présente donc un comportement asymptotique en  $1/f^\alpha$  aux basses fréquences, avec  $\alpha = 1 - \beta = 1/2$ . Ces évolutions en lois de puissance établissent  $y(k)$  comme un signal aléatoire à mémoire longue ou comme un bruit en  $1/f^\alpha$ .

### 3 Simulation numérique

Les propriétés établies théoriquement pour le signal aléatoire  $y(k)$ , peuvent aussi être testées expérimentalement, puisque ce signal peut très aisément être simulé numériquement au moyen des Éqs. (1)–(3) qui le définissent. Ainsi, la Fig. 1 montre une réalisation du signal  $y(k)$  représentée

<sup>1</sup>Notons que le régime asymptotique est approché rapidement, car dès  $\ell = 5$  l'erreur relative tombe sous 5% pour l'Éq. (8) par rapport à la valeur exacte résultant des Éqs. (6)–(7).

sur des intervalles de longueur croissante pour illustrer la self-similarité. La Fig. 2 représente une réalisation de la fonction d'autocorrélation moyenne empirique  $\bar{R}_{\text{emp}}(\ell)$  avec  $N = 10^7$  qui montre bien une évolution en loi de puissance d'exposant  $\beta = 0.5$ . La transformée de Fourier de cette réalisation donne l'estimation du spectre moyen empirique de la Fig. 3 qui montre une variation en  $1/f^{0.5}$ .

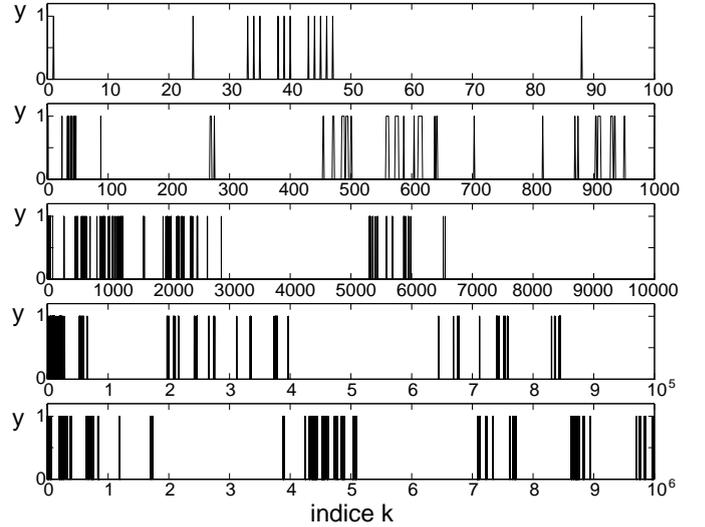


FIG. 1 – Une réalisation du signal  $y(k)$  des Éqs. (1)–(3) quand  $x(k) = \pm 1$ , représentée sur des intervalles de longueur croissante montrant la self-similarité.

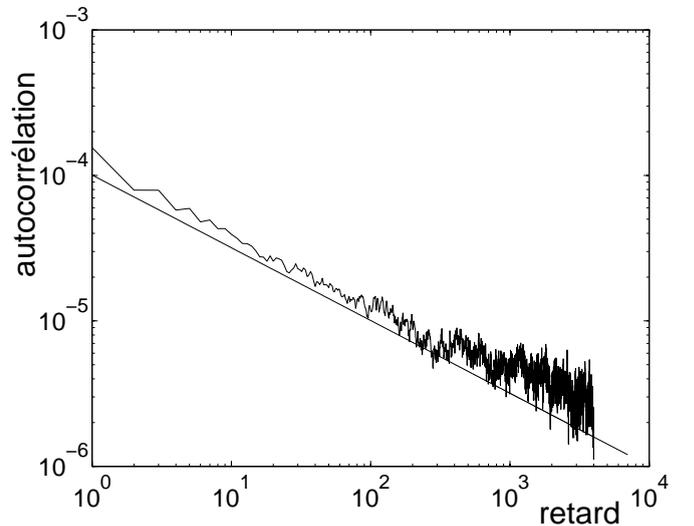


FIG. 2 – Une réalisation de la fonction d'autocorrélation moyenne empirique de l'Éq. (11) quand  $x(k) = \pm 1$ , superposée à son espérance de l'Éq. (12) (ligne droite).

Le signal  $y(k)$  conserve ses propriétés de corrélation en loi de puissance d'exposant  $\beta = 0.5$  lorsque la séquence d'entrée  $x(k)$  dans l'Éq. (1) est distribuée différemment [11]. Pour illustration, la Fig. 4 montre les cas d'une distribution gaussienne, uniforme, et exponentielle bilatérale.

Comme on le voit sur la Fig. 1, le système des Éqs. (1)–(3) produit un signal  $y(k)$  formé de bouffées où  $y > 0$

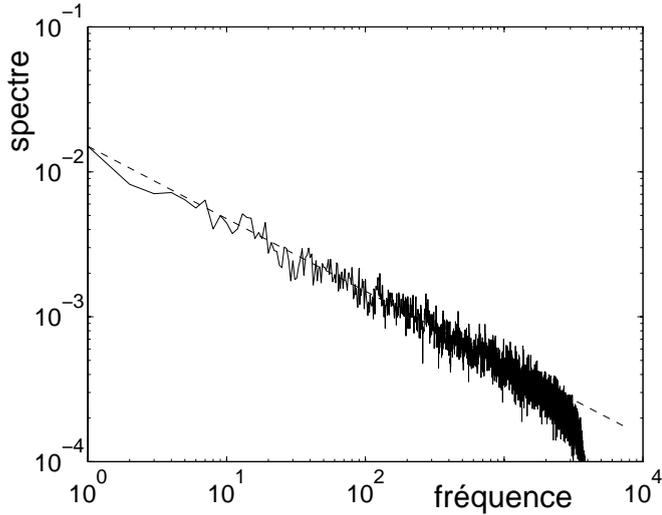


FIG. 3 – Spectre moyen empirique résultant de la transformation de Fourier de l'autocorrélation de la Fig. 2, superposé à la droite de pente  $-1/2$  (tirets) conformément à l'Éq. (13).

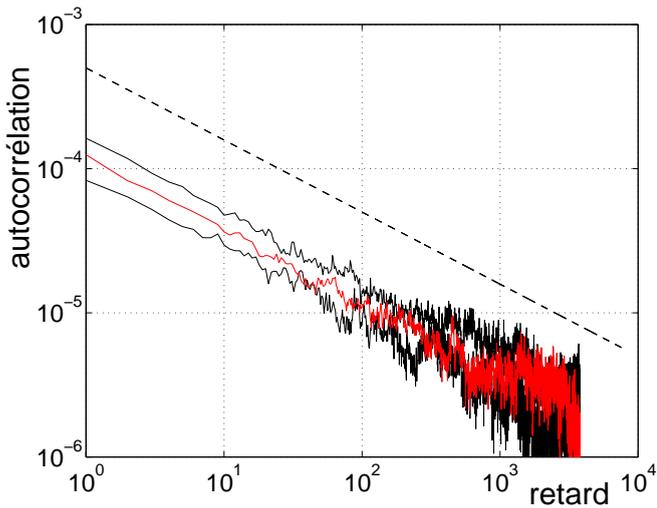


FIG. 4 – Trois réalisations de la fonction d'autocorrélation moyenne empirique de l'Éq. (11) pour une séquence d'entrée  $x(k)$  d'écart-type unité et de distribution gaussienne (haut), uniforme (milieu), exponentielle bilatérale (bas). La droite en tirets est de pente  $-1/2$ .

séparées d'intervalles où  $y = 0$ . Il est possible d'introduire, de diverses façons, plus de variabilité dans le signal généré tout en conservant les propriétés de longue dépendance. Par exemple, on peut superposer différentes traces générées par des répliques indépendantes du système (1)–(3) excitées par des entrées  $x_i(k)$  de distribution quelconque. Pour le signal  $s(k) = y_1(k) - y_2(k)$ , où les deux  $y_i(k)$  sont générés par deux répliques indépendantes des Éqs. (1)–(3) excitées par deux entrées  $x_i(k)$  gaussiennes centrées d'écart-type unité, une réalisation est représentée sur la Fig. 5, avec une estimation du spectre moyen empirique sur la Fig. 7 qui identifie un bruit en  $1/f^{0.5}$ .

Un autre exemple utilise un signal  $y(k)$  des Éqs. (1)–

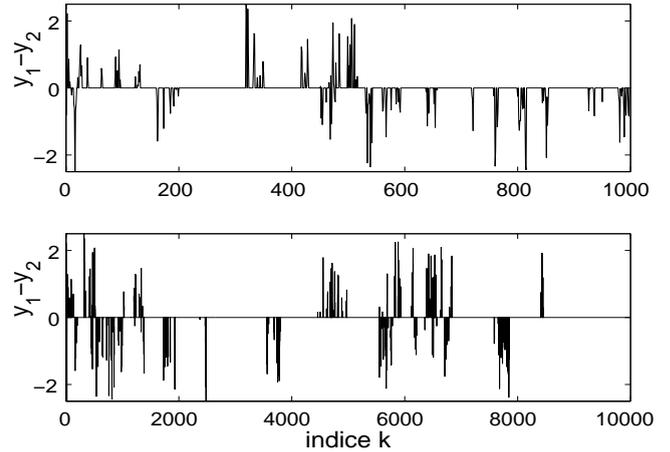


FIG. 5 – Une réalisation du signal  $s(k) = y_1(k) - y_2(k)$  (voir texte). Au vu du spectre moyen empirique de la Fig. 7,  $s(k)$  constitue un bruit en  $1/f^{0.5}$ .

(3) pour déclencher un processus on-off  $z(k)$  à deux états  $z(k) = \pm 1$ , où à chaque pas  $k$  le signal  $z(k)$  change d'état si et seulement si  $y(k) > 0$ , comme illustré sur la Fig. 6, ce qui constitue un bruit en  $1/f^{1.5}$  au vu du spectre moyen empirique de la Fig. 7.

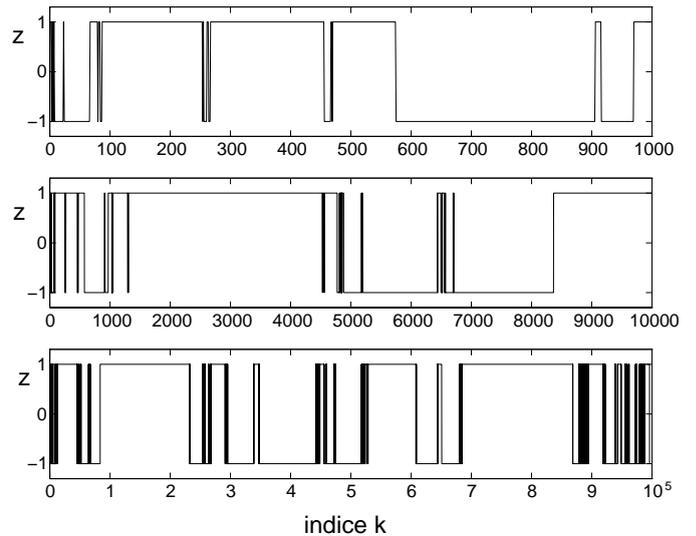


FIG. 6 – Une réalisation d'un processus on-off  $z(k)$  déclenché par un signal  $y(k)$  du type de la Fig. 1. Au vu du spectre moyen empirique de la Fig. 7,  $z(k)$  constitue un bruit en  $1/f^{1.5}$ .

## 4 Conclusion

Les résultats présentés établissent, à la fois de façon théorique et numérique, que le système proposé peut être utilisé pour la génération de bruits en  $1/f^\alpha$ . En tant qu'une récurrence d'ordre un, le système possède la propriété rare de permettre une implémentation numérique directe autorisant la génération en ligne de bruits en  $1/f^\alpha$ , sur des horizons temporels virtuellement indéfinis où la longue dépendance est préservée. Des développements envisagea-

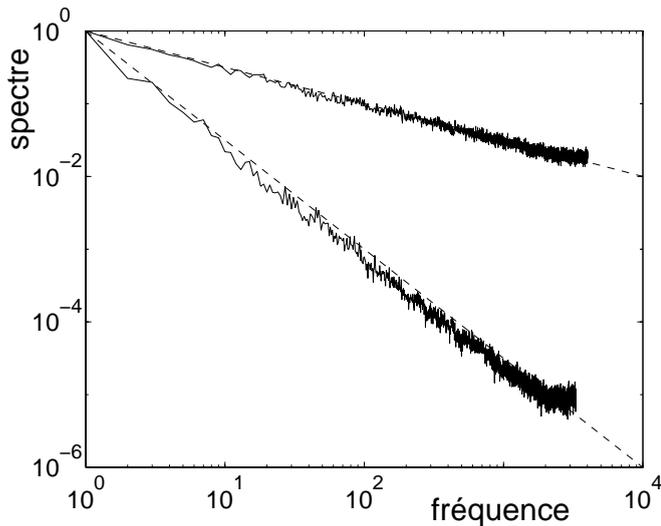


FIG. 7 – Spectres moyens empiriques normalisés pour le signal  $s(k) = y_1(k) - y_2(k)$  de la Fig. 5 autour de la pente  $-1/2$ , et pour le signal  $z(k)$  de la Fig. 6 autour de la pente  $-3/2$ .

bles consistent à rechercher plus de versatilité dans les signaux générés, et en particulier dans l'exposant  $\alpha$ . Différentes voies sont actuellement envisagées, comme l'utilisation des signaux générés pour exciter ou moduler d'autres systèmes ou processus stochastiques, ou encore l'introduction de corrélation dans la séquence d'entrée  $x(k)$ , ou la considération de systèmes dynamiques  $(\max, +)$  d'ordres supérieurs.

## Références

- [1] P. H. Handel, A. L. Chung, *Noise in Physical Systems and  $1/f$  Fluctuations*. New York : AIP Press, 1993.
- [2] G. Wornell, *Signal Processing with Fractals*. New York : Prentice Hall, 1996.
- [3] R. Jennane, R. Harba, G. Jacquet, "Estimation de la qualité des méthodes de synthèse du mouvement brownien fractionnaire," *Traitement du Signal*, vol. 13, pp. 289–302, 1996.
- [4] O. Magré, M. Guglielmi, "Modelling and analysis of fractional Brownian motions," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 8, pp. 377–388, 1997.
- [5] C. W. J. Granger, R. Joyeux, "An introduction to long-memory time series models and fractional differencing," *Journal of Time Series Analysis*, vol. 1, pp. 15–29, 1980.
- [6] N. J. Kasdin, "Discrete simulation of colored noise and stochastic processes and  $1/f^\alpha$  power law noise generation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, pp. 802–827, 1995.
- [7] S. B. Lowen, M. C. Teich, "Power-law shot noise," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, pp. 1302–1318, 1990.
- [8] P. Flandrin, "Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, pp. 910–917, 1992.
- [9] S. Gaubert, "Performance evaluation of  $(\max, +)$  automata," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 2014–2025, 1995.
- [10] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I. New York : Wiley, 1971.
- [11] F. Chapeau-Blondeau, " $(\max, +)$  dynamic systems for modeling traffic with long-range dependence," *Fractals*, vol. 6, pp. 305–311, 1998.