

# Partition du Plan Temps-Fréquence et Réallocation\*

E. Chassande-Mottin<sup>(1)</sup>, F. Auger<sup>(2)</sup>, I. Daubechies<sup>(3)</sup> et P. Flandrin<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> E. N. S. Lyon, Laboratoire de Physique (URA 1325 CNRS)

46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07, France

E-mail : echassan@physique.ens-lyon.fr

<sup>(2)</sup> IUT de Saint-Nazaire, GE44-LRTI, BP 406,

44602 Saint-Nazaire Cedex, France

<sup>(3)</sup> Princeton University, Washington Road, Princeton, NJ 08544-1000, USA

## RÉSUMÉ

Le problème que nous abordons est celui du découpage du plan temps-fréquence en vue d'obtenir une description simplifiée d'un signal multicomposante qui rende possible l'extraction de chacune de ses composantes et leur reconstruction. La solution proposée s'appuie sur une nouvelle extension de la méthode de réallocation, qui permet très naturellement d'extraire les différentes composantes à l'aide d'une technique de classification non supervisée. L'originalité de ce travail réside dans la manière dont on extrait l'information qui sert à construire la partition. A cette fin, on utilise non pas la distribution temps-fréquence elle-même, mais le champ de ses vecteurs de réallocation, ce qui apporte aussi un nouvel éclairage sur la question de ce qu'est une composante d'un signal.

## ABSTRACT

We are dealing with the problem of the partitioning of the time-frequency plane to obtain a simplified description of the signal from which it is possible to extract and reconstruct each of its components. The proposed solution is based upon a new extension of the reassignment method which allows us to extract the signal component with the help of an unsupervised clustering algorithm. The original contribution lies in the way we extract the information used to build the time-frequency partition. In order to achieve this, we do not use the time-frequency distribution itself, but its reassignment vector field, so that we are considering the notion of signal component from a new perspective.

## 1 Introduction

De nombreux problèmes de traitement du signal comme le débruitage, la classification de signaux, . . . , peuvent se reformuler dans le contexte de l'analyse temps-fréquence par la recherche d'un moyen de partager le plan temps-fréquence en zones marquant chacune des composantes d'un signal et permettant leur extraction de manière indépendante. Dessiner une carte temps-fréquence, c'est essentiellement décomposer le signal en composantes modulées en fréquence et/ou en amplitude. Nous proposons de répondre à ce problème général sans avoir à notre disposition de connaissances *a priori* (pas de dictionnaire de signaux) sur la structure des signaux mais en introduisant une définition de ce qu'est une composante. L'algorithme que nous décrivons ici exploite l'information contenue dans le champ des vecteurs de réallocation d'un spectrogramme. Nous précisons d'abord les fondements théoriques de la méthode et verrons ensuite en Section 3 comment elle peut concrètement se mettre en œuvre. Nous illustrerons enfin notre propos en Section 4 en montrant l'efficacité de la méthode sur deux applications d'extraction de composantes et de débruitage.

## 2 Fondements théoriques

### 2.1 La méthode de réallocation

La méthode de réallocation a été initialement introduite pour améliorer l'acuité des représentations temps-fréquence [1, 4] et partant, leur lisibilité. Elle repose sur l'introduction d'un champ de vecteurs de déplacement

$$\mathbf{r}(t, \omega) = (\hat{t}(t, \omega) - t, \hat{\omega}(t, \omega) - \omega)^t \quad (1)$$

où  $\hat{t}(t, \omega)$  et  $\hat{\omega}(t, \omega)$  désignent les coordonnées du point de réallocation. Dans le cas particulier du spectrogramme, ce champ vectoriel peut être relié à la phase de la transformée de Fourier à Court Terme (FCT) du signal  $x(t)$  de fenêtre  $h(t)$ ,

$$F(t, \omega) = e^{i\omega t/2} \int x(s)h^*(s-t)e^{-i\omega s} ds,$$

par la relation [4],

$$\mathbf{r}(t, \omega) = (-t/2 - \partial\phi/\partial\omega, -\omega/2 - \partial\phi/\partial t)^t,$$

avec  $\phi(t, \omega) = \arg\{F(t, \omega)\}$ . Le spectrogramme réalloué se déduit alors du spectrogramme conventionnel  $|F(t, \omega)|^2$  en soumettant ce dernier à l'action du champ (1).

(\*) Ce travail est soutenu par le GdR-PRC ISIS et le Program of Applied and Comp. Math. de Princeton University

## 2.2 Réallocation différentielle.

Dans la méthode originale, chaque valeur du spectrogramme est déplacée d'une quantité finie, éventuellement grande. On propose d'introduire une méthode de *réallocation différentielle* [3] qui généralise la version originale. L'idée est d'assimiler chaque point du plan temps-fréquence à une particule dont le mouvement est complètement déterminé par sa position initiale et par sa vitesse que l'on fixe en tout point égale au vecteur de réallocation correspondant. Chaque valeur du spectrogramme est alors déplacée par sauts infinitésimaux et de façon continue jusqu'à convergence vers un équilibre.

## 2.3 Partition.

Au terme de l'évolution du système, chaque partie du signal se trouve résumée en quelques points où s'accumulent les quantités ainsi réallouées. Nous proposons de définir la notion de *composante* d'un signal comme étant l'ensemble des points du plan temps-fréquence qui convergent vers le même attracteur. Conformément à l'intuition, une composante se trouve ainsi décrite par un *centre* temps-fréquence (l'attracteur) et un *domaine* essentiel d'existence dans le plan (le bassin d'attraction).

## 2.4 Lien avec un potentiel.

On peut montrer [3] que, dans le cas d'une fenêtre gaussienne  $h(t) = (\pi a^2)^{-1/4} e^{-(t/a)^2/2}$ , le champ de vecteurs vérifie la relation

$$\mathbf{r}(t, \omega) = \nabla \log(|F(t, \omega)|) + G(t, \omega), \quad (2)$$

où  $G(t, \omega)$  est une fonction qui s'exprime explicitement à l'aide de  $F(t, \omega)$ , ce qui signifie qu'il dérive du potentiel scalaire  $\log(|F(t, \omega)|)$ , à un terme correctif près. Dans le cas particulier  $a = 1$  (fenêtre "ronde" dans le plan temps-fréquence), ce terme correctif est nul et la méthode devient alors équivalente à une méthode de gradient, rejoignant en cela l'approche développée dans [6], par exemple. Les trajectoires de réallocation différentielle correspondent alors aux lignes de plus grandes pentes du potentiel  $-\log|F|$ . En comparant (1) et (2), on peut de plus noter que, dans ce cas, module et phase de la FCT portent la même information, ce qui signifie que la connaissance du seul spectrogramme est suffisante *a priori* pour la reconstruction du signal sur lequel il est évalué.

# 3 Algorithme

La mise en œuvre du calcul de la partition temps-fréquence passe par plusieurs étapes.

## 3.1 Réallocation différentielle.

On calcule les *points de réallocation asymptotiques*, i.e., les coordonnées de la position de chaque particule en fin de trajectoire en intégrant le système d'équations différentielles liant la

position de la particule à son champ de vitesse. Chaque trajectoire est évaluée numériquement par une méthode Runge-Kutta d'ordre 2 à pas  $k$  fixe dont la précision est en  $O(k^3)$ . Si  $t_n$  et  $\omega_n$  représentent respectivement les coordonnées temporelles et fréquentielles de la particule au cours de son mouvement, on a

$$\begin{aligned} (\bar{t}_n, \bar{\omega}_n)^t &= (t_n, \omega_n)^t + k \mathbf{r}(t_n, \omega_n) \\ (t_{n+1}, \omega_{n+1})^t &= (t_n, \omega_n)^t + k/2 (\mathbf{r}(t_n, \omega_n) + \mathbf{r}(\bar{t}_n, \bar{\omega}_n)), \end{aligned}$$

l'arrêt de l'itération étant déterminé par un critère spécifique qui nous garantit que l'approximation que nous obtenons est dans un carré d'arête  $d$  (donnée) centré sur la valeur asymptotique vraie. Ce critère est obtenu en faisant l'hypothèse d'une approximation quadratique locale du potentiel (ce qui revient à approcher localement le signal par une modulation linéaire de fréquence d'enveloppe gaussienne). Compte tenu de cette approximation, le critère prend la forme de deux conditions à respecter simultanément :

$$\begin{aligned} |t_{n+1} - t_n| &> d |t_n - t_{n-1}| \\ |\omega_{n+1} - \omega_n| &> d |\omega_n - \omega_{n-1}|. \end{aligned}$$

## 3.2 Pré-traitement.

Il s'agit d'effectuer le tri parmi les opérateurs de réallocation asymptotiques de manière à repérer les positions exactes des attracteurs. Le nombre de points étant à ce stade généralement très grand, on effectue un premier passage que l'on appelle *pré-traitement*. Il consiste à regrouper tous les points situés à une distance inférieure à  $\sqrt{2}d$ , i.e., la diagonale d'un carré de côté  $d$ . Tous les points qui convergent vers la même valeur asymptotique seront donc résumés en un seul (que l'on fixe égal à leur barycentre). Notons qu'ici on s'intéresse en premier lieu aux signaux possédant une modulation en amplitude pour lesquels les points de réallocation asymptotiques forment un ensemble de points isolés.

## 3.3 Classification ascendante hiérarchique.

Il nous faut maintenant associer les points qui appartiennent à la même ligne de modulation de fréquence. Un algorithme plus complexe (d'où l'importance de la réduction du nombre de points réalisée lors de l'étape précédente), la Classification Ascendante Hiérarchique [2] (CAH), va nous le permettre. La CAH des points de réallocation prétraités nous fournit une structure arborescente (le dendrogramme) où sont ordonnés les points suivant la distance qui les sépare. Il suffit alors d'appliquer un seuil (égal à  $d + D$ , la distance maximale entre deux attracteurs appartenant à la même ligne de modulation de fréquence dans le pire des cas, où  $D$  est le pas de la grille de discrétisation du plan temps-fréquence) dans le dendrogramme pour mettre ensemble tous les points qui s'alignent sur une même droite du plan. Chaque classe ainsi obtenue est alors affiliée à une même composante.

### 3.4 Carte temps-fréquence.

La dernière étape consiste à affecter à tous les antécédents des points de réallocation asymptotiques le numéro de la composante correspondante.

## 4 Deux exemples

L'algorithme que nous proposons peut servir de point de départ à de nombreuses applications en traitement du signal. La classification de signaux, leur reconnaissance, l'estimation de paramètres peuvent s'appuyer sur la partition temps-fréquence.

### 4.1 Extraction-reconstruction

A titre de premier exemple, nous nous intéressons ici à la reconstruction des différentes composantes d'un signal. Il existe de nombreuses méthodes pour reconstruire une partie de signal contenue dans un domaine du plan temps-fréquence. Ce problème est équivalent à celui de la synthèse d'un filtre temps-fréquence de gabarit fixé. Le filtrage de Weyl est la solution qui réalise le meilleur compromis entre précision de reconstruction et complexité algorithmique [5]. C'est donc à l'aide de cette méthode que nous reconstruisons les différentes parties du signal dans leur représentation temporelle.

La figure 1 illustre ce que nous proposons sur un signal composé de deux "chirps" linéaires de taux de modulation différents et d'enveloppes gaussiennes d'amplitudes différentes. L'algorithme de partition détecte les deux composantes et les situe sur une carte temps-fréquence. On présente ensuite la reconstruction de chacun des deux "chirps".

### 4.2 Débruitage

Disposer d'une carte temps-fréquence est également utile pour le débruitage de signaux. La problématique est la suivante : on veut extraire un signal (une modulation linéaire de fréquence d'enveloppe gaussienne en l'occurrence) noyé dans un bruit additif (blanc et gaussien dans notre cas). On évalue la qualité du débruitage en mesurant le rapport signal sur bruit, RSB (ce qui revient à évaluer l'énergie résiduelle du bruit) après traitement. Le principe qui préside à l'utilisation d'une carte temps-fréquence est simple. La carte va nous servir à sélectionner la zone temps-fréquence qui correspond au signal et à rejeter celles qui sont associées au bruit. En reconstruisant, avec les méthodes présentées dans le paragraphe précédent, ce que contient la zone "signal", on réhausse le RSB puisque les contributions dues au bruit hors de cette zone sont éliminées. La figure 2 nous montre le gain en RSB obtenu après débruitage pour un RSB initial variant entre  $-15$  dB et  $10$  dB. Les simulations que nous avons réalisées nous indiquent que, pour un RSB de l'ordre de  $-5$  à  $0$  dB, l'atténuation du bruit est d'environ  $5$  dB.

Les résultats que nous exposons supposent tout de même que l'on sache reconnaître la zone "signal" sur la carte. Dans l'exemple présent, nous avons opté pour un critère simple, que

l'on pourrait éventuellement sophistication dans l'avenir. Nous choisissons parmi toutes les composantes détectées celles de plus grande énergie.

## 5 Conclusion

Nous avons proposé un algorithme qui permet d'obtenir un découpage du plan temps-fréquence dans lequel chaque partie contient ce que nous appelons une *composante*. Pour ce faire, nous utilisons une information directement issue du champ des vecteurs de réallocation du spectrogramme, lui-même lié à un certain potentiel. Chaque composante peut alors être décrite par un domaine temps-fréquence (un puits de potentiel) et un attracteur (minimum local dans ce puits). Nous détectons donc autant de composantes qu'il existe de minima locaux dans le potentiel prescrit. Nous montrons sur deux exemples comment cet algorithme peut s'appliquer à l'extraction de chacune des composantes d'un signal, ainsi qu'à des problèmes de débruitage. Les difficultés liées à la présence de plusieurs minima locaux (causée par exemple par la présence de bruit) dans une zone que l'intuition aurait marquée comme une seule et même composante, sont passées sous silence, et seront abordées ultérieurement par des méthodes de "merging" et de régularisation.

## Références

- [1] F. AUGER and P. FLANDRIN. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 43(5):1068–1089, May 1995.
- [2] J.P. BENZECRI et al. *L'analyse de données. Tome 1 : la taxinomie*. Dunod, 1973.
- [3] E. CHASSANDE-MOTTIN, I. DAUBECHIES, P. FLANDRIN, and F. AUGER. Differential reassignment. Soumis à publication.
- [4] K. KODERA, C. DE VILLEDARY, and R. GENDRIN. A new method for the numerical analysis of nonstationary signals. *Phys. Earth and Plan. Int.*, 12:142–150, 1976.
- [5] W. KOZEK and F. HLAWATSCH. A comparative study of linear and nonlinear time-frequency filters. In *IEEE Int. Conf. on Time-Frequency and Time-Scale analysis*, pages 163–166, Victoria, 1992.
- [6] V. PIERSON and N. MARTIN. Watershed segmentation of time-frequency images. In I. PITAS, editor, *IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, volume 2, pages 1003–1006, Halkidiki, 1995.

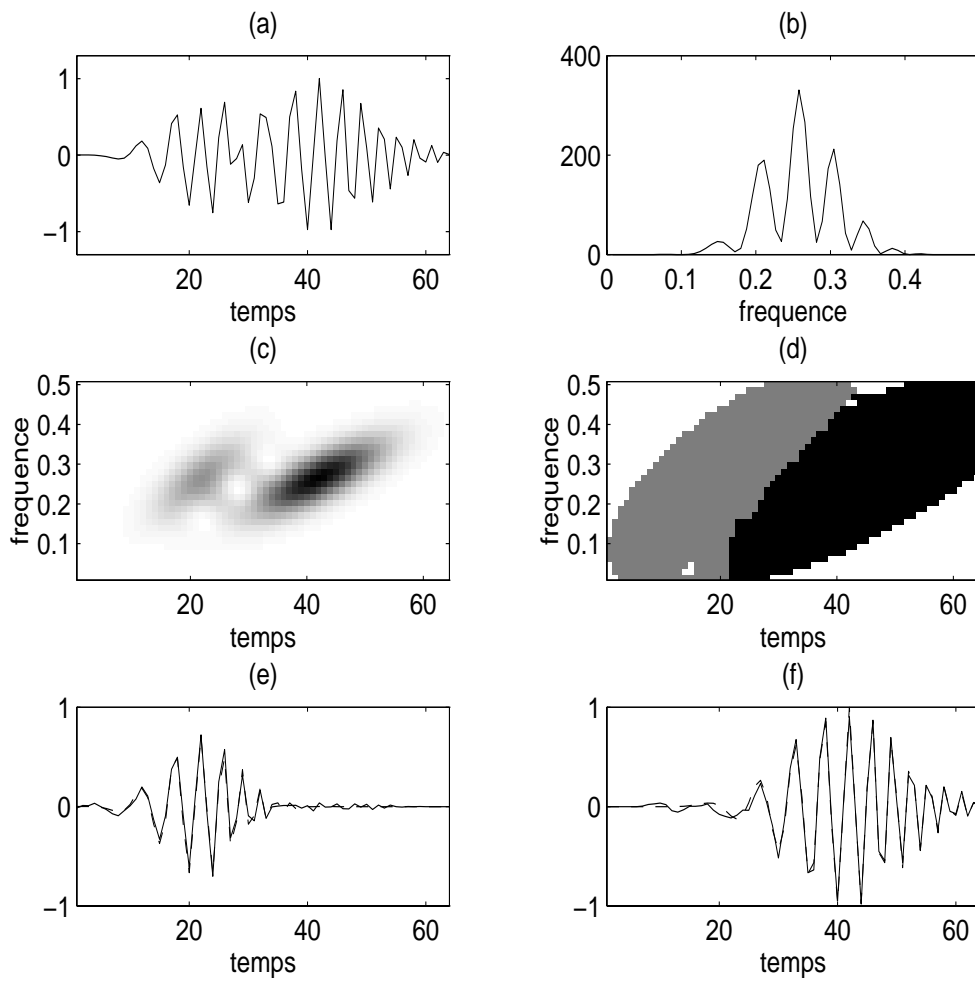


FIG. 1 — (a) signal, (b) spectre d'énergie, (c) spectrogramme, (d) partition, (e) première composante (trait pointillé) et sa reconstruction (trait plein), (f) deuxième composante (trait pointillé) et sa reconstruction (trait plein).

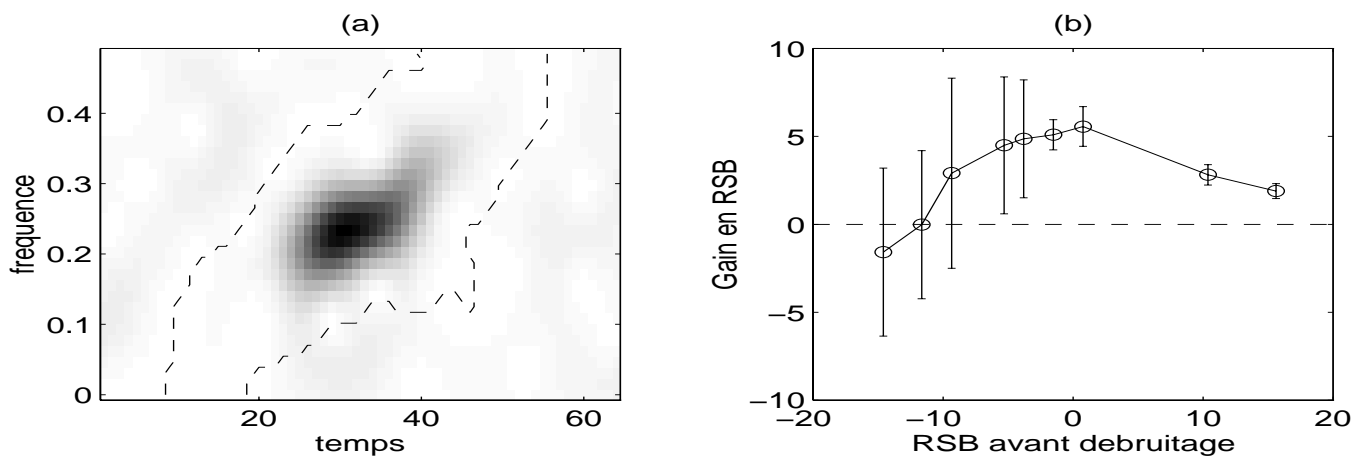


FIG. 2 — (a) spectrogramme d'une réalisation bruitée ( $RSB = 0$  dB) et contour de la zone "signal" identifiée, (b) moyenne et écart-type du gain en RSB en fonction du RSB en entrée (10 réalisations de bruit indépendantes pour chaque point).