

# Etude comparative de méthodes de restauration d'images dans le cas d'un modèle de dégradation spatialement variant

V. Barakat, B. Guilpart, R. Goutte, R. Prost

CEA DAM BIII BP 12 91680 Bruyères-Le-Châtel FRANCE  
CREATIS Bât 502 INSA-LYON 69621 Villeurbanne Cedex FRANCE

## RÉSUMÉ

Nous proposons une comparaison des méthodes de : Tikhonov-Miller, Tikhonov-Miller avec modèle a priori de la solution, Markov et Maximum d'Entropie, dans le cas d'un système de dégradation spatialement variant. L'approximation du modèle variant par un modèle invariant est précisée. Il est montré que le choix d'une méthode de restauration sera fonction du type d'information a priori disponible et des caractéristiques de la PSF (Point Spread Function). Dans le cas de l'imagerie par sténopé, il est indispensable de prendre en compte la variabilité spatiale.

## ABSTRACT

We propose a comparison between Tikhonov-Miller, Tikhonov-Miller with an a priori model of the solution, Markov and Maximum Entropy regularization methods, in the case of a shift-variant degradation. The approximation of a spatially-variant blur by an invariant one is outlined. It is shown that the choice of a restoration method depends on both the available a priori information and the PSF properties. In pinhole imaging, it is necessary to take into account the spatial variability of the PSF.

## 1 Introduction

Tout système de formation d'images est caractérisé par sa réponse impulsionnelle ou fonction de point (point spread function PSF). Elle traduit la représentation de chaque point de l'objet dans le plan image.

Le phénomène de la variabilité spatiale de la PSF est un problème général en optique. En particulier, en imagerie par sténopé avec des rayonnements à forte énergie, l'épaisseur du sténopé n'est pas négligeable et ses bords ne sont pas parfaitement absorbants. Ce système de formation d'images a une PSF à forte variabilité spatiale. Ce cas est illustré par la figure 1. La PSF est reportée sur la figure 3.2. On notera le comportement inverse de celui rencontré en optique conventionnelle (figure 3.1).

La source à imager est isotrope et elle émet dans un angle solide de  $\pi$ . Le diaphragme n'est que partiellement absorbant. L'image obtenue est celle d'un objet 3D projeté dans un plan, avec une dégradation de chaque point. Nous limiterons cette étude à l'imagerie d'un objet plan perpendiculaire à l'axe optique. On remarquera que la dégradation a une symétrie de révolution.

L'objet de cette communication est de comparer quatre méthodes de restauration d'images : Tikhonov-Miller, Tikhonov-Miller avec modèle a priori de la solution, méthodes des Champs de Markov et du Maximum d'Entropie. Le modèle de dégradation est à forte variation spatiale. Nous étudierons, pour chacune des méthodes, les effets induits par l'approximation du caractère spatialement

variant par un modèle invariant, en terme de qualité de la restauration. Nous souhaitons déterminer une valeur limite au delà de laquelle on ne peut plus négliger la variation spatiale au détriment de la qualité de la reconstruction.

Nous donnerons, dans un premier temps, une présentation unifiée des méthodes de restauration citées précédemment. Nous développerons plus longuement la régularisation de Tikhonov-Miller pour un modèle a priori de la solution, qui est une contribution originale. Nous présenterons ensuite des résultats expérimentaux avec un protocole précis d'évaluation de la robustesse des algorithmes vis-à-vis de la variabilité spatiale de la PSF. Enfin, nous présenterons les conclusions de cette étude.

## 2 Méthodes de restauration

### 2.1 Enoncé du problème

La formation d'une image est modélisée par l'équation :

$$g = Hf + n \quad (1)$$

où  $g$  est l'image observée,  $H$  la matrice de dégradation,  $f$  l'image originale et  $n$  un bruit de mesure. Si la dégradation est invariante,  $H$  est une matrice bloc Toeplitz. Si la dégradation est spatialement variante,  $H$  est une matrice quelconque. Le problème de restauration consiste à résoudre l'équation (1), c'est-à-dire à estimer l'image originale  $f$  ou une image de bonne qualité proche de la réalité, connaissant les données  $g$ , le modèle de dégradation  $H$ , des informations a priori sur la solution recherchée et, éventuellement, la

distribution statistique du bruit  $n$ . La résolution de l'équation (1) est un problème inverse mal-posé lié au mauvais conditionnement de la matrice  $H$  et à la présence de bruit. La non-continuité de la solution en fonction des données aboutit à une solution instable. Les méthodes de régularisation, basées sur l'introduction d'informations a priori sur la solution recherchée, conduisent à une solution stable.

## 2.2 Méthodes théoriques de résolution

Les méthodes proposées pour la résolution du problème de restauration sont au nombre de quatre :

- ◆ la régularisation de type Tikhonov-Miller [TIKHO77],
- ◆ la régularisation de type Tikhonov-Miller avec modèle a priori de la solution,
- ◆ restauration par Champs de Markov [GEMAN 92],
- ◆ restauration par le Maximum d'Entropie [DJFAFA 88] [BERCH 95].

Ces méthodes ont un point commun, elles s'appuient toutes sur la définition d'un critère à optimiser, qui peut s'écrire de façon générale [DEMOM 89], sous la forme :

$$J(f) = \Delta_1(f, \hat{f}_0) + \lambda \Delta_2(f, \hat{f}_\infty) \quad (2)$$

où  $\Delta_1(.,.)$  est une distance mesurant la fidélité de la solution aux données ( $\Delta_1$  est en général une distance quadratique).  $\hat{f}_0$  est la solution consistante avec les mesures.  $\Delta_2(.,.)$  est une mesure de la fidélité de la solution à l'a priori.  $\hat{f}_\infty$  est la solution consistante avec l'a priori,  $\lambda$  est un paramètre de régularisation qui traduit l'importance que l'on donne à l'information a priori par rapport aux données.

La distinction entre les quatre méthodes présentées, vient du choix de la fonctionnelle  $\Delta_2$  pour introduire l'information a priori [KANG 95]. Cette information a priori sera de type déterministe ou de type stochastique.

### 2.2.1 Régularisation déterministe

#### a. Régularisation de Tikhonov-Miller

La fonctionnelle  $\Delta_2$  est choisie telle que

$$\Delta_2(f, \hat{f}_\infty) = \|Df\|^2$$

L'estimée  $\hat{f}$  s'exprime par :

$$\hat{f} = (H^T H + \lambda D^T D)^{-1} H^T g$$

avec  $D$ , un opérateur utilisé pour traduire l'information a priori de type déterministe.  $C$  est un «filtre» passe-haut, qui évalue la douceur de la solution.

#### b. Régularisation de Tikhonov-Miller avec modèle a priori de la solution

La fonctionnelle  $\Delta_2$  s'écrit

$$\Delta_2(f, \hat{f}_\infty) = \|C(f - \hat{f}_c)\|^2$$

ce qui donne l'estimée suivante

$$\hat{f} = (H^T H + \lambda C^T C)^{-1} (H^T g + \lambda C^T C \hat{f}_c).$$

$C$  est un opérateur gradient et  $\hat{f}_c$  est un modèle a priori contenant quelques propriétés de la solution. L'intérêt de ce modèle est qu'il permet de lisser le bruit dans les zones homogènes et de restaurer des discontinuités si l'image contient de forts gradients.

### 2.2.2 Régularisation stochastique

L'image est interprétée dans un cadre probabiliste. On fait l'hypothèse d'un bruit blanc, gaussien, de moyenne nulle, d'écart type  $\sigma$  et dont les composantes sont statistiquement indépendantes.

#### a. Restauration par les Champs de Markov

$\Delta_2$  est une fonctionnelle traduisant l'énergie d'interaction entre pixels. Elle peut s'exprimer par la fonction potentielle suivante, par exemple :

$$\Delta_2(f, \hat{f}_\infty) = \sum_{c \in C} V_c(f)$$

$V_c$  est l'énergie d'interaction locale définissant des contraintes locales au niveau d'un voisinage du pixel considéré.

#### b. Restauration par le Maximum d'Entropie

La connaissance a priori se limite à une contrainte globale sur l'entropie de l'objet. La fonctionnelle est :

$$\Delta_2(f, \hat{f}_\infty) = \sum_i f_i \log(f_i). \text{ Les } f_i \text{ sont les composantes}$$

de  $f$ .

### 3 Comparaison de la robustesse des méthodes vis-à-vis de la variabilité spatiale de la PSF

#### 3.1 Critères d'évaluation de la qualité de la restauration

La mesure de la qualité de la restauration est un point délicat. Le problème est de savoir par rapport à quelle solution idéale nous allons comparer le résultat. La détermination du critère dépend de ce que l'on souhaite privilégier dans la restauration. Nous avons choisi plusieurs critères de mesure de qualité :

- l'erreur quadratique. Ce critère classique est issu de  $\Delta_1$  : il mesure une erreur globale mais il est très sensible au bruit présent dans toute l'image,
- l'erreur maximale. Elle est basée sur la norme supérieure et découle du choix de  $\Delta_2$ , dont le rôle est de fixer une limite à l'erreur. Cette erreur est étroitement liée au bruit,
- l'erreur sur la dérivée. Elle permet de contrôler la qualité de la reconstruction de forts gradients,
- la largeur du pic d'autocorrélation de l'erreur. Il permet de savoir si toute l'information issue des données et de l'a priori a été exploitée. Ce critère est lié au fait que le bruit n'est pas corrélé avec le signal.

Chacun de ces critères a un rôle bien défini. La définition d'un seul type de critère est insuffisante et ne permet pas d'affirmer qu'une restauration est bonne ou mauvaise. Par exemple, avec l'erreur quadratique, le moindre offset dans toute l'image conduit à une erreur très grande alors que la restauration s'avère correcte. C'est pourquoi une combinaison de plusieurs critères dans un seul semblerait plus judicieuse pour une interprétation de la qualité de la restauration.

#### 3.2 Résultats expérimentaux

Nous dressons un tableau comparatif des méthodes de restauration étudiées et de leur comportement vis-à-vis de la variabilité spatiale. Nous présentons uniquement, les images obtenues pour une seule méthode de restauration : la méthode de Tikhonov-Miller avec modèle a priori.

On considère l'image originale (figure 2), que l'on dégrade avec les noyaux spatialement variants (figure 3.1 et figure 3.2). Les images dégradées sont bruitées avec un rapport signal à bruit (RSB) de 15.5 dB (figures 4.1 et 4.2). Dans les images présentées, nous avons appliqué la régularisation de Tikhonov-Miller avec modèle a priori. Les contraintes de discontinuités introduites dans le modèle a priori sont ici assez précises. Nous avons effectué une première restauration, en considérant le modèle de

dégradation spatialement invariant. Les images restaurées sont représentées sur les figures 6.1 et 6.2. Puis nous avons procédé à une deuxième restauration en ajoutant les mêmes contraintes, et en prenant en compte la variabilité spatiale du noyau de dégradation. On observe les images reconstruites sur les figures 7.1 et 7.2. On constate que malgré la précision des contraintes, les images sont mal restaurées avec un noyau invariant. La qualité de la restauration est étroitement liée dans le cas présent au modèle de dégradation utilisé. L'approximation par un système invariant n'est, dans ce cas, pas justifiée. La mesure de l'autocorrélation de l'image de l'erreur de restauration est donnée figures 5.1 et 5.2 pour la restauration invariante, et figures 8.1 et 8.2 pour la restauration variante. L'aire de la section du pic à mi-hauteur est plus faible pour une restauration variante que pour une restauration invariante, ce qui prouve une meilleure utilisation des données.

### 4 Conclusion

Le choix d'une méthode de restauration par rapport à une autre sera fonction du type d'information a priori disponible et des caractéristiques spécifiques de la PSF. Dans le cas d'une imagerie par sténopé, il est indispensable de prendre en compte la variabilité spatiale.

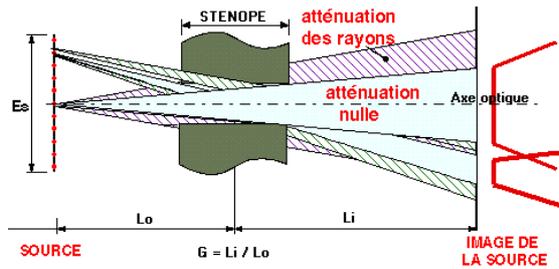
**Tableau récapitulatif : cas PSF d'une optique conventionnelle**

	TIKHONOV-MILLER		TIKHONOV-MILLER avec modèle a priori de la solution		CHAMPS DE MARKOV		MAXIMUM D'ENTROPIE	
	SV	SI	SV	SI	SV	SI	SV	SI
Erreur quadratique	184.2 *14.7	227.69 *24.02	22.4 *12.56	90.46 *11.23	178.29 *31.72	260.8 *19.1	220.7 *43.8	240.9 *28.6
Erreur maximale	*67.1 *20.1	88.6 *20.6	14.3 *12.9	69.3 *14.3	99.1 *25.9	100 *18.1	74.9 *24.4	80.8 *27
Erreur sur la dérivée	118 *13.9	111 *27.8	5.94 *17.6	57.8 *15.7	478 *32	534 *26.1	113 *33.1	*95.7 *40.5
Caractéristiques	Bonne restauration de zones lisses Temps de calcul long		Bonne restauration de zones lisses et des fortes discontinuités avec un modèle a priori assez précis Tps calcul long		Bonne restauration des forts gradients et des zones homogènes Positivité implicite		Application à des images lisses Positivité implicite	

**Tableau récapitulatif : cas du sténopé**

	TIKHONOV-MILLER		TIKHONOV-MILLER avec modèle a priori de la solution		CHAMPS DE MARKOV		MAXIMUM D'ENTROPIE	
	SV	SI	SV	SI	SV	SI	SV	SI
Erreur quadratique	175.4 *10.5	264.9 *45.6	17.67 *9.29	120.21 *62.2	263.8 *38.7	440 *86.9	233.9 *45.4	328.5 *98.5
Erreur maximale	70 *13.3	83.9 *36.8	15.4 *12.5	79.7 *56.3	92.2 *28.6	100 *36.5	72.9 *31.8	92 *37.6
Erreur sur la dérivée	118 *15.1	188 *29.5	10.7 *13.4	41 *34.3	599 *31.2	926 *40.8	106 *29.1	195 *37.6
Caractéristiques	Mêmes remarques que tableau précédent							

\* erreur convoluée par la PSF.



SI Restauration avec matrice de dégradation spatialement invariante: PSF  
 Figure 1 : Illustration de la variabilité spatiale d'un système d'imagerie par sténopé

mesurée sur l'axe optique.

SV Restauration avec matrice de dégradation spatialement variante.

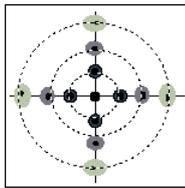


Figure 3.1 : PSF1 isotrope spatialement variante (Optique classique)

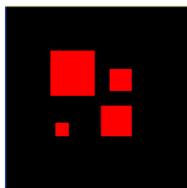


Figure 2 : Image originale

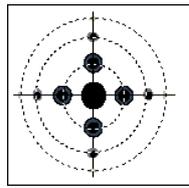


Figure 3.2 : PSF2 isotrope spatialement variante (Sténopé)

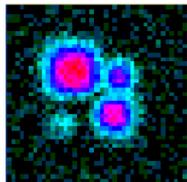


Figure 4.1 : Image dégradée par PSF1

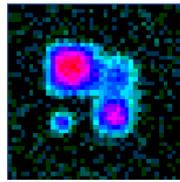


Figure 4.2 : Image dégradée par PSF2

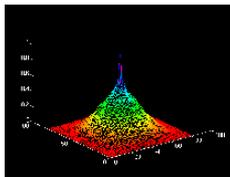


Figure 5.1 : Autocorrélation de l'erreur de restauration invariante par PSF1

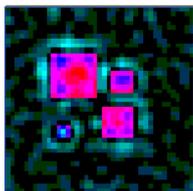


Figure 6.1 : Image restaurée avec PSF1 Invariante, mesurée sur l'axe optique

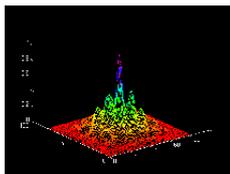


Figure 5.2 : Autocorrélation de l'erreur de restauration invariante avec PSF2

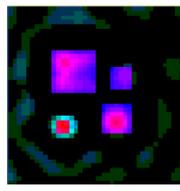


Figure 6.2 : Image restaurée avec PSF2 invariante, mesurée sur l'axe optique

5

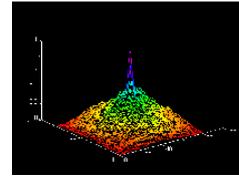


Figure 8.1 : Autocorrélation de l'erreur de restauration variante avec PSF1

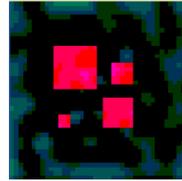


Figure 7.1 : Image restaurée avec PSF1 variant

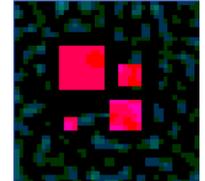


Figure 7.2 : Image restaurée avec PSF2 variant

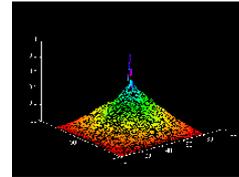


Figure 8.2 : Autocorrélation de l'erreur de restauration variante avec PSF2

## BIBLIOGRAPHIE

[BERCH 95] "Développement de critères de nature entropique pour la résolution des problèmes inverses linéaires", J.F. BERCHER, Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, ORSAY, 1995.

[DEMOM 89] "Image Reconstruction and Restoration: Overview of Common Estimation Structures and Problems", G. DEMOMENT, IEEE Transactions, on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol.37, no.12, pp.2024-2035, December 1995.

[DJAF 88] "Utilisation de l'Entropie dans les problèmes de restauration et de Reconstruction d'Images", M. DJAFARI, G. DEMOMENT, Traitement du signal, vol.5, no.4, pp. 235-248, 1988.

[GEMAN 92] "Constrained Restoration and the Recovery of Discontinuities", D. GEMAN, G. REYNOLDS, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.14, no.3, pp.367-382, March 1992.

[KANG 95] "General Choice of the Regularization Functional in Regularized Image Restoration", M.G. KANG, A.K. KATSAGGELOS, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 4, no.5, pp. 594-602, May 1995.

[TIKHO 77] "Solutions of Ill-Posed Problems, A.N. TIKHONOV, V.Y. ARSEININ, V.H. Winston and Sons, Washington, 1977.