

# Identification adaptative des paramètres d'un modèle ARMA au moyen de l'algorithme de l'anti-treillis

M. Terré<sup>(1)</sup> et L. Féty<sup>(2)</sup>

(1) Alcatel Telspace, 5 rue Noël Pons, 92734 Nanterre Cedex, France

(2) Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue St-Martin, 75141 Paris Cedex 03, France

## RÉSUMÉ

L'algorithme de l'anti-treillis est rappelé, puis ses capacités d'identification des modèles *ARMA* sont mises en évidence. On montre notamment que la base de prédiction "avant" utilisée dans l'anti-treillis conduit à une structure très particulière qui rappelle en partie celle d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie. Cette particularité est mise à profit pour dériver un nouvel algorithme spécialisé dans l'identification des modèles *ARMA*.

## ABSTRACT

The anti-lattice algorithm is presented, then its capabilities in identifying *ARMA* models are highlighted. We show more specifically that the "forward" prediction base used in the anti-lattice algorithm leads to a very particular structure evoking partly that of an infinite impulse response filter. This particularity is used to derive a new algorithm specialized in the identification of *ARMA* models.

## 1 Introduction

C'est vers la fin des années 70 que sont apparus les premiers algorithmes [1] capables d'adapter, avec un coût de calcul réduit, des filtres linéaires à structure transversale au sens du critère des moindres carrés. Ces algorithmes avaient été dérivés de l'algorithme récursif des moindres carrés [2] en observant que dans un filtre transversal, seul un nouvel échantillon est introduit à chaque instant, les autres étant simplement décalés. Il est apparu que ces premiers algorithmes des moindres carrés récursifs dits "rapides" étaient très sensibles au bruit de calcul et pouvaient diverger [3].

La décennie 80 a vu l'émergence de méthodes stabilisatrices [4] [5] [6] plus ou moins efficaces pour résoudre ce problème. Parallèlement, de nouveaux algorithmes, optimisant la même fonction critère, ont été proposés. Le même cheminement que pour les précédents avait été suivi, mais en s'appuyant sur les algorithmes dits "en racine carrée", connus comme une alternative robuste de l'algorithme des moindres carrés récursifs. Ces algorithmes font apparaître une structure de calcul en treillis [7], ou à base de rotations [8] et sont réputés pour leur grande stabilité numérique.

Différentes théories ont été avancées pour expliquer la plus ou moins bonne stabilité des différents algorithmes rapides. Cependant aucune n'apparaît entièrement satisfaisante.

L'algorithme de l'anti-treillis présenté récemment [9], apporte un éclairage différent sur ces questions de stabilité. Comme les algorithmes en treillis et *QR*, il est basé sur une racine carrée de la matrice d'autocorrélation du signal observé, mais à l'inverse de ces derniers, il repose sur une base de prédiction "avant" plutôt que sur une base de prédiction "arrière".

Cela lui confère une structure très particulière constituée de trois branches, dont une partie, en gras sur la figure 1, rappelle la structure d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie.

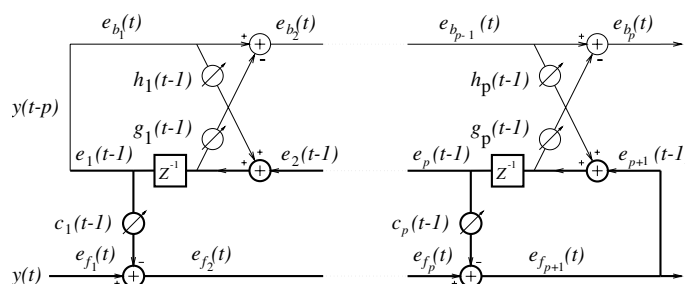


FIG. 1 — Anti-treillis d'ordre  $p$

C'est cette particularité qu'on se propose de mettre à profit dans le cadre de l'identification *MA* (Moving Average). Après avoir rappelé l'algorithme, on mettra en évidence le rôle des différentes composantes de l'anti-treillis et on proposera de façon informelle un nouvel algorithme obtenu en supprimant la branche supérieure de l'anti-treillis et mieux adapté à l'identification des paramètres des modèles *MA*.

## 2 Algorithme de l'Anti-Treillis

La structure de filtrage dans l'anti-treillis comporte trois branches (figure 1). La principale est la branche intermédiaire qui contient la base de prédiction  $\{e_1(t-1) \dots e_p(t-1)\}$ . Cette base est une version orthogonalisée du signal  $\{y(t-p) \dots y(t-1)\}$  présent dans le filtre. L'orthogonalisation mise en jeu est l'inverse de celle rencontrée dans les treillis classiques. Elle est organisée du passé vers l'avenir. La première composante  $e_1(t-1)$  est constituée de l'échantillon de signal le plus ancien. Les composantes suivantes sont les innovations des échantillons suivants par rapport à ceux plus anciens. Jusqu'à la dernière composante qui est l'innovation de  $y(t-1)$  par rapport à  $\{y(t-p) \dots y(t-2)\}$ . L'entrée d'un nouvel échantillon de signal dans le filtre est relative

vement simple puisqu'il suffit de calculer son innovation par rapport à la base en place, puis de l'injecter dans celle-ci. Cette tâche est assurée par la branche inférieure. Par contre, la sortie d'un échantillon de signal du filtre est beaucoup plus délicate puisqu'il faut en quelque sorte, recorréler les composantes de la base avec celle qui sort. Cette "recorrélation" est assurée d'une façon progressive et orientée du passé vers l'avenir, par la branche supérieure de l'anti-treillis.

$$\begin{aligned}
e_{f_1}(t) &= y(t) \\
\gamma_{f_1}(t) &= 1 \\
e_{b_1}(t) &= e_1(t-1) \\
\text{pour } m \text{ allant de } 1 \text{ à } p \\
e_{f_{m+1}}(t) &= e_{f_m}(t) - c_m^T(t-1).e_m(t-1) \\
\gamma_{f_{m+1}}(t) &= \gamma_{f_m}(t) - \frac{\gamma_m^2(t-1).e_m(t-1).e_m^T(t-1)}{\alpha_m(t-1)} \\
c_m(t) &= c_m(t-1) + \frac{\gamma_m(t-1).e_m(t-1).e_{f_{m+1}}^T(t)}{\alpha_m(t-1)} \\
e_m(t) &= e_{m+1}(t-1) + h_m(t-1).e_{b_m}(t) \\
\text{avec } e_{p+1}(t-1) &= e_{f_{p+1}}(t) \\
e_{b_{m+1}}(t) &= e_{b_m}(t) - g_m^T(t-1).e_m(t) \\
\gamma_{b_m}(t) &= \gamma_{b_{m-1}}(t) - \frac{\gamma_{m-1}^2(t).e_{m-1}(t).e_{m-1}^T(t)}{\alpha_{m-1}(t)} \\
\text{avec } \gamma_{b_1}(t) &= \gamma_1(t-1) \\
\alpha_{b_m}(t) &= \lambda.\alpha_{b_m}(t-1) + \gamma_{b_m}(t).e_{b_m}(t).e_{b_m}^T(t) \\
\gamma_m(t) &= \gamma_{m+1}(t-1) + \frac{\gamma_{b_m}^2(t).e_{b_m}(t).e_{b_m}^T(t)}{\alpha_{b_m}(t)} \\
\text{avec } \gamma_{p+1}(t-1) &= \gamma_{f_{p+1}}(t) \\
\alpha_m(t) &= \lambda.\alpha_m(t-1) + \gamma_m(t).e_m(t).e_m^T(t) \\
h_m(t) &= h_m(t-1) + \frac{\gamma_{b_m}(t).e_{m+1}(t-1).e_{b_m}^T(t)}{\alpha_{b_m}(t)} \\
g_m(t) &= g_m(t-1) + \frac{\gamma_m(t).e_m(t).e_{f_{m+1}}^T(t)}{\alpha_m(t)}
\end{aligned}$$

TAB. 1 — Algorithme de l'Anti-Treillis

### 3 Identification d'un modèle MA

Le plus souvent, les méthodes d'identification des paramètres d'un modèle MA :

$$y(t) = x(t) + \sum_{k=1}^M \tilde{a}_k . x(t-k) \quad (1)$$

passent par l'identification d'un modèle AR long<sup>1</sup> puis par une phase d'inversion. L'anti-treillis permet l'identification **directe** des paramètres [11] :

La branche inférieure de l'anti-treillis, prise séparément, est analogue à un **filtre à réponse impulsionnelle infinie**. Et c'est une contre-réaction de la branche supérieure qui dans l'anti-treillis, tronque cette réponse impulsionnelle infinie et permet d'obtenir en définitive un filtre à réponse impulsionnelle finie.

C'est cette particularité qui fut exploitée dans [11] en cherchant à faire fonctionner la branche inférieure de l'anti-treillis en absence de la branche supérieure de façon à obtenir un filtre

<sup>1</sup>La réponse impulsionnelle finie du filtre doit être aussi longue que la partie significative de celle du modèle à identifier.

à réponse impulsionnelle infinie capable d'effectuer la prédiction linéaire adaptative d'un signal. Autrement dit, un **modèle MA adaptatif**.

La figure 2 présente la structure de filtrage obtenue : seuls les derniers coefficients de la branche inférieure

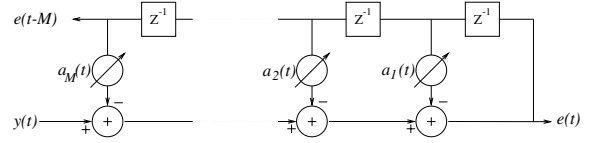


FIG. 2 — Modèle MA adaptatif

$\{c_{p-M+1} \dots c_p\}$  ont été conservés et renommés  $\{a_M \dots a_1\}$ . L'erreur avant  $e_f(t)$  a été renommée  $e(t)$ . L'algorithme d'adaptation est présenté table 2.

$$\begin{aligned}
\alpha_m(0) &= \sigma^2, c_m(0) = 0, e_m(0) = 0, \forall m \\
e_{f_1}(t) &= y(t) \\
\gamma_{f_1}(t) &= \lambda_\gamma . \gamma_{f_1}(t-1) + (1 - \lambda_\gamma) \text{ avec } \gamma_{f_1}(0) = 0 \\
\text{pour } m \text{ allant de } 1 \text{ à } p \\
e_{f_{m+1}}(t) &= e_{f_m}(t) - c_m^T(t-1).e_m(t-1) \\
\gamma_{f_{m+1}}(t) &= \gamma_{f_m}(t) - \frac{\gamma_m^2(t-1).e_m(t-1).e_m^T(t-1)}{\alpha_m(t-1)} \\
c_m(t) &= c_m(t-1) + \frac{\gamma_m(t-1).e_m(t-1).e_{f_{m+1}}^T(t)}{\alpha_m(t-1)} \\
e_m(t) &= e_{m+1}(t-1) \text{ avec } e_{p+1}(t-1) = e_{f_{p+1}}(t) \\
\gamma_m(t) &= \gamma_{m+1}(t-1) \text{ avec } \gamma_{p+1}(t-1) = \gamma_{f_{p+1}}(t) \\
\alpha_m(t) &= \lambda.\alpha_m(t-1) + \gamma_m(t).e_m(t).e_m^T(t)
\end{aligned}$$

TAB. 2 — Modèle MA adaptatif

C'est un algorithme rapide dont le coût de calcul (en  $O(p)$ ) est comparable et même inférieur à ceux engendrés par certains algorithmes rapides d'adaptation de filtres à réponse impulsionnelle finie.

### 4 Identification d'un modèle ARMA

Dans le cas d'un modèle ARMA :

$$y(t) = x(t) + \sum_{k=1}^M \tilde{a}_k . x(t-k) + \sum_{k=1}^N \tilde{b}_k . y(t-k) \quad (2)$$

La base de prédiction est constituée des erreurs de prédiction passées, comme dans le cas du modèle MA, mais également des valeurs passées du signal lui-même. La figure 3 présente une structure intégrant cette évolution.

Sur cette structure apparaissent quatre branches (que l'on numérottera de bas en haut). La première branche réalise la prédiction du signal d'entrée à partir de la base de prédiction qui est répartie sur les deuxième et quatrième branches de la structure. Le signal d'erreur obtenu est réinjecté dans la deuxième branche afin de réaliser la partie MA comme dans le cas du simple modèle MA. La troisième branche constitue l'innovation de la structure. Elle complète la base de prédiction avec les valeurs passées du signal. Elle réalise

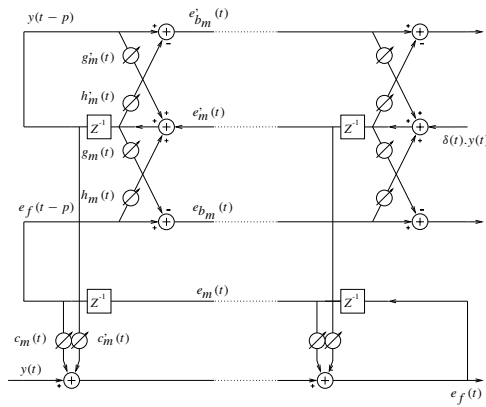


FIG. 3 — **Modèle ARMA Adaptatif**

la partie AR du modèle à identifier. Cette partie qui est à réponse impulsionnelle finie est encadrée de deux branches qui assurent la recorrélation avec les composantes qui sortent de la base à chaque instant. Cette recorrélation est du même type que celle rencontrée dans l’anti-treillis. Les équations de l’algorithme sont présentées dans la table 3.

### 5 Performances

La figure 4 présente l’évolution des coefficients, estimés au moyen de l’algorithme, d’un modèle du premier ordre :

$$y(t) = x(t) + 0,7x(t - 1) - 0,5y(t - 1)$$

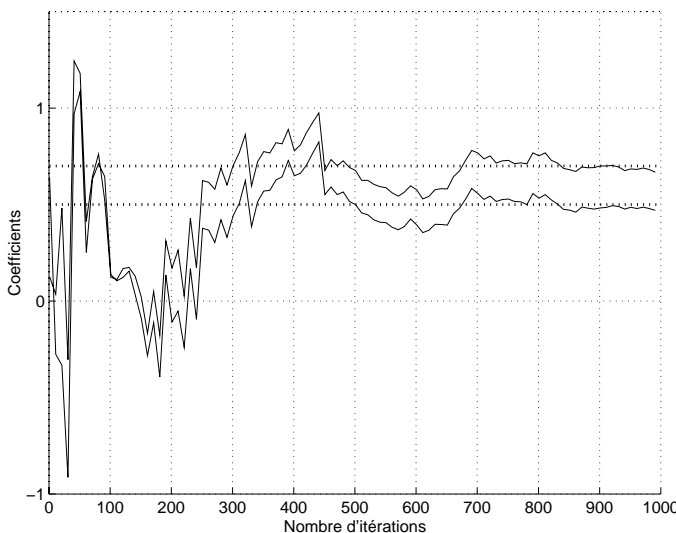


FIG. 4 — **Convergence des coefficients**

La minimisation de l’erreur “avant” au moyen de l’algorithme présenté conduit à l’identification des paramètres du modèle lorsque celui-ci est à **phase minimale**. Comme dans le cas de l’identification AR, cet algorithme d’identification ARMA repose sur la minimisation de l’erreur de prédiction “avant” ou encore, sur le blanchiment du signal.

Dans le cas d’un modèle MA quelconque :

$$Y(Z) = A(Z).X(Z)$$

où  $X(Z)$  correspond à une excitation blanche. la solution évidente pour blanchir le signal qui consiste à inverser  $A(Z)$  :

$$\hat{X}(Z) = \frac{1}{A(Z)} Y(Z)$$

n’est pas toujours stable. C’est en particulier le cas pour les modèles à phase maximale dont les zéros sont à l’extérieur du cercle unité et dont l’inverse est instable. La solution stable pour blanchir le signal dans ce cas consiste à inverser  $A(Z^{-1})$  plutôt que  $A(Z)$  :

$$\hat{X}(Z) = \frac{1}{A(Z^{-1})} Y(Z)$$

Cette solution assure en effet le blanchiment du signal :

$$\hat{X}(Z).\hat{X}(Z^{-1}) = \frac{A(Z)}{A(Z^{-1})} \frac{A(Z^{-1})}{A(Z)} X(Z).X(Z^{-1})$$

Cette observation permet de déterminer la solution stable dans le cas d’un modèle MA quelconque. En effet, un tel modèle peut toujours se décomposer en une partie à phase minimale et une autre à phase maximale :

$$A(Z) = A_{MIN}(Z).A_{MAX}(Z)$$

La solution stable pour blanchir le signal est alors :

$$\hat{X}(Z) = \frac{1}{A_{MIN}(Z).A_{MAX}(Z^{-1})} Y(Z)$$

#### Modèle d’ordre 2 :

Les coefficients du modèle à phase minimale,

$$A_{MIN}(Z) = 1 + 0,9.Z^{-1} + 0,7.Z^{-2}$$

utilisé comme exemple précédemment, sont parfaitement identifiés par l’algorithme d’identification MA.

Ces coefficients sont aussi parfaitement identifiés dans le cas du modèle à phase maximale suivant :

$$A_{MAX}(Z) = 1 + 1,285.Z^{-1} + 1,428.Z^{-2}$$

qui n’est autre que  $\frac{1}{0,7}.Z^{-2}.A_{MIN}(Z^{-1})$

### 6 Conclusion

Au terme de cette étude, un algorithme d’identification ARMA, dérivé de l’algorithme de l’anti-treillis a été présenté. Cet algorithme présente d’excellentes performances aussi bien en termes de convergence que de stabilité ainsi qu’un coût de calcul extrêmement réduit. Il permet d’identifier de façon directe et adaptative les paramètres d’un modèle ARMA à phase minimale. Dans le cas d’un modèle ARMA quelconque l’algorithme identifie les paramètres du modèle équivalent à phase minimale. Cette propriété très intéressante permet d’envisager son application dans le domaine de l’égalaion.

### Références

[1] L. Ljung, M. Morf and D.D. Falconer, *Fast Calculation of Gain Matrices for Recursive Estimation Schemes*, Int. J. of Control, Vol 27, N°1, 1978, 1-19.

- [2] L. Ljung, *Analysis of Recursive Stochastic Algorithms*, IEEE AC, Vol 22, N°4, August 1977, 551-575.
- [3] F. Ling and G. Proakis, *Numerical Accuracy and Stability : Two Problems of Adaptive Estimation Algorithms Caused by Round-off Error*, Proc ICASSP 84, San Diego, 1984, paper 30.3.1.
- [4] P. Fabre and C. Guegen, *Fast recursive least-squares algorithms : preventing divergence*, Proc ICASSP 85, Tampa 1985, .
- [5] J.L. Botto and G. V. Moustakides, *Stabilizing the Fast Kalman Algorithms*, IEEE trans on ASSP, Vol 37, N°9, September 1989 .
- [6] D. Slock and T. Kailath, *Numerically Stable Fast Transversal Filters for Recursive Least Squares Adaptive Filtering*, IEEE trans on SP, Vol 39, N°1, January 1991 .
- [7] M. Morf, A. Vieira, and D.T. Lee, *Ladder forms for identification and speech processing*, Proc IEEE Conf. Decision Contr., Dec 1977, 1074-1078.
- [8] M.G. Bellanger and P.A. Regalia, *The FLS-QR algorithm for adaptive filtering : The case of multichannel signals*, Signal Processing, Vol 22, 1991, 115-126.
- [9] L. Féty, M. Terré and M. Bellanger, *Fast Anti-Lattice Algorithm*, Proc EUSIPCO, Edimbourg, Sept 1994, 1257-1260.
- [10] J. J. Shynk, *Adaptive IIR Filtering*, IEEE ASSP Magazine April 1989 4-21.
- [11] L. Féty, M. Terré, *Identification adaptative des paramètres d'un modèle MA au moyen de l'algorithme de l'anti-treillis*, Quinzième colloque GRETSI, Juan les Pins, Sept 1995.

$$e_{f_1}(t) = y(t)$$

$$\gamma_{f_1}(t) = 1$$

$$e_{b_1}(t) = e_1(t-1)$$

$$e'_{b_1}(t) = e'_1(t-1)$$

pour  $m$  allant de 1 à  $p$

$$e'_{f_{m+1}}(t) = e_{f_m}(t) - c_m^T(t-1).e_m(t-1)$$

$$\gamma'_{f_{m+1}}(t) = \gamma_{f_m}(t) - \frac{\gamma_m^2(t-1).e_m(t-1).e_m^T(t-1)}{\alpha_m(t-1)}$$

$$\alpha'_{m+1}(t) = \lambda.\alpha'_{m+1}(t-1) + \gamma'_{f_{m+1}}(t).e'_{m+1}(t).e_{m+1}^T(t)$$

$$c_m(t) = c_m(t-1) + \frac{\gamma_m(t-1).e_m(t-1).e_{f_{m+1}}^T(t)}{\alpha_m(t-1)}$$

$$e_{f_{m+1}}(t) = e'_{f_{m+1}}(t) - c_m^T(t-1).e'_m(t-1)$$

$$\gamma_{f_{m+1}}(t) = \gamma'_{f_{m+1}}(t) - \frac{\gamma_m^2(t-1).e'_m(t-1).e_m^T(t-1)}{\alpha'_m(t-1)}$$

$$c'_m(t) = c'_m(t-1) + \frac{\gamma_m(t-1).e'_m(t-1).e_{f_{m+1}}^T(t)}{\alpha'_m(t-1)}$$

$$e_m(t) = e_{m+1}(t-1)$$

$$e''_m(t) = e'_{m+1}(t-1) + h_m(t-1).e_{b_m}(t)$$

$$\text{avec } e'_{p+1}(t-1) = \delta(t).y(t)$$

$$\gamma''_m(t) = \gamma'_{m+1}(t-1) + \frac{\gamma_{b_m}^2(t).e_{b_m}(t).e_{b_m}^T(t)}{\alpha_{p_m}(t)}$$

$$\text{avec } \gamma'_{p+1}(t-1) = \gamma_{f_{p+1}}(t) - \frac{\gamma_{f_{p+1}}^2(t).e_{f_{p+1}}(t).e_{f_{p+1}}^T(t)}{\alpha_{p+1}(t)}$$

$$\alpha''_m(t) = \lambda.\alpha''_m(t-1) + \gamma''_m(t).e''_m(t).e_m^T(t)$$

$$h_m(t) = h_m(t-1) + \frac{\gamma_{b_m}(t).e'_{m+1}(t-1).e_{b_m}^T(t)}{\alpha_{b_m}(t)}$$

$$e_{b_{m+1}}(t) = e_{b_m}(t) - g_m^T(t-1).e''_m(t)$$

$$\gamma_{b_{m+1}}(t) = \gamma_{b_m}(t) - \frac{\gamma_m^2(t).e''_m(t).e_m^T(t)}{\alpha_{m-1}(t)}$$

$$\text{avec } \gamma_{b_1}(t) = \gamma_1(t-1)$$

$$\alpha_{b_{m+1}}(t) = \lambda.\alpha_{b_{m+1}}(t-1) + \gamma_{b_{m+1}}(t).e_{b_{m+1}}(t).e_{b_{m+1}}^T(t)$$

$$g_m(t) = g_m(t-1) + \frac{\gamma_m(t).e''_m(t).e_{b_{m+1}}^T(t)}{\alpha'_m(t)}$$

$$e'_m(t) = e''_m(t) + h'_m(t-1).e'_{b_p}(t)$$

$$\gamma'_m(t) = \gamma''_m(t) + \frac{\gamma_{b_m}^2(t).e'_{b_m}(t).e_{b_m}^T(t)}{\alpha_{b_m}(t)}$$

$$\alpha'_m(t) = \lambda.\alpha'_m(t-1) + \gamma'_m(t).e'_m(t).e_m^T(t)$$

$$h'_m(t) = h'_m(t-1) + \frac{\gamma_{b_m}(t).e''_m(t).e_{b_m}^T(t)}{\alpha_{b_m}(t)}$$

$$e'_{b_{m+1}}(t) = e'_{b_m}(t) - g_m^T(t-1).e'_m(t)$$

$$\gamma'_{b_{m+1}}(t) = \gamma'_{b_m}(t) - \frac{\gamma_m^2(t).e'_m(t).e_m^T(t)}{\alpha_{m-1}(t)}$$

$$\text{avec } \gamma'_{b_1}(t) = \gamma_1(t-1)$$

$$\alpha'_{b_{m+1}}(t) = \lambda.\alpha'_{b_{m+1}}(t-1) + \gamma'_{b_{m+1}}(t).e'_{b_{m+1}}(t).e_{b_{m+1}}^T(t)$$

$$g'_m(t) = g'_m(t-1) + \frac{\gamma_m(t).e'_m(t).e_{b_{m+1}}^T(t)}{\alpha'_m(t)}$$

TAB. 3 — ARMA Adaptatif