

Synthèse itérative et simultanée de bancs de filtres bi-orthogonaux de reconstruction parfaite avec des critères adaptés aux applications de codage de la parole et de l'image.

Mohammed NAFATI*. Pierre DUHAMEL**.

*Université Paris Sud. URA 1491, Bat 446, 91405 Orsay Cedex. France

**ENST 46 rue Barrault. 75013 PARIS. France

RÉSUMÉ

La synthèse de bancs de filtres bi-orthogonaux connaît une multitude de méthodes, la plus connue revient, comme dans le cas orthogonal, à construire le filtre produit, et à en extraire les filtres bi-orthogonaux par factorisation. Cette méthode permet difficilement d'imposer à la fois aux filtres d'analyses et de synthèse les caractéristiques fréquentielles souhaitées. Les deux filtres sont élaborés en optimisant l'un, en fonction de l'autre donné. Très vite, on s'aperçoit que cette méthode peut fournir des solutions, dont on ne maîtrise pas l'allure fréquentielle.

La méthode proposée est centrée sur la synthèse simultanée de bancs de filtres bi-orthogonaux, à partir de l'équation de reconstruction parfaite (RP), exprimée dans le domaine temporel dans le cas d'un système de deux sous-bandes, ceci en utilisant des critères adaptés au signal parole et image tels que la décorrélation et le gain de codage.

1 Introduction

Les bancs de filtres ont connu un développement important depuis 1970, essentiellement dans des opérations de codage. Différentes approches ont été proposées pour la synthèse de bancs de filtres QMF (Quadratur Mirror Filter) de reconstruction parfaite ou quasi-parfaite [2][6,7].

Cet article expose une méthode itérative performante de synthèse de bancs de filtres bi-orthogonaux. Les réponses impulsionnelles des filtres pass-bas d'analyse et de synthèse h_0 et g_0 (de longueur N et M avec $M \geq N$), sont synthétisées simultanément en se basant sur la division du nombre de contraintes de reconstruction parfaite (RP) en deux catégories ; cette idée a été introduite par T. Blu pour synthétiser des bancs de filtres à facteur de décimation rationnel [1]. La division des contraintes de RP conduit donc, à un système sous dimensionné offrant la possibilité d'utiliser des critères d'optimisation à l'analyse comme à la synthèse, et par conséquent, de mieux adapter le banc de filtres à l'application. En utilisant le principe de la projection sur l'espace nul, principe utilisé par Xu et Antoniou [7] pour obtenir des bancs de filtres QMF de reconstruction parfaite, on peut obtenir des solutions composées chacune d'une solution particulière et d'une solution homogène ; dans le cas d'un signal autorégressif d'ordre 1. La solution particulière sert uniquement de point de départ et elle est choisie arbitrairement. Les parties additionnelles appartenant au noyau sont choisies selon des critères d'optimisation tels la décorrélation et le gain de codage [3,4,5][7]. Pour étudier et analyser la méthode

ABSTRACT

The design of bi-orthogonal filter banks have been known a multitude of methods, the most known as in the orthogonal case consist to construct the filter product, and to deduce bi-orthogonal complement filter. To obtain these last is an arduous task, and this method does not allow to design easily analysis and synthesis filters with desirable frequencies characteristic. The two filters are elaborated by optimizing one according to the other given filter. Very rapidly, one see that this method can provide solutions whose one does not master the frequency shape.

The proposed method is centered on the design of the simultaneous bi-orthogonal filter banks. Our propose iterative design process divides the perfected reconstruction (PR) constraints expressed in the temporal domain in the case of two sub-bands system. This design uses criteria adapted to the signal such that the cross-correlation and coding gain.

proposée, on utilise aussi le critère de sélectivité qui consiste à minimiser et/ou maximiser l'énergie respectivement dans la bande affaiblie (BA) et la bande passante (BP). On donnera les résultats dans le cas de la BA seule, BP seule, BP et BA. Puis on donne dans le cas bi-orthogonal les expressions théoriques des critères de décorrélation (J_d) et du gain de codage (J_c). Ce dernier suppose que le bruit de quantification est un bruit blanc et nécessite une hypothèse sur les normes de h_0 et g_0 pour que le critère soit quadratique par rapport aux filtres recherchés. Les résultats de la synthèse, la valeur de la corrélation (C) et du gain de codage (G_c) seront donnés dans le cas où les critères J_d et J_c sont utilisés seuls ou bien ensemble. L'ensemble de ces résultats est testé sur des signaux AR 1 fortement corrélés.

2 Principe de la méthode de synthèse

Dans un système d'analyse/synthèse (A/S) de deux sous bandes, la relation entre la sortie x et l'entrée du système est donnée par :

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z) \text{ avec } T(z) = 1/2 (H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)) \quad (1)$$

$T(z)$ représente la fonction de transfert du système A/S, tandis que $A(z)$ représente le recouvrement spectral. $H_0(z)$ et $G_0(z)$ sont les réponses en fréquence des deux filtres pass-bas prototypes d'analyse et de synthèse. Le recouvrement spectral est annulé en choisissant la propriété QMF, c'est à dire les relations suivantes :

$$G_0(z) = H_1(-z) \quad G_1(z) = -H_0(-z) \quad (2)$$

Avec $H_1(z)$ et $G_1(z)$ sont les filtres pass-haut, ces dernières relations sont équivalentes à :

$$h_1 = Jg_0 \quad g_1 = J'h_0 \quad (3)$$

où J et J' sont les matrices de modulation données par :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1^{M/2-1} \end{bmatrix} \quad J' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1^{N/2-1} \end{bmatrix}$$

Si on impose au système (A/S) d'être un système à retard pur, c'est à dire la contrainte suivante : $T(z) = z^{-k_d}$, alors la reconstruction est parfaite si $\hat{X}(z) = z^{-k_d} X(z)$ où k_d est un retard pur. Nous supposons que h_0 et g_0 sont symétriques de longueurs N , M pairs et que $M+N$ est multiple de 4, dans ces conditions on montre que le retard k_d est tel que $k_d = (M+N)/4$.

Dans le domaine temporel, la contrainte du retard pur conduit à l'équation matricielle de reconstruction parfaite :

$$Hg_0 = m \quad (4)$$

où $m = [0, 0, \dots, 1]^T \in R^{(M+N)/4 \times 1}$

et $g_0 = [g_0(0), g_0(1), \dots, g_0(M/2-1)]^T$

$$H = 2[b_1 + b_M \quad b_2 + b_{M-1} \quad \dots \quad b_{M/2} + b_{(M/2)+1}]$$

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_M] = \begin{bmatrix} h_0(1) & h_0(0) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h_0(3) & h_0(2) & \dots & h_0(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0(N-1) & & \dots & h_0(0) & \dots & 0 \\ 0 & h_0(N-1) & \dots & h_0(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

L'équation (4) peut s'exprimer en fonction de la matrice G (composée des coefficients du vecteur g_0) et du vecteur h_0 telle que : $Gh_0 = m$.

La méthode proposée par Blu [1] fonctionne en partitionnant les contraintes ci-dessus en deux sous-ensembles dont l'union doit former l'ensemble des contraintes.

Dans un système (A/S) à deux sous bandes utilisant un banc de filtres QMF à phase linéaire, la synthèse simultanée de h_0^k et g_0^k à l'itération k consiste à résoudre les systèmes suivants :

$$H_1^{k-1} g_0^k = m_1 \quad G_2^k h_0^k = m_2 \quad (5)$$

avec

$$H_1^{k-1} = \begin{bmatrix} H^{k-1}(1:L, 1: \frac{M}{2}) \\ H^{k-1}(\frac{M+N}{4}, 1: \frac{M}{2}) \end{bmatrix} \quad G_2^k = \begin{bmatrix} G^k(1+L: \frac{M+N}{4} - 1, 1: \frac{N}{2}) \\ G^k(\frac{M+N}{4}, 1: \frac{N}{2}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

où

$$m_1 = [0, 0, \dots, 1] \in R^{L+1 \times 1} \quad \text{et} \quad m_2 = [0, 0, \dots, 1] \in R^{(M+N)/4 - L - 1 \times 1}$$

H_1^{k-1} est calculée à partir de h_0^{k-1} , G_2^k à partir de g_0^k . L est paramètre ajustable suivant qu'on veut accorder plus de

contraintes à la synthèse de h_0 ou g_0 . Les matrices H_1^{k-1} et G_2^k sont rectangulaires, donc conduisant à un système d'équations linéaires sous dimensionné. De ce fait, g_0^k et h_0^{k-1} , filtre-solutions sont composés d'une solution particulière et d'une autre homogène. La première est obtenue par la résolution des équations (5), la seconde en utilisant l'approche de la projection sur l'espace nul [7], en décomposant en valeur singulière la matrice H_1 telle que $H_1^{k-1} = U \Sigma V^T$, on peut écrire le filtre-solution g_0^k sous la forme suivante :

$$g_0^k = S_c + V\phi \quad \text{avec} \quad S_c = H_1^{k-1+} m_1 \quad (7)$$

H_1^{k-1+} étant la matrice pseudo inverse de H_1^{k-1} . S_c est la solution particulière, $V\phi$ appartient au noyau de la matrice, V projette le vecteur ϕ sur l'espace nul, par conséquent, $H_1 V \phi = 0$. Ce vecteur calculé à partir des critères d'optimisation permet d'adapter le filtre à l'application. Pour la synthèse du filtre d'analyse et de synthèse, on a adopté respectivement la décorrélation et le gain de codage comme critère, on a utilisé également le critère de la sélectivité afin de comparer les résultats avec ceux des autres critères.

2 Algorithme de synthèse simultanée

Itération 1 :

- Synthèse par une méthode conventionnelle de h_0^0 .
- Construction de la matrice H_1^0 . Calcul de g_0^1 à partir du système $H_1^0 g_0^1 = m_1$ en minimisant le critère choisi.
- Calcul de h_0^1 à partir du système $G_2^1 h_0^1 = m_2$ en minimisant le critère spécifié.

Itération k :

- Construction de la matrice H_1^{k-1} à partir de h_0^{k-1} et, calcul de g_0^k à partir du système $H_1^{k-1} g_0^k = m_1$ par minimisation du critère donné.
- Idem pour h_0^k , calculé à partir du système $G_2^k h_0^k = m_2$ et en minimisant le critère donné.
- Mise à jour h_0^k et g_0^k suivant les équations suivantes : $g_0^k = w g_0^k + (1-w) g_0^{k-1}$ et $h_0^k = w h_0^k + (1-w) h_0^{k-1}$ où w représente un poids de pondération.
- Vérification du critère de convergence suivant : $|h_0^k - h_0^{k-1}| < \epsilon$ et $|g_0^k - g_0^{k-1}| < \epsilon$

ϵ : paramètre de convergence du processus itératif.

Si ce critère est vérifié, on arrête le processus car l'ensemble des contraintes est maintenant simultanément vérifié, sinon on reboucle à partir de l'itération k .

3 Critère de sélectivité

Ce critère consiste à minimiser l'erreur E_s dans la bande affaiblie (BA) et l'erreur E_p dans la bande passante (BP). L'optimisation est donc fonction de deux paramètres très

sensibles qui sont la fréquence de coupure et la largeur de la zone de transition. L'erreur totale E à minimiser (pour synthétiser g_0) est donnée par la formule suivante :

$$E = \alpha \cdot \int_0^{f_p} |G_0(f) - M_{G_0}|^2 df + \beta \cdot \int_{f_s}^1 |G_0(f)|^2 df \quad (8)$$

où M_{G_0} représente le module de G_0 ; α et β sont des coefficients de pondération et d'ajustement des bandes BA et BP. f_p étant la limite supérieure de la bande passante; f_s étant la limite inférieure de la bande affaiblie.

La figure suivante indique les résultats de la synthèse pour un banc de filtres de tailles égales 24, pour une zone de transition Δf égale 0.1 et pour $f_p = 0.26$. Le paramètre de convergence du processus itératif est fixé à 10^{-6} ; le poids de pondération w intervenant dans la formule de mise à jour des filtres est fixé à 0.5.

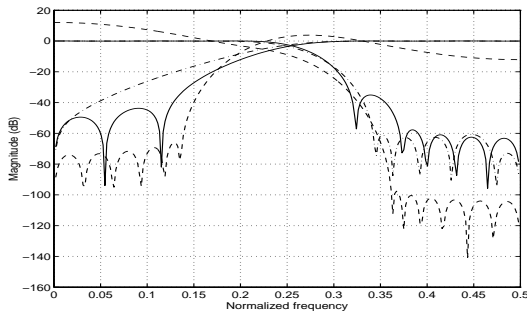


Figure 1 : Réponses en fréquence des filtres pass-bas (à gauche) et pass-haut (à droite). Ils sont synthétisés suivant le critère de sélectivité faisant intervenir la bande passante et affaiblie (—), la bande passante seule (-.-.-), la bande affaiblie seule (- - -).

Afin d'éviter la distorsion de la bande passante et d'avoir une bande affaiblie présentant des oscillations, il faut considérer les deux bandes durant l'optimisation. Pour éviter des oscillations dans la zone de transition, la fréquence de coupure $f_c = (f_p - f_s)/2$ doit être prise à partir de 0.26. On a constaté également une amélioration de la vitesse de convergence lorsque on considère les deux bandes.

4 Critère de décorrélation

Pour des applications de codage, toute décomposition quelle qu'elle soit, doit fournir une décorrélation efficace des coefficients transformés afin de diminuer au maximum les redondances du signal. Cette intercorrélacion entre les échantillons de sortie des signaux sous-bandes v_i ($0 \leq i \leq 1$), basse et haute fréquence au niveau du module d'analyse, est donnée par la relation suivante $C_{0,1}(m) = E[v_0(n)v_1(n+m)]$, et doit être minimisée pour réduire au mieux cette corrélation.

Pour évaluer l'intercorrélacion totale sur la décomposition, il faut sommer toutes les composantes sur m et sur chacune des sous bandes. Comme dans la littérature, nous utiliserons sa mesure d'une manière simplifiée sur une cellule. Par conséquent, on propose de minimiser le critère suivant :

$$J_d = \sqrt{\sum_m C_{0,1}(m)^T C_{0,1}(m)} \quad \text{avec } C_{0,1}(m) = h_0^T R_c(m) J g_0 \quad (9)$$

R_c est la matrice de corrélation du signal d'entrée supposé obéissant à un processus autorégressif d'ordre 1 dont le facteur de corrélation est ρ .

La minimisation du critère est une optimisation sous contrainte utilisant les multiplicateurs de Lagrange. La contrainte utilisée porte sur la norme du filtre à synthétiser; ceci afin d'orienter la convergence vers des solutions dont la forme est acceptable et d'éviter le glissement vers d'autres oscillatoires.

Pour synthétiser g_0 , on minimise la fonction Lagrangienne suivante :

$$J_d^2(\phi, \lambda) = \sum_m (h_0^T R_c(m) J g_0)^T (h_0^T R_c(m) J g_0) + \lambda (\|g_0\|^2 - k) \quad (10)$$

$$\text{avec } g_0 = S_c + V\phi \quad S_c = H^+ m$$

5 Critère du gain de codage

Ce critère, qui est utilisé de plus en plus dans des applications de codage correspond à une mesure de compacité de l'énergie dans les sous-bandes. Il est défini comme le rapport d'énergie de l'erreur entre le codage PCM (Pulse Code Modulation) d'une source et le codage après transformation quelconque, qui est dans notre cas un filtrage en sous-bandes.

En utilisant le même nombre de bits, le gain de codage G_c est défini comme le rapport de la variance du bruit de quantification pour un signal codé en pleine bande $\sigma_{e_{PCM}}$, sur la variance du même signal codé en sous-bandes $\sigma_{e_{SBC}}$.

La variance du bruit de quantification est donnée par l'expression suivante : $C \sigma_x^2 2^{-2R}$. Elle dépend donc du débit binaire R , nécessaire pour la transmission de l'information, de la variance du signal d'entrée σ_x et d'un terme C qui tient compte des propriétés statistiques du signal.

La variance $\sigma_{e_{SBC}}$ du bruit de reconstruction dans le cas d'un système (A/S) utilisant des bancs de filtres bi-orthogonaux, et dans l'hypothèse où le bruit d'entrée des sous-bandes est blanc, stationnaire et non corrélé par rapport à lui même et au signal d'entrée, peut s'écrire :

$$\sigma_{e_{SBC1}} = C 2^{-2R} \sigma_x^2 \|g_0\| \|h_0\| \sqrt{h_0^T R_{xx} h_0} \sqrt{g_0^T J R_{xx} J g_0} \quad (11)$$

R_{xx} est la matrice de d'autocorrélacion du signal d'entrée. Cette expression est optimale par rapport à l'allocation du débit binaire R , et assure donc une meilleure répartition des débits R_1 et R_2 entre les deux sous-bandes tel que $(R_1 + R_2)/2 = R$. Par conséquent, le gain de codage s'écrit de la manière suivante :

$$G_c^{-1} = \|g_0\| \|h_0\| \sqrt{h_0^T R_{xx} h_0} \sqrt{g_0^T J R_{xx} J g_0} \quad (12)$$

Maximiser le gain de codage revient, à minimiser cette expression $\|g_0\| \|h_0\| \sqrt{h_0^T R_{xx} h_0} \sqrt{g_0^T J R_{xx} J g_0}$, qui n'est pas linéaire par rapport à h_0 et g_0 , et donc par rapport au filtre à synthétiser. Pour rendre cette expression quadratique on utilisera respectivement les contraintes suivantes :

$\|g_0\|^2 \|h_0\|^2 g_0^T J R_{xx} J g = Cste$ et $\|g_0\|^2 \|h_0\|^2 h_0^T R_{xx} h_0 = Cste$ pour synthétiser h_0 et g_0 . Le critère du gain de codage à minimiser est :

$$J_G^2(\phi, \lambda) = g_0^T J R_{xx} J_c g_0 + \lambda (\|h_0\|^2 \|g_0\|^2 (h_0^T R_{xx} h_0) - Cste) \quad (13)$$

6 Exemples de synthèse avec les critères du gain de codage et de décorrélation

La figure suivante donne les résultats de la synthèse pour un banc de filtres de tailles égales 24 avec les critères de décorrélation et du gain de codage. Les paramètres ϵ et w ont les mêmes valeurs que dans le cas du critère de sélectivité. Le signal d'entrée est autoregressif d'ordre 1 avec un facteur de corrélation égal à 0.9.

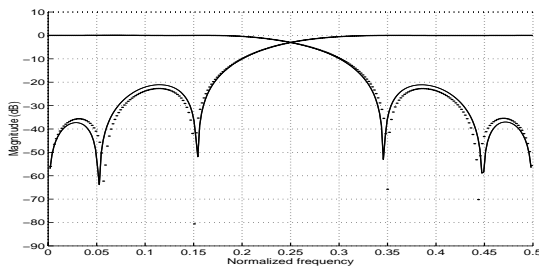


Figure 2 : Réponses en fréquence des filtres pass-bas (à gauche) et pass-haut (à droite) synthétisés suivant le critère de **décorrélation** (...) et du **gain de codage** (—).

Les filtres obtenus à l'itération 200 sont de reconstruction parfaite et donnent à un gain de codage de 4.3647 avec le critère de décorrélation, de 4.3635 avec celui du gain de codage. Les corrélations mesurées sont de $4.8434 \cdot 10^{-5}$ dans le premier cas et 0.0005 dans le 2^{ème} cas.

Toujours dans les mêmes conditions, on synthétise g_0 suivant le critère du gain de codage et h_0 suivant le critère de la décorrélation (cas_1), ensuite on inverse les critères (cas_2), celui de la décorrélation pour obtenir g_0 , le gain de codage pour obtenir h_0 (figure 3). Le tableau suivant donne la corrélation, le gain de codage dans les deux cas et dans celui du critère de la sélectivité.

Critères	BP+BA	Cas_1	Cas_2
G_c	4.4166	4.3536	4.3465
C	0.0028	$6.6797 \cdot 10^{-5}$	0.0051

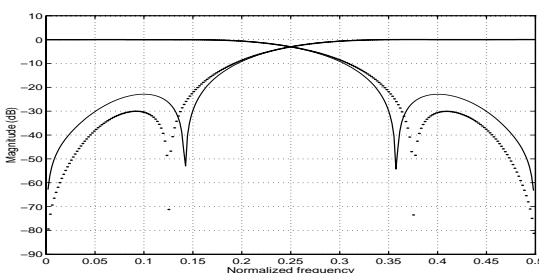


Figure 3 : Réponses en fréquence des filtres pass-bas et pass-haut synthétisés suivant le critère de **décorrélation+gain de codage** (—), **gain de codage+ décorrélation** (....).

Les filtres obtenus sont de reconstruction parfaite, le gain de codage et la corrélation sont meilleurs dans le cas où les critères J_d et J_g sont respectivement utilisés pour synthétiser h et g .

7 Conclusion

La technique proposée présente l'avantage d'une souplesse importante, combinée à l'optimisation simultanée de h_0 et g_0 elle divise le nombre de contraintes de reconstruction parfaite en deux sous-ensembles. D'autre part combinée à l'utilisation de la projection sur l'espace nul, elle permet d'utiliser des critères d'optimisation adaptés au signal. Les bancs de filtres obtenus uniquement avec les critères tels que la décorrélation et le gain de codage ont une forme "satisfaisante", à savoir composés d'une bande passante et d'une bande affaiblie ; ceci sans le recours au critère de la sélectivité. Avec ces critères, les filtres passe-bas et passe-haut d'analyse sont symétriques et oscillent dans la BA ; dans le cas du gain de codage, les oscillations décroissent plus vite que dans le cas du critère de décorrélation, mais les recouvrements sont plus importants. Les solutions obtenues dépendent cependant du filtre initial. La convergence avec des critères hautement non linéaires (décorrélation, gain de codage) est parfois difficile à atteindre. Le critère de sélectivité, lui, a toujours permis des convergences rapides. Globalement, on ne peut pas conclure sur l'unicité des solutions.

8 Références

- [1] T. Blu. Banc de filtres itérés en fraction d'octave. Application au codage de son. Thèse pour obtenir le grade de docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications. Avril 1996.
- [2] H. Le Bihan, P. Siohan, O. Rioul and P. Duhamel. Une méthode simple de calcul de bancs de filtres/ondelettes biorthogonales. Quatorzième Colloque GRETSI - Juan-Les-Pins, pp. 443-44, 13-16 Septembre 1993.
- [3] H. Caglar, Y. Liu, A. N. Akansu. Statistical Optimized PR-QMF Design. Proc. SPIE Visual Communication and Image Processing, pp. 86-94, Nov. 1991.
- [4] J. Katto, Y. Yasada. Performace Evaluation of Subband Coding and Optimization of its Filter Coefficients. Proc. SPIE Visual Communication and Image Processing, pp. 95-106, Nov. 1991.
- [5] A. Mertins. Statistical optimization PR-QMF banks and wavelets. ICASSP 94, vol. 3, 19-22 April 1994, pp.113-116.
- [6] P. P. Vaidyanathan. Orthonormal and Biorthonormal Filter Banks as Convolvers, and Convolutional Coding Gain. IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 41, no. 6, pp. 2010-212, June 1993.
- [7] H. Xu, W.-S. Lu and Antoniou. Design of Perfect Reconstruction QMF Banks by A Null-Space Projection Method. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, vol. 2, pp. 965-968, April 30 - May 3, 1995.