Signaux ordonnés et trispectre

Bernard Picinbono

Laboratoire des Signaux et Systèmes, UMR 14 CNRS-Supélec-Université de Paris-Sud
Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif sur Yvette, France

RÉSUMÉ

Les signaux ordonnés sont des signaux pour lesquels l'expression explicite des moments d'ordre quatre nécessite que les instants soient placés dans un ordre croissant. L'exemple le plus connu est celui du basculeur poissonnien et beaucoup d'autres sont présentés. Le calcul du trispectre est difficile à cause de l'ordonnancement des instants et on présente la procédure permettant d'obtenir des expressions explicites. Elles montrent que de nombreux signaux ordonnés ont une densité normale sur les multiplicités normales et la contribution non-normale est analysée, ce qui permet d'introduire une discussion sur les relations avec le théorème de la limite centrale, la réversibilité et l'ergodisme.

ABSTRACT

Ordered signals are signals for which the explicit expression of their fourth-order moments requires that the four time instants are put in an increasing order. The best example is the random telegraph signal and many other are presented. The calculation of the trispectrum is difficult because of this necessity of ordering. By an appropriate grouping of various terms, its explicit expression is obtained. This expression shows that many ordered signals present a normal density on the normal manifolds of the frequency domain and another contribution on the stationary manifold that is explicitly calculated and discussed. Its relationship with central limit theorem, ergodicity and time reversibility is presented.

1 Introduction

Pour des raisons de calcul et de commodité d'emploi, les applications pratiques des statistiques d'ordre supérieur à deux se limitent aux moments d'ordres trois ou quatre. Les transformées de Fourier (TF) de ces moments introduisent ce qu'on appelle le bispectre ou le trispectre. Le spectre traditionnel, qu'il faudrait qualifier de monospectre, correspond à la TF de la fonction de corrélation qui est un moment d'ordre deux. Ces spectres peuvent se calculer autant pour les moments que les cumulants et on se limite ici aux spectres de moments.

Si l'on veut comparer des résultats expérimentaux à des formules théoriques, il est nécessaire de disposer d'expressions explicites du bispectre ou du trispectre. Pour des raisons de symétrie le bispectre est souvent nul, et tous les exemples présentés ci-après possèdent cette propriété, de sorte que ce qui suit concerne essentiellement le trispectre. On possède des expressions explicites du trispectre principalement dans deux cas. Le premier concerne les signaux gaussiens pour lesquels les statistiques de tous ordres sont parfaitement connues. Mais, à vrai dire, ce cas manque d'intérêt car les statistiques d'ordre supérieur ont en général pour but de s'appliquer à des si-gnaux non-gaussiens. Le second cas concerne les signaux obtenus par filtrage linéaire d'un bruit blanc non-gaussien dont les moments d'ordre quatre sont connus. Les formules de filtrage permettent alors facilement de calculer le trispectre de sortie en fonction de celui, connu, de l'entrée. Mais cette modélisation, qui est une simple extension de ce qui est bien connu dans le cas du second ordre, est loin de pouvoir s'appliquer dans tous les cas. On sait en effet que toute densité spectrale peut se modéliser comme obtenue par filtrage d'un bruit blanc dans un filtre dont la réponse en fréquence est directement liée à cette densité. Cette propriété n'a plus aucune raison d'être vraie pour le trispectre [1] et les signaux ordonnés étudiés dans la suite sont précisément dans ce cas.

Rappelons tout d'abord que le trispectre d'un signal aléatoire $x(t)$ stationnaire et centré est lié à la TF du moment du quatrième ordre

$$m_4(\{t_i\}) = m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = E[x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)] . \quad (1)$$

En vertu de la stationnarité la TF $M_4(\{\nu_i\})$ de ce moment est nulle en dehors de la multiplicité stationnaire $\sum \nu_i = 0$ et peut donc s'écrire

$$M_4(\{\nu_i\}) = \Gamma_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\, \delta(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) . \quad (2)$$

Cette expression définit le *trispectre* $\Gamma(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ de $x(t)$.

2 Signaux ordonnés

Il s'agit de signaux pour lesquels l'expression explicite des moments d'ordre 4 nécessite au préalable que les instants t_i apparaissant dans (1) soient classés dans un ordre croissant. L'exemple le plus connu est celui du basculeur poissonnien (voir [2] p. 168) déduit d'un processus de Poisson de densité λ. Son moment d'ordre 4 vaut

$$m_4(\{t_i\}) = \gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3) . \quad (3)$$

Dans cette équation les instants θ_i satisfont $\theta_i \leqslant \theta_{i+1}$ et $\gamma(\tau)$ est la fonction de corrélation qui vaut $\exp(-2\lambda|\tau|)$.

Le basculeur poissonnien n'est pas le seul signal possédant cette propriété d'ordonnancement des moments d'ordre 4 et nous allons en donner quelques autres exemples analysés plus en détail dans [3]. La description des systèmes soumis à des changements abrupts et imprévisibles se fait souvent à l'aide d'un signal aléatoire $x(t)$ déduit de la manière suivante d'un processus de Poisson. À chaque instant p_i du processus ponctuel on associe une variable aléatoire (VA) V_i et $x(t)$ vaut V_i dans l'intervalle $p_i \leqslant t < p_{i+1}$. On a donc un signal qui est constant entre deux points du processus ponctuel et subit des changements aléatoires à chacun de ces points. Si la VA V_i ne prend que les valeurs ± 1 les trajectoires de ce signal ressemblent à celles du basculeur poissonnien. Si l'on suppose que les VA V_i sont IID et indépendantes du processus de Poisson le moment d'ordre 4 de $x(t)$ est donné par

$$m_4(\{t_i\}) = \gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3) + (m_4 - m_2^2)e^{-\lambda(\theta_4-\theta_1)} \,. \tag{4}$$

Dans cette expression m_2 et m_4 sont les moments d'ordre 2 et 4 communs à toutes les VA V_i et $\gamma(\tau)$ est encore la fonction de corrélation qui vaut $m_2 \exp(-\lambda|\tau|)$. On peut noter que le coefficient apparaissant avant le dernier terme est la variance de la VA V_i^2 et si cette variance est nulle on retrouve l'expression correspondant au basculeur poissonnien avec une densité deux fois plus faible. Ceci est naturel. En effet l'hypothèse sur la variance implique que V_i ne prend que les valeurs $\pm\sqrt{m_2}$ et en raison de l'indépendance des V_i il y a en moyenne deux fois plus de changements de signe que dans le basculeur poissonnien. Ce qui apparaît clairement dans ces exemples est la nécessité de classer les instants t_i en ordre croissant et ceci provient du fait que les calculs se font à partir d'un processus de Poisson qui introduit cet ordonnancement.

Mais les signaux ordonnés ne sont pas intrinsèquement liés aux processus de Poisson. Si l'on analyse l'origine de la propriété d'ordonnancement on constate qu'elle provient essentiellement du fait que les processus de Poisson ont des accroissements indépendants. On peut donc s'attendre à retrouver l'ordonnancement avec tout autre processus de ce type. Le premier exemple qui vient alors à l'esprit est évidemment celui du mouvement brownien et l'on va donner un exemple très utilisé de signal ordonné qu'il permet de construire. Dans l'étude de la stabilité des oscillateurs on est conduit à introduire le modèle de signal complexe de la forme

$$z(t) = \exp\{j[\omega_0 t + \Phi(t) + \Phi]\}, \tag{5}$$

où ω_0 est la fréquence angulaire moyenne, Φ une phase équipartie entre 0 et 2π qui assure la stationnarité et $\Phi(t)$ une phase aléatoire qui évolue comme un mouvement brownien. La fonction de corrélation de ce signal est donnée par

$$\gamma(\tau) = \exp(j\omega_0\tau)\exp[-(1/2)c|\tau|], \tag{6}$$

où c est la constante de diffusion du mouvement brownien. Si $c << \omega_0$ cette fonction tend à devenir asymptotiquement un signal analytique, et il en est donc de même pour $z(t)$. Ce modèle a été introduit par de nombreux auteurs, en particulier dans l'étude de la largeur de raie des signaux optiques émis par des lasers monomodes [4].

Il est facile de voir qu'en raison de la phase équipartie, $z(t)$ possède la propriété de circularité et on déduit de la propriété d'accroissements indépendants du mouvement brownien que le seul moment du quatrième ordre non nul est $m_4(\{t_i\}) = E[z(\theta_2)z^*(\theta_1)z(\theta_4)z^*(\theta_3)]$ qui vaut

$$m_4(\{t_i\}) = \gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3), \tag{7}$$

où les $\{\theta_i\}$ sont la permutation ordonnée des $\{t_i\}$ caractérisée par $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$.

Il convient de noter que le moment du quatrième ordre (3) possède une symétrie et reste invariant si l'on permute θ_1 et θ_2 ou θ_3 et θ_4 ou encore les paires formées des deux premiers et des deux derniers instants. Il n'en est plus tout à fait de même pour (7) en raison du passage au complexe conjugué par inversion du temps. Seules les paires peuvent être permutées pour laisser invariant $m_4(\{t_i\})$.

3 Calcul du trispectre

Il s'agit maintenant de calculer le moment spectral $M_4(\{\nu_i\})$ TF de $m_4(\{t_i\})$ et défini par

$$\begin{aligned} M_4(\{\nu_i\}) = &\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} m_4(\{t_i\}) \\ &\times \exp[-2\pi j(\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \nu_3 t_3 + \nu_4 t_4)] \\ &dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \,. \end{aligned} \tag{8}$$

Pour ceci on va commencer par le calcul de la TF des moments du type (3) ou (7). L'idée consiste à calculer les contributions à (8) des $4! = 24$ domaines correspondant à toutes les permutations des t_i. Pour ceci on associe à toute permutation des t_i la même permutation des fréquences ν_i ce qui laisse invariante l'exponentielle apparaissant dans (8). Dans ces permutations les t_i et les ν_i se transforment respectivement en θ_i et μ_i. La contribution du domaine où les θ_i sont classés dans l'ordre croissant vaut donc

$$\begin{aligned} I(\{\mu_i\}) = &\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta_1 \int_{\theta_1}^{+\infty} d\theta_2 \int_{\theta_2}^{+\infty} d\theta_3 \int_{\theta_3}^{+\infty} d\theta_4 \\ &\times\gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3) \\ &\times \exp[-2\pi j(\mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3 + \mu_4\theta_4)] \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Soit alors $\Gamma_+(\nu)$ la fonction définie par

$$\Gamma_+(\nu) = \int_0^{\infty} \gamma(\tau)e^{-2\pi j\nu\tau}d\tau \,. \tag{10}$$

Il s'agit de la TF monolatérale de $\gamma(\tau)$ qui est une fonction réelle et paire. On en déduit que

$$\Gamma_+(\nu) = \Gamma_+^*(-\nu) \quad , \quad \Gamma_+(\nu) + \Gamma_+(-\nu) = \Gamma(\nu) \tag{11}$$

qui est la densité spectrale du signal, TF de la fonction de corrélation $\gamma(\tau)$. En calculant les quatre intégrales se présentant dans (9) on obtient l'expression

$$\begin{aligned} I(\{\mu_i\}) = &\Gamma_+(\mu_4)U(\mu_3 + \mu_4) \\ &\times\Gamma_+(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)\delta(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4), \end{aligned} \tag{12}$$

où $U(.)$ est la TF de l'échelon unité $u(t)$. Cette TF est une distribution qui s'écrit

$$U(\nu) = (1/2)[\delta(\nu) + V(\nu)] \,, \tag{13}$$

où $\delta(.)$ est la distribution de Dirac et $V(.)$ la distribution en valeur principale $1/\pi j\nu$, TF du signal signe de t. Il convient de noter que cette distribution est une fonction impaire de ν.

Cette étape accomplie il faut maintenant regrouper les termes correspondant aux 24 permutations pour obtenir une expression complète du trispectre. Comme (12) dépend linéairement de $U(.)$, on peut traiter séparément le cas des termes contenant la distribution de Dirac et ceux associés à la fonction $V(\nu)$.

Les termes associées à la distribution de Dirac sont de la forme générale

$$T_\delta = (1/2)\Gamma_+(\mu_2)\Gamma_+(\mu_4)\delta(\mu_1+\mu_2)\delta(\mu_3+\mu_4). \quad (14)$$

On voit qu'ils sont nuls s'il n'y a pas un couplage par paires des fréquences. Ceci caractérise les *multiplicités normales* de l'espace des fréquences (voir p. 115 de [2]). Il reste donc à déterminer la densité sur ces multiplicités. Pour ceci prenons-en une particulière, soit $\nu_1+\nu_2=0$, $\nu_3+\nu_4=0$. Les quatre permutations des quatre fréquences ν_i obtenues en permutant ν_1 et ν_2 ainsi que ν_3 et ν_4 donnent le terme

$$T_{(1,2)(3,4)} = (1/2)[\Gamma_+(\nu_1)+\Gamma_+(-\nu_1)] \times[\Gamma_+(\nu_3)+\Gamma_+(-\nu_3)] = (1/2)\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_3). \quad (15)$$

Il faut ajouter à ce terme celui provenant de la permutation du couple (1,2) et du couple (3,4) qui donne la même valeur de sorte que le facteur 1/2 disparaît et la densité sur la première multiplicité normale vaut $\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_3)$. Il s'agit d'une *densité normale* (voir p. 115 de [2]). Comme le calcul peut être répété pour les deux autres multiplicités normales on en déduit que le trispectre possède une densité normale sur les multiplicités normales de l'espace des fréquences. Cette propriété joue un rôle très important pour de nombreuses questions analysées dans la suite.

À ce stade on peut noter que si l'on avait utilisé le trispectre des cumulants au lieu de celui des moments on aurait trouvé une contribution nulle sur les multiplicités normales puisque l'on sait que les cumulants d'ordre 4 s'obtiennent en retirant la partie normale des moments du même ordre. Il convient de noter que cette propriété n'est plus vraie pour des ordres supérieurs qui ne sont pas envisagés ici. En conséquence le caractère non-normal du basculeur poissonnien provient à l'ordre 4 uniquement de la contribution de la multiplicité stationnaire que l'on va maintenant évaluer.

Pour ceci il faut étudier les contributions liées à la valeur principale. En éliminant la fréquence μ_4 qui sur la multiplicité stationnaire se déduit des trois autres on peut mettre le terme générique associé à V sous la forme

$$T_V = -(1/2)\Gamma_+(-\mu_1)V(\mu_1+\mu_2) \times\Gamma_+(-\mu_1-\mu_2-\mu_3)\delta(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4). \quad (16)$$

Les 24 permutations des fréquences ν_i conduisent à 24 termes de ce genre qui peuvent être convenablement regroupés et l'on arrive finalement à une densité sur la multiplicité stationnaire égale à

$$F_S(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = V(\nu_1+\nu_2)M(\nu_1,\nu_2,\nu_3) +V(\nu_1+\nu_3)M(\nu_1,\nu_3,\nu_2)+V(\nu_2+\nu_3)M(\nu_2,\nu_3,\nu_1) \quad (17)$$

avec

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2\mathrm{Im}\{[\Gamma_+(\nu_1)+\Gamma_+(\nu_2)] \times[\Gamma_+(-\nu_3)+\Gamma_+(\nu_1+\nu_2+\nu_3)]\}. \quad (18)$$

On va voir que, contrairement à l'apparence liée à l'existence des fonctions $V(.)$, ce terme reste en général borné. En effet la fonction $V(\nu) = 1/(\pi j\nu)$ ne devient infinie que pour $\nu=0$. En conséquence (17) ne peut devenir infinie qu'au voisinage des multiplicités normales introduisant un couplage des fréquences par paires. Si l'on suppose $\nu_1+\nu_2=0$, ce qui entraîne $\nu_3+\nu_4=0$, puisque l'on est sur la multiplicité stationnaire, on voit que $M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ tend vers 0 car le terme dont on prend la partie imaginaire vaut $\Gamma(\nu_2)\Gamma(\nu_3)$. Or il s'agit d'un produit de densités spectrales qui sont réelles et la partie imaginaire est donc nulle. La quantité $F_S(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ représente le trispectre des cumulants dont on a donc donné l'expression explicite et qui a la propriété d'être borné.

On ne reproduit pas ici, faute de place, le calcul explicite des trispectres provenant des autres modèles de signaux ordonnés évoqués ci-dessus. Indiquons simplement leurs propriétés principales. Prenons par exemple le cas du moment donné par (4). Le trispectre lié au premier terme est celui qui vient d'être analysé et il reste donc à calculer la TF du dernier terme de (4). Appelant $L_+(\nu)$ la TF monolatérale de $\exp[-\lambda|\tau|]$ qui vaut évidemment $[\lambda+2\pi j\nu]^{-1}$, le terme comparable à (12) dans le calcul de la TF vaut

$$J(\{\mu_i\}) = L_+(\mu_4)L_+(\mu_3+\mu_4) \times L_+(\mu_2+\mu_3+\mu_4)\delta(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4). \quad (19)$$

On voit immédiatement qu'il s'agit d'un terme qui reste borné sur la multiplicité stationnaire et n'apporte donc aucune contribution sur les multiplicités normales.

En conclusion on voit que pour tous les signaux ordonnés présentés ici le trispectre de cumulants est nul sur les multiplicités normales et borné sur la multiplicité stationnaire.

Il convient de noter que les résultats qui viennent d'être présentés sont valables pour le trispectre et ne peuvent être étendus directement pour les spectres d'ordre plus élevé. On retrouve ici une situation connue pour les cumulants : ils s'obtiennent en retranchant des moments d'ordre 4 les termes normaux, mais cette propriété n'est plus vraie pour les ordres supérieurs. Le calcul des moments spectraux d'ordres supérieurs à 4 est parfaitement possible mais son interprétation nécessite l'usage de propriétés plus fines des distributions en valeurs principales qui ne peuvent être analysées ici.

4 Discussion et conséquences

4.1 Processus de Poisson composés

On peut reprendre les mêmes problèmes dans le cas de processus de Poisson composés. Ceux-ci apparaissent dans de nombreux problèmes physiques, et en particulier en optique statistique [4] pour décrire la distribution des photoélectrons liés à l'absorption de photons dans un champ électromagnétique aléatoire. Le modèle le plus simple de processus de Poisson composé est celui d'un processus de Poisson dont la densité λ serait une variable aléatoire Λ (voir p. 178 de [2]) . Tous les moments calculés précédemment doivent alors être considérés comme des moments conditionnels et la conséquence fondamentale qui en résulte est la disparition de la densité normale sur les multiplicités normales. En conséquence le trispectre des cumulants ne s'annule pas sur les multiplicités normales.

4.2 Ergodisme

On sait que l'ergodisme est l'étude des relations existant entre les moyennes d'ensemble sur lesquelles la plupart des calculs sont effectués et les moyennes temporelles qui sont les plus accessibles expérimentalement. L'ergodisme au sens faible est lié à la convergence en moyenne quadratique des secondes vers les premières lorsque le temps d'intégration croît indéfiniment. Ce type d'ergodisme peut être analysé dans le temps mais il est connu que son interprétation physique est beaucoup plus simple dans le domaine des fréquences car la moyenne temporelle peut être interprétée comme un filtrage sélectif (c'est à dire à largeur de bande tendant vers 0) autour de la fréquence nulle. En particulier l'ergodisme au sens faible pour la mesure de la moyenne d'un signal stationnaire est assuré si la densité spectrale ne possède pas de raie à la fréquence 0. On peut étendre ce résultat pour l'ergodisme du se-cond ordre concernant la détermination expérimentale de la fonction de corrélation [5]. Il apparaît alors que, moyennant quelques hypothèses très générales, cet ergodisme est assuré si le trispectre des moments possède une densité normale sur les multiplicités normales et reste borné sur la multiplicité stationnaire. C'est ce qui se produit pour les signaux ordonnés analysés ci-dessus à l'exception du cas où le processus ponctuel est de Poisson composé. On peut donc dire que les signaux ordonnés générés par un processus de Poisson pur sont ergodiques faibles du second ordre et que cette propriété disparaît dans le cas d'un processus de Poisson composé. Ce dernier point n'a rien d'étonnant, car comme le processus dépend d'une VA qui est sa densité, quantité indépendante du temps, les moyennes temporelles faites à partir d'une réalisation de cette VA ne ne peuvent fournir des renseignements sur la moyenne d'ensemble.

4.3 Tendance vers la normalité

Comme on vient de l'indiquer, le filtre moyenneur temporel est un filtre sélectif à largeur de bande tendant vers 0 autour de la fréquence nulle qui conserve la moyenne du signal. Mais ce filtrage peut se faire autour de toute autre fréquence et l'on sait que, sous certaines conditions, le signal filtré tend à devenir normal lorsque la bande de fréquence tend vers 0. Il s'agit d'une version en terme de signaux et systèmes du théorème de la limite centrale bien connu dans l'addition des VA. Les conditions assurant cette propriété, tout au moins à l'ordre 4, sont précisément celles trouvées précédemment, à savoir l'existence d'une densité normale sur les multiplicités normales. Ceci provient du fait connu que tout filtrage sélectif autour d'une fréquence quelconque a pour effet d'isoler les multiplicités normales. On peut donc dire que, hormis le cas des processus de Poisson composé, les signaux ordonnés analysés ci-dessus possèdent la propriété de normalité asymptotique par filtrage sélectif.

4.4 Réversibilité et ropriété de Markov

Un signal $x(t)$ est dit réversible si ses propriété statistiques sont invariantes par renversement du sens du temps, c'est à dire si l'on change t en $-t$. En terme de trispectre cette propriété se traduit par la relation $\Gamma_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \Gamma_3(-\nu_1, -\nu_2, -\nu_3)$. On peut montrer que les signaux réversibles et dont la réversibilté se conserve dans tout filtrage linéaire doivent avoir un trispectre nul en dehors des multiplicités normales (voir en particulier [6]). Il est alors clair que les signaux ordonnés ne sont pas réversibles, et dans une certaine mesure ce résultat était attendu, car la réversibilité est presque la propriété opposée de l'ordonnancement.

Par contre l'ordonnancement a de fortes relations avec la propriété de Markov. Il est évident que le basculeur poissonnien est un processus de Markov, puisque tout le passé du signal se réduit à la valeur présente en raison de l'indépendance des accroissements d'un processus de Poisson. Il en est de même pour le signal rendant compte du bruit de phase d'un oscillateur. Toutefois la relation n'est pas absolue et nécessite une étude plus approfondie. En effet on sait que tout signal normal de fonction de corrélation exponentielle est un processus de Markov, et un tel signal n'est pas un signal ordonné.

Références

[1] P. Bondon, P.L. Combettes and B. Picinbono, *Volterra filtering and higher order whiteness*, IEEE Trans. Sign. Proc., 43, pp. 2209-2212, 1995.

[2] B. Picinbono, Signaux aléatoires, tome 2, Fonctions aléatoires et modèles, Dunod Université, Paris, 1994.

[3] B. Picinbono, *Trispectrum of ordered signals*, Rapport interne L2S.

[4] R.J. Glauber, *Optical coherence and photon statistics*, Quantum optics and electronics, Gordon Breach, 1965.

[5] B. Picinbono, *Ergodicity and fourth-order moments*, à paraître dans IEEE Trans. Inf. Theory, 1997.

[6] A. Blanc-Lapierre, *Les fonctions aléatoires réversibles*, C.R. Acad. Sciences, 251, pp. 1957-1959, 1960.