

# Comparaison de deux Méthodes de Restauration d'Images: Application à l'astronomie.

Edgard Sekko<sup>(1)</sup> Abdelhane Boukrouche<sup>(1)</sup> Gérard Thomas<sup>(2)</sup> et Patrick Sarri<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés L.A.G.E.P,  
U.P.R.E.S.-A C.N.R.S. Q 5007 Université Claude Bernard Lyon I,  
Bat. 308 G, 43 Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France

<sup>(2)</sup> Ecole Centrale de Lyon, Département MIS, BP 163  
69131 Ecully cedex, France

## RÉSUMÉ

Dans ce papier nous proposons une modification de la méthode de déconvolution dite de régularisation du type Tikhonov-Miller [2]. Cette nouvelle approche plus robuste repose sur deux paramètres de régularisation résultant de la combinaison du filtrage optimale et de la procédure de déconvolution de Tikhonov-Miller. Nous avons appliqué la technique proposée à la restauration d'images prises par le Telescope Spatial Hubble.

## ABSTRACT

This paper deals the technique of deconvolution using the optimal filtering of a measured signal. It is based on two parameters of regularization resulting in the combination of optimal filtering and the Tikhonov-Miller [2] deconvolution procedure. We applied the proposed technique to restore a blurred image received from the Hubble Space Telescope.

## 1 Introduction

### 1.1 Position du problème.

La figure suivante illustre la procédure de convolution

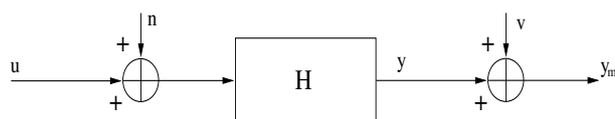


Fig.1.

$u$  : signal d'entrée  
 $y_m$  : Signal mesuré  
 $n$  : bruit d'entrée gaussien de variance  $\sigma_1$ .  
 $v$  : bruit de sortie gaussien de variance  $\sigma_2$ .  
 $H$  : transformée de Fourier de  $h$   
 $h$  : Point Spread Function (PSF) du processus de distorsion.

Nous avons :

$$y_m = y + v$$

avec

$$y = h * [u + n]$$

\* désigne l'opérateur de convolution

Le problème consiste à déterminer le signal  $u$  à partir du signal enregistré  $y_m$  et diverses informations connues sur le système de dégradation.

### 1.2 Régularisation de Tikhonov-Miller

L'utilisation de la technique de Tikhonov-Miller dans le cas stationnaire pour la déconvolution conduit à la configuration suivante.

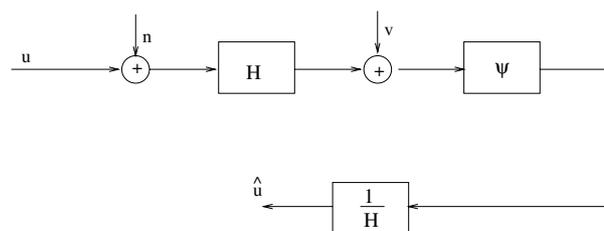


Fig.2.

avec

$$\psi = \frac{|H|^2}{|H|^2 + \frac{S_v}{S_u + S_n}}$$

$S_v$ ,  $S_u$ , et  $S_n$  sont les densités spectrales des signaux  $v$ ,  $u$ , et  $n$  supposés stationnaires d'ordre deux et non corrélés.

La démarche exposée ci-dessus suppose une hypothèse forte sur le signal à restaurer. A savoir, ce dernier doit être un processus aléatoire d'ordre deux dont on connaît la densité spectrale. D'autre part sa robustesse est éprouvée (voir application) en présence du bruit inévitable sur le signal enregistré. Nous proposons une approche nouvelle, robuste qui s'affranchit de toute hypothèse d'ordre statistique sur le signal à restaurer.

## 2 L'approche proposée

La plupart des procédures de déconvolution se font en deux étapes, une étape de filtrage utilisée pour réduire le bruit de mesure sur le signal enregistré, et ensuite une technique de déconvolution pour restaurer le signal originel. La technique développée dans ce papier intègre le filtrage optimal dans l'algorithme de déconvolution.

- Première étape :

Nous recherchons une estimée  $\hat{y}$  de  $y$  telle que :

$E(\hat{y} - y)^2$  soit minimum.

Avec :

$$\hat{y} = f * y_m + g * u \quad (1)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux filtres à déterminer

Nous montrons que :

$$\begin{cases} F = \frac{|H|^2}{|H|^2 + \frac{S_v}{S_n}} \\ G = H(1 - F) \end{cases} \quad (2)$$

où  $S_n$  et  $S_v$  sont respectivement les densités spectrales des signaux  $n$  et  $v$  ;  $F$  et  $G$  les transformées de Fourier de  $f$ , et  $g$ . L'équation (1) devient :

$$\hat{y} = f * [y_m - h * u] + h * u$$

Ce qui conduit à la configuration suivante :

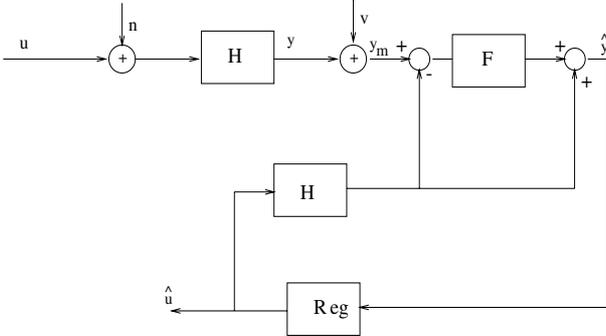


Fig.3.

Reg désigne le filtre inverse (régularisant).

- Deuxième étape :

A présent, le problème est de chercher la valeur optimale du signal d'entrée  $u$ .

On a

$$\hat{y} - h * u = f * y_m - f * h * u \quad (3)$$

$\hat{y}$  étant la meilleure estimée de  $y$  au sens de l'erreur quadratique moyenne, on a :

$$\|\hat{y} - h * u\|_2^2 \leq \|y_m - h * u\|_2^2 \quad (4)$$

or

$$y_m - h * u = y_m - y + y - h * u = v + h * n$$

(4) devient

$$\|\hat{y} - h * u\|_2^2 \leq \|v + h * n\|_2^2 = \varepsilon^2 \quad (5)$$

avec (3) et (5) on obtient :

$$\|f * y_m - f * h * u\|_2^2 \leq \varepsilon^2$$

On propose de déterminer  $u$  tel que :

$$\begin{cases} \|f * y_m - f * h * u\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \\ \|u\|_2^2 \leq \beta^2 \end{cases} \quad (6)$$

où  $\beta$  est une constante prédéfinie.

L'estimée de  $u$  qui résulte de l'intersection des deux ensembles décrits par (6) est donnée par la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$J = \|f * y_m - f * h * u\|_2^2 + \alpha \|u\|_2^2$$

avec  $\alpha = (\frac{\varepsilon}{\beta})^2$

La solution optimale  $\hat{u}_\alpha$  est donnée [1] par :

$$(\alpha + (f * h)^* * (f * h)) * \hat{u}_\alpha = (f * h)^* * f * y_m$$

$(f * h)^*$  étant le conjugué de  $(f * h)$

Dans le domaine de Fourier, on écrit :

$$(\alpha + (F.H)^*.(F.H)).\hat{U}_\alpha = (F.H)^*.F.Y_m \quad (7)$$

$F$ ,  $Y_m$  et  $\hat{U}_\alpha$  sont les transformées de Fourier de  $f$ ,  $y_m$  et  $\hat{u}_\alpha$  respectivement, et  $(F.H)^*$  désigne le conjugué de  $(F.H)$

L'équation (7) s'écrit :

$$Y_\alpha = R_\alpha.\hat{U}_\alpha \quad (8)$$

où

$$Y_\alpha = (F.H)^*.F.Y_m \text{ et } R_\alpha = \alpha + (F.H)^*.(F.H)$$

Pour résoudre (8), qui représente une forme bien connue, on utilise une méthode itérative quelconque [6], [4].

## 3 Application

Pour illustrer les performances de la technique proposée, nous appliquons les deux méthodes évoquées à la restauration d'une image dégradée de Saturne. On a utilisé la méthode itérative de Singh [4] pour déterminer  $\hat{U}_\alpha$ .

$$\begin{cases} \hat{U}_{\alpha,0} & = Y_\alpha \\ B_0 & = 1 - R_\alpha \\ \hat{U}_{\alpha,k+1} & = (1 + B_k).\hat{U}_{\alpha,k} \\ B_{k+1} & = B_k^2 \end{cases}$$

## Résultat avec la méthode de Tikhonov - Miller

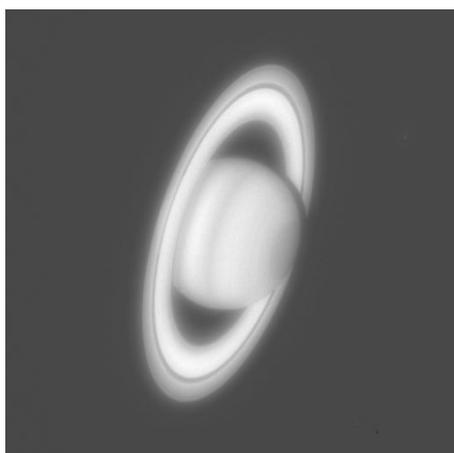
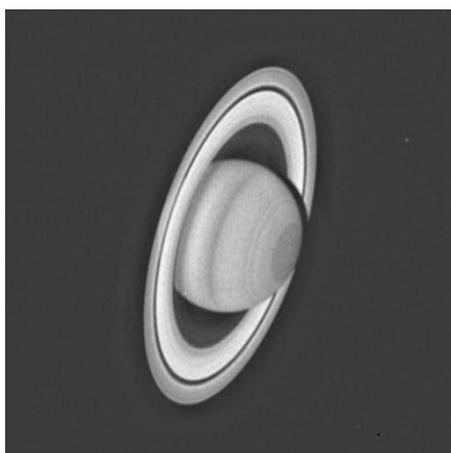
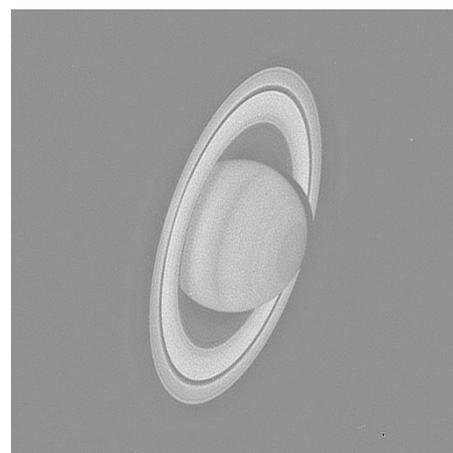


Image Dégradée

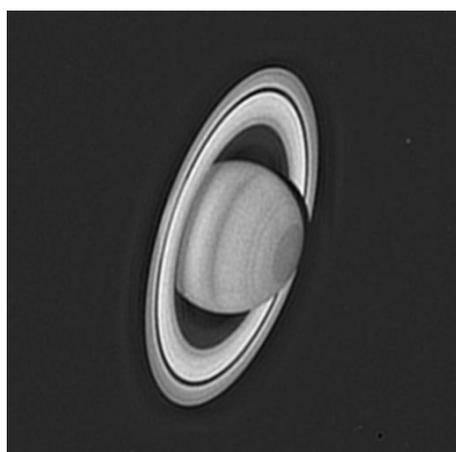


Restauration après 6 itérations

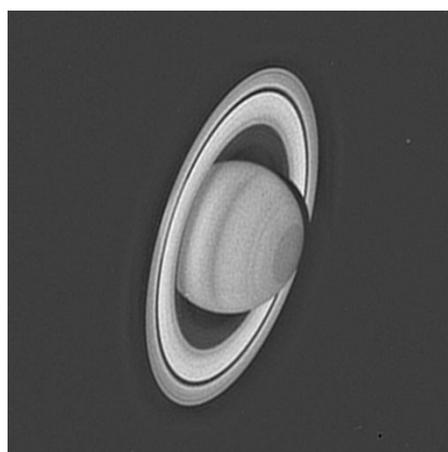


après 10 itérations

## Résultat avec la méthode proposée



Restauration après 20 itérations



après 200 itérations

## 4 Conclusion

On remarque que les images restaurées par la méthode de Tikhonov-Miller se dégradent au delà d'un certain nombre d'itérations. Ce phénomène est surmonté par l'approche proposée. Il apparaît clairement que l'intégration du filtrage optimal dans la déconvolution améliore la robustesse de la technique de Tikhonov-Miller. Des travaux sont en cours pour la recherche des valeurs optimales de  $\alpha$  et du coefficient  $\frac{S_v}{S_n}$  inconnu.

## Références

- [1] BADEVA V., MOROZOV V. *Problèmes Incorrectement Posés, Théorie et Applications*. Masson, 1991.
- [2] L. REGINALD, J. BIEMOND, D.E. BOEKEE. Regularized Iterative Image Restoration With Ringing Reduction.

*IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(12), 1988.

- [3] SEKKO E., SARRI P., THOMAS G. Robust Constrained Deconvolution. *Proceeding IEEE ICASSP'96*, 11(1) :1-11, 1986.
- [4] SINGH S., TANDON S.N. An Iterative Restoration Technique. *Signal Processing*, 11(1) :1-11, 1986.
- [5] TIKHONOV A.N., ARSEININ V.Y. *Solution of III- Posed Problems*. New York : Halsted, 1977.
- [6] VAN CITTERT P.H. Zum Ein Flub der Spaltbreite auf die Intensitaet-Werteilong in spectrallinien. *Z.Furphys*, 69 :298-308, 1931.
- [7] WOODS J.W., RADEWAN C.H. Kalman Filtering in two Dimensions. *IEEE Trans.Inf. Theory*, pages 473-482, 1977.