

Algorithmes multirésolution régularisés pour la restauration des images astronomiques

Yves Bobichon et Albert Bijaoui

Observatoire de la Côte d'Azur
Dpt CERGA UMR CNRS 6527
Boulevard de l'observatoire
B.P. 4229, 06304 Nice Cedex 4 - France

RÉSUMÉ

Nous présentons une méthode régularisée pour l'extraction des coefficients d'ondelettes significatifs dans le cadre de l'algorithme multirésolution de Mallat. En imagerie astronomique les méthodes de filtrage par ondelettes consistent à éliminer les coefficients non significatifs en les forçant à zéro. Avec une transformée en ondelettes non redondante des artefacts peuvent alors apparaître lorsque les seuils sont élevés. En introduisant une contrainte de régularisation de Tikhonov multirésolution afin de restaurer les coefficients seuillés, on montre qu'il est possible de supprimer les effets de bloc introduit par les méthodes de filtrage et de compression basées sur la transformée de Haar. Une version régularisée de l'algorithme *hcompress* est présentée. On montre comment cette méthode permet de stabiliser l'algorithme de déconvolution de Richardson-Lucy et l'on présente un algorithme de compression régularisé par la fonction d'étalement (PSF) où sont couplés le filtrage, la compression et la déconvolution dans un cadre multirésolution.

ABSTRACT

We present a regularized method for the extraction of significant wavelet coefficients in a multiresolution framework. For astronomical applications, classical wavelet-based methods perform a standard thresholding by setting to zero the non-significant coefficients. With non redundant multiresolution transforms, artifacts caused by the spectral recovering appear for high-level thresholding. We propose to introduce a regularization constraint that allows one to give a new values for each non-significant coefficients. We show that a multiresolution Tikhonov constraint allows one to remove the blocking effect when using filtering or compression methods based on the Haar transform. A regularized compression algorithm based on the *hcompress* scheme is presented. In a final application we show how the regularization constraint can be used to stabilize the Richardson-Lucy deconvolution algorithm. We present a regularized compression scheme that includes the point spread function (PSF) as an additional constraint for the restoration of images compressed with algorithms based on a multiresolution transform.

1 Introduction

Nous présentons une méthode régularisée pour l'extraction des coefficients d'ondelettes significatifs dans le cadre de l'algorithme multirésolution de Mallat [10]. Une première application montre comment l'utilisation d'une contrainte de Tikhonov [13] permet de supprimer les effets de bloc lors de l'utilisation de méthodes de filtrage et de compression d'images basées sur la transformée de Haar [6]. Ceci est illustré par une application à la restauration des images compressées par *hcompress* [14], et une version régularisée de cet algorithme est présentée. Une dernière application montre comment l'algorithme multirésolution régularisé peut être utilisé pour stabiliser l'algorithme de déconvolution de Richardson-Lucy [12].

2 Filtrage multirésolution

On considère le cas d'un signal à une dimension pour simplifier la présentation des algorithmes. Mais ceux ci, tout comme l'algorithme multirésolution sont facilement étendus à deux dimensions par séparation des variables. Soit c^0 le signal à traiter et c^j l'approximation de c^0 à une résolution donnée j .

En accord avec la théorie de la multirésolution on peut calculer l'approximation et le signal détail à la résolution $j + 1$ par :

$$c^{(j+1)}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c^{(j)}(l)h(l-2k) \quad (1)$$

$$w^{(j+1)}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c^{(j)}(l)g(l-2k) \quad (2)$$

Le signal original peut être exactement reconstruit par :

$$c^{(j)}(k) = 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} c^{(j+1)}(l)\tilde{h}(k-2l) + w^{(j+1)}(l)\tilde{g}(k-2l) \quad (3)$$

Si le signal est bruité, les coefficients d'ondelettes $w^{(j)}$ sont aussi bruités. En général le bruit dans les images astronomiques est approximé par une distribution gaussienne. Cependant pour des images provenant de caméra CCD un modèle de bruit poissonnien ou mixte Gauss+Poisson est mieux adapté. L'application préalable d'une transformation d'Anscombe [1] permet dans ce cas de traiter les données comme des variables aléatoires gaussiennes de variance unité. Les propriétés de linéarité de la transformation en ondelettes garantissent que le bruit reste de nature gaussienne à chaque échelle. La variance de ce bruit varie en fonction de l'échelle selon une loi qui dans le cas d'une transformée orthogonale à une dimension est telle

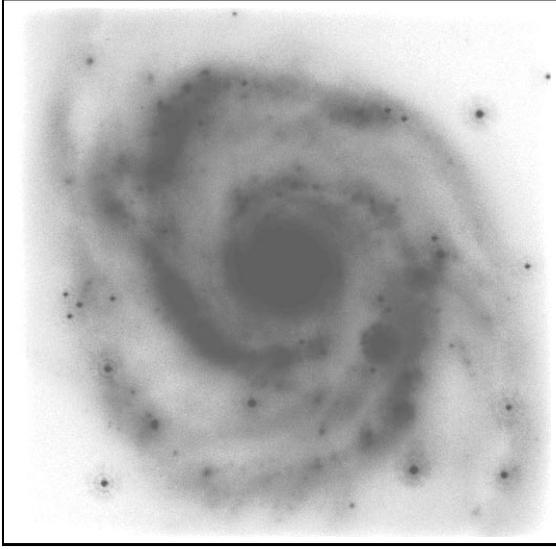
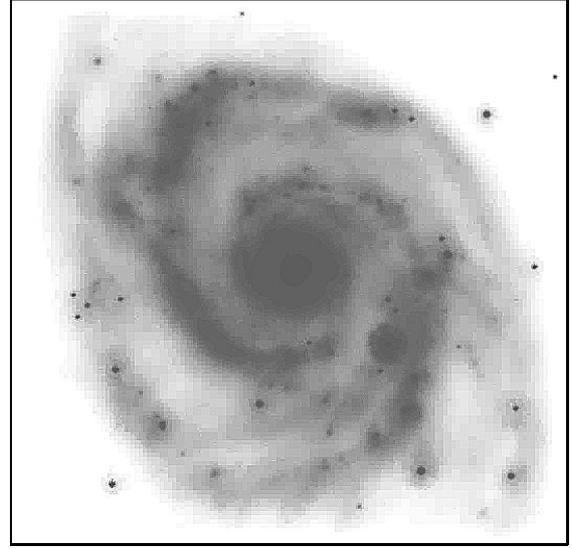


FIG. 1 — image originale

FIG. 2 — image compressée par *hcompress* TC=75 :1

que :

$$V^{(j+1)} = V^{(j)} \sum_n g^2(n) \quad (4)$$

Pour effectuer une sélection des coefficients significatifs on introduit un critère de signification statistique permettant de dire si un coefficient $w^j(k)$ est dû au bruit ou au signal. On utilise la méthodologie classique de la théorie de la décision [7]. Soit H_0 , l'hypothèse qu'à l'échelle j , le coefficient $w^j(k)$ est dû au bruit. Dans cette hypothèse il suit une certaine loi de probabilité $p^{(j)}(w)$. Le rejet de H_0 dépend de la probabilité P , qui pour un coefficient positif s'écrit :

$$P = \text{Prob}(u > w^{(j)}(k)) = \int_{w^{(j)}(k)}^{+\infty} p^{(j)}(u) du \quad (5)$$

et pour un coefficient négatif :

$$P = \text{Prob}(u < w^{(j)}(k)) = \int_{-\infty}^{w^{(j)}(k)} p^{(j)}(u) du \quad (6)$$

On fixe le seuil de décision statistique ε tel que si $P > \varepsilon$, l'hypothèse H_0 n'est pas exclue. Par contre si $P < \varepsilon$, la valeur du coefficient ne peut être considérée comme due uniquement au bruit, l'hypothèse H_0 est donc rejetée : le coefficient $w^{(j)}(k)$ est alors dit statistiquement significatif. Dans le cas gaussien la distribution des coefficients d'ondelettes $p^{(j)}(w)$ s'écrit :

$$p^{(j)}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{(j)}} \exp\left[-\frac{[w^{(j)}(k)]^2}{2\sigma^{(j)2}}\right] \quad (7)$$

En considérant la stationnarité du bruit, il suffit de comparer la valeur $w^j(k)$ à $\kappa\sigma^{(j)}$. Pour le filtrage, on choisit généralement κ entre 3 et 4, on a.

$$w^{(j)}(k) = \begin{cases} 0 & \forall |w^{(j)}| < \kappa\sigma^{(j)} \\ w^{(j)}(k) & \forall |w^{(j)}| \geq \kappa\sigma^{(j)} \end{cases} \quad (8)$$

La reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes significatifs permet d'obtenir un signal sans bruit. Cependant, lorsque κ augmente au delà de 3 ou 4 (ce qui sera le cas en compression) la suppression d'un nombre important de coefficients d'ondelettes conduit à des artéfacts qui peuvent devenir gênants.

3 Compression

En compression, la transformation en ondelettes est utilisée pour éliminer la redondance présente dans l'image. Le bruit, peu compressible, est supprimé par un seuillage des coefficients non significatifs selon la méthode présentée précédemment. La quantification permet d'éliminer les bits non significatifs et de réduire la dynamique des coefficients restants. La quantification est effectuée en arrondissant le rapport suivant :

$$q^{(j)}(k) = \frac{w^{(j)}(k)}{\kappa'\sigma^{(j)}} \quad (9)$$

Afin d'achever la compression, les coefficients quantifiés sont codés par un code 4-bits hiérarchique [8]. Ce codage considère successivement les plans de bits de la transformée en ondelette selon l'algorithme suivant :

1. Le plan de bits est divisé en 4 quadrants. Chaque quadrant contenant au moins un bit à 1 est codé 1. Un quadrant qui ne contient que des 0 est codé 0.
2. On itère l'opération précédente uniquement sur les quadrants codés 1.
3. Les opérations 1 et 2 sont effectuées tant qu'il y a des quadrants codés 1 de taille supérieure à un bit.

Ce type de codage permet d'éliminer l'uniformité de zéro. Il est particulièrement adapté à la structure d'une transformée en ondelettes seuillée qui possède des valeurs nulles sur de grandes plages. Dans le cas du filtrage, les seuils sont bas (typiquement 3 à 4σ) et les artéfacts dus au seuillage sont peu visibles. Parce qu'on seuille plus haut (5 à 6σ , voir plus), le cas de la compression est bien différent et des effets de bloc peuvent apparaître dès que le taux de compression devient supérieur à 20 :1. La figure 2 montre cet effet de bloc dans le cas de l'algorithme *hcompress* [14]. Ces blocs sont causés par la discontinuité de l'ondelettes de Haar et par la perte de l'information locale sur le gradient de l'image dû au seuillage des coefficients d'ondelettes.

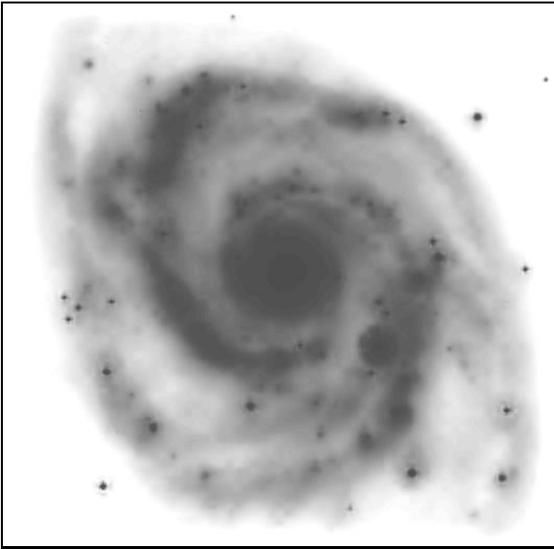


FIG. 3 — image compressée (75 :1) + régularisation

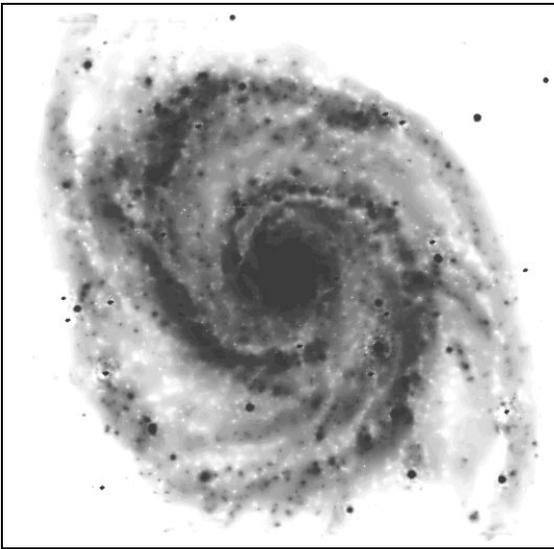


FIG. 4 — image compressée (75 :1) + régularisation + déconvolution

4 Décompression et régularisation

Nous proposons une méthode de décompression qui consiste à introduire une contrainte de régularisation lors de la décompression. Le problème de l'inversion d'une transformée en ondelette seuillée est un problème inverse mal posé au sens de Hadamard dans la mesure où il existe une infinité d'images correspondant à toutes les combinaisons possibles des valeurs que l'on peut attribuer aux coefficients seuillés. La théorie de la régularisation offre une possibilité de réduire le nombre de solutions d'un problème mal posé en introduisant une contrainte supplémentaire qui tient compte de la connaissance *a priori* que l'on a de la solution. Ainsi pour éliminer les blocs nous choisissons parmi toutes les valeurs possibles des coefficients seuillés celles qui donnent à chaque échelle l'approximation la plus régulière après inversion par la relation (3). Cette régularité est modélisée par une contrainte de Tikhonov multirésolution [13]. Si D est l'opérateur de dérivé

première, cette contrainte revient à minimiser B^j tel que :

$$B^{(j)} = (DC^{(j)})^2 \quad (10)$$

A une échelle donnée le signal reconstruit est lié aux coefficients d'ondelettes à la résolution inférieure par la relation (3) que l'on peut écrire sous la forme :

$$C^{(j)} = \tilde{H}C^{(j+1)} + \tilde{G}W^{(j+1)} \quad (11)$$

Avec cette définition la contrainte (10) devient :

$$B^{(j)} = (D(\tilde{H}C^{(j+1)} + \tilde{G}W^{(j+1)}))^2 \quad (12)$$

Il s'agit d'une contrainte convexe dont le minimum vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial W^{(j+1)}} [(D\tilde{H}C^{(j+1)} + D\tilde{G}W^{(j+1)})^2] = 0 \quad (13)$$

ce qui conduit à résoudre le système d'équations :

$$-GL\tilde{H}C^{(j+1)} = GL\tilde{G}\hat{W}^{(j+1)} \quad (14)$$

où L est l'opérateur de différence seconde (Laplacien, en deux dimensions). Le système (14) est inversé par l'algorithme de Van-Cittert [5]. Les coefficients restaurés \hat{W}^{j+1} sont alors obtenus de manière itérative par :

$$\hat{W}_{n+1}^{(j+1)} = \hat{W}_n^{(j+1)} - \alpha GL\hat{C}_n^{(j)} \quad (15)$$

α est un paramètre de convergence. A deux dimensions les résultats expérimentaux montrent que le meilleur taux de convergence est obtenu avec $\alpha = 0.2$ pour le filtre de Haar $g = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$. Des contraintes secondaires peuvent être ajoutées pour restreindre les solutions en limitant la dynamique des coefficients seuillés-restaurés à $\pm\kappa\sigma^{(j)}$ autour de zéro, et en limitant les variations des coefficients quantifiés-restaurés à $\pm\kappa'\sigma^{(j)}/2$ autour de la valeur q^j . La figure 3 montre l'effet d'une décompression régularisée selon cet algorithme sur l'image compressée par un facteur 75 :1. L'effet de bloc disparaît et des simulations montrent également que l'information qui est réinjectée dans l'image est significative [3]. Les objets astronomiques dans les images décompressées avec régularisation présentent non seulement un aspect plus lisse et plus régulier mais les précisions photométrique et astrométrique sont aussi améliorées par rapport à une décompression brute [4].

5 Déconvolution

Nous considérons ici qu'une image est caractérisée par la distribution d'intensité $I(x, y)$ correspondant à l'observation d'un objet $O(x, y)$ à travers un système optique de fonction d'étalement $P(x, y)$. En présence de bruit la relation objet/image s'écrit :

$$I(x, y) = O(x, y) \star P(x, y) + B(x, y)$$

La déconvolution permet de retrouver l'image de l'objet $O(x, y)$ à partir de l'observée $I(x, y)$. L'algorithme de Richardson-Lucy est dérivé d'une approche stochastique du problème de déconvolution. Il consiste à calculer l'objet O de manière itérative :

$$O_{n+1}(x, y) = O_n(x, y) \left[\frac{I(x, y)}{O_n(x, y) \star P(x, y)} \star P(-x, -y) \right]$$

C'est une méthode très intéressante car elle conserve le flux et la positivité de l'image mais l'algorithme tend à amplifier le

bruit. La méthode précédemment présentée est un moyen de séparer les structures significatives du bruit. Des algorithmes de déconvolution stabilisés par les structures significatives ont été développés dans le cadre de transformations en ondelettes redondantes [11]. L'itération consiste à calculer l'objet O_{n+1} en appliquant :

$$O_{n+1}(x, y) = O_n(x, y) \left[\frac{I_n(x, y) + \bar{R}_n(x, y)}{O_n(x, y) \star P(x, y)} \star P(-x, -y) \right]$$

Où $\bar{R}_n = I - I_n$ est le résidu obtenu à partir des coefficients significatifs et $I_n = P \star O_n$ est l'image à l'iteration n . Dans notre cas on utilise le résidu régularisé \hat{R}_n obtenu à partir des structures significatives issues de la décompression. L'utilisation d'un algorithme multirésolution non redondant permet le couplage avec la compression. L'introduction de la fonction d'étalement comme contrainte supplémentaire permet non seulement d'obtenir l'objet déconvolué O_n (figure 4) mais également l'image décomprimée I_n qui est encore améliorée par l'introduction de la PSF dans le processus de décompression.

6 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de compression basée sur l'extraction des coefficients d'ondelettes significatifs dans un cadre multirésolution. Cette méthode, en éliminant le bruit permet d'atteindre des taux de compression très élevés (jusqu'à 100 :1) en appliquant un algorithme de codage 4-bits sur les coefficients d'ondelettes quantifiés. Nous avons présenté un algorithme de compression basé sur le même principe que *hcompress* mais qui inclut la méthode d'extraction des coefficients significatifs ce qui permet d'obtenir une sélection optimale de l'information. Pour éviter l'effet de bloc introduit par l'utilisation de ce type d'ondelette très discontinue nous avons mis en œuvre une méthode de décompression régularisée par une contrainte de Tikhonov multirésolution. Enfin, nous avons montré, comment il est possible d'améliorer la qualité de l'image comprimée en introduisant la PSF comme contrainte supplémentaire lors de la décompression.

Références

- [1] F.J. Anscombe. The transformation of poisson, binomial and negative-binomial data. *Biometrika*, 15(246-254), 1948.
- [2] A. Bijaoui, Y. Bobichon, et L. Huang. Digital image compression in astronomy : morphology or wavelets? *Vistas in astronomy*, 40(4) :587-594, 1996.
- [3] Y. Bobichon et A. Bijaoui. Regularization constraints in lossy compressed astronomical images restoration. In *Wavelet applications in signal et image processing IV conference SPIE*, Denver (USA), 4-9 august 1996.
- [4] Y. Bobichon et A. Bijaoui. Restoration of lossy compressed astronomical images. In *IEEE Signal and image processing international conference ICIP-96*, Lausanne (Switzerland), 16-19 september 1996.

- [5] P.H. Van Cittert. *Z. Physik*, 69 :298, 1931.
- [6] A. Haar. Zür theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, 69 :331-371, 1910.
- [7] W.W. Harman. *Principles of the Statistical Theory of Communication*. McGraw-Hill, New-York, 1963. Chapter 11, p.217.
- [8] L. Huang et A. Bijaoui. Astronomical image data compression by morphological skeleton transformations. *Experimental Astronomy*, 1 :311-327, 1991.
- [9] H. Lorenz, G.M. Richter, M. Cappaccioli, et G. Longo. Adaptive filtering in astronomical image processing. *Astronomy and Astrophysics*, 277 :321-330, 1993.
- [10] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7) :674-693, July 1989.
- [11] F. Murtagh, J.L. Starck, et A. Bijaoui. Image restauration with noise suppression using the wavelet transform. *Astronomy and Astrophysics suppl. ser.*, 112 :179-189, 1995.
- [12] W. H. Richardson. Bayesian-Based Iterative Method of Image Restoration. *J. Optical society of America*, 62(1) :55-59, January 1972.
- [13] A.N. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Sov. Math. Dokl.*, 4 :1624-1627, 1963.
- [14] R.L. White, M. Postman, et M.G. Lattanzi. Compression of the guide star digitised schmidt plates. In *Proceedings of the 2nd conference on digitised sky surveys*, pages 167-175. Kluwer Academic Publishers, 1992.