

# Analyse de textures à l'aide de modèles anisotropes à longue dépendance

B. Pesquet-Popescu, P. Larzabal et H. Clergeot

L.E.Si.R – ENS Cachan, URA CNRS D1375  
61, Av. du Pr. Wilson, 94235 Cachan Cedex, France  
e-mail : [beatrice.popescu@lesir.ens-cachan.fr](mailto:beatrice.popescu@lesir.ens-cachan.fr)

## RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous introduisons des modèles discrets de textures de type “ $1/f$ ”, permettant de caractériser l'anisotropie souvent présente dans les images réelles. Ces modèles peuvent être conçus comme des équivalents 2D des processus 1D discrets ARIMA fractionnaires. Ils constituent aussi une alternative anisotrope aux bruits gaussiens fractionnaires 2D. Deux méthodes sont proposées pour identifier ces nouveaux modèles, en l'absence de bruit. Une application de l'algorithme EM est ensuite proposée pour traiter le cas où les données sont bruitées.

## ABSTRACT

In this paper, we introduce new models of “ $1/f$ ”-type for discrete textures, which take into account the anisotropy often existing in real images. These models can be seen as two-dimensional extensions of fractional ARIMA models. They are thus anisotropic alternatives to 2D fractional Gaussian noises. We propose two methods to identify these models in the absence of noise. An application of the EM algorithm is then proposed to deal with noisy data.

## 1 Introduction

Au cours de ces dernières années, la caractérisation des signaux par des modèles “en  $1/f$ ” (de type fractal ou “à longue-dépendance”) [3, 4] a suscité un intérêt de plus en plus vif. Plusieurs travaux ont notamment démontré la pertinence de la modélisation de textures à l'aide de processus de ce type et, tout particulièrement, de mouvements Browniens fractionnaires [5, 7, 8, 9]. Ces études sont cependant, pour la plupart, restreintes au cas isotrope.

Nous introduisons ici un nouveau modèle de processus anisotrope de type ARIMA 2D fractionnaire, qui prend en compte les dépendances à long terme et, en même temps, permet de mettre en évidence une direction privilégiée dans les images étudiées, quand elle existe.

En premier lieu, nous proposons une généralisation 2D anisotrope du bruit gaussien à différences fractionnaires (bGdf) [1]. Ensuite, nous présentons deux méthodes permettant la détermination des quatre paramètres de ce modèle dans le cas non bruité. Un algorithme de type EM est ensuite proposé pour l'estimation des paramètres dans le cas de mesures bruitées. L'efficacité des solutions que nous préconisons est démontrée à l'aide de simulations.

L'article est organisé comme suit : dans la deuxième partie nous présentons le modèle de bGdf anisotrope envisagé. La troisième partie est consacrée à son identification, et introduit deux approches possibles. La quatrième partie prend en compte un bruit de mesure et recourt à l'algorithme EM pour l'estimation des paramètres. La cinquième partie conclut l'article.

## 2 Un modèle de bruit Gaussien fractionnaire anisotrope

L'un des modèles les plus répandus de processus à temps continu stationnaires et à longue dépendance est le bruit gaussien fractionnaire (bGf), dont la densité spectrale de puissance est :

$$\mathcal{S}(\omega) \propto \frac{1}{|\omega|^{2d}}, \quad 0 < d < \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Le modèle discret qui lui correspond est un processus ARIMA(0,  $d$ , 0), qui s'écrit :  $(1 - q^{-1})^d u(n) = w(n)$ , où  $w(n)$  est un bruit blanc gaussien centré et l'opérateur  $q^{\pm 1}$  est défini par :  $q^{\pm 1}u(n) = u(n \pm 1)$ . Comme  $(1 - q^{-1})$  est un opérateur de dérivation discrète,  $(1 - q^{-1})^d$ , représente une dérivation discrète fractionnaire pour  $0 < d < \frac{1}{2}$ . Quand  $\omega \rightarrow 0$ , la densité spectrale de puissance du processus ARIMA(0,  $d$ , 0) tend vers celle du bGf définie en (1).

Une extension bidimensionnelle possible du bGdf [6] est un processus stationnaire isotrope de densité spectrale de puissance

$$\mathcal{S}(\omega_x, \omega_y) \propto \frac{1}{(\omega_x^2 + \omega_y^2)^{2d}}, \quad 0 < d < \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Son équivalent discret est un processus ARIMA 2D isotrope, qui est défini par :

$$\begin{aligned} \left[ (1 - q_x^{-1})(1 - q_x) + (1 - q_y^{-1})(1 - q_y) \right]^d u(n, m) \\ = w(n, m), \end{aligned} \quad (3)$$

où  $w(n, m)$  est un bruit blanc gaussien centré, de variance  $\sigma_w^2$ . Les notations  $q_x^{\pm 1}$  et  $q_y^{\pm 1}$  désignent ici les opérateurs de "décalage" suivant les directions  $x$  et  $y$  :  $q_x^{\pm 1}u(n, m) = u(n \pm 1, m)$  et  $q_y^{\pm 1}u(n, m) = u(n, m \pm 1)$ . Dans ce cas aussi, quand  $\omega_x \rightarrow 0$  et  $\omega_y \rightarrow 0$ , la densité spectrale de puissance du processus ARIMA 2D tend vers celle du bGf 2D isotrope.

En pratique, il est souvent utile de pouvoir disposer d'un modèle anisotrope. Pour cela, nous proposons de définir un bGf 2D  $u(n, m)$  à l'aide de l'équation récursive suivante :

$$D_{\alpha, \varphi}^d(q_x, q_y)u(n, m) = w(n, m). \quad (4)$$

L'opérateur  $D_{\alpha, \varphi}^d(q_x, q_y)$  réalise une dérivation fractionnaire discrète 2D, qui doit prendre en compte, de façon conjointe, les longues dépendances, l'anisotropie (par le biais d'un paramètre  $\alpha$ ) et la directionalité (paramètre  $\varphi$ ) de l'image. Une forme qui répond à ces besoins est :

$$\begin{aligned} D_{\alpha, \varphi}^d(q_x, q_y) &= \frac{1}{2^{2d}} [(1 - \alpha \cos \varphi)(1 - q_x^{-1})(1 - q_x) \\ &+ (1 + \alpha \cos \varphi)(1 - q_y^{-1})(1 - q_y) \\ &- \frac{1}{2} \alpha \sin \varphi (q_x - q_x^{-1})(q_y - q_y^{-1})] \\ &\times \left[ (1 - q_x^{-1})(1 - q_x) + (1 - q_y^{-1})(1 - q_y) \right]^{d-1}. \end{aligned}$$

La densité spectrale de puissance de  $u(n, m)$  s'écrit alors :

$$S(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sigma_w^2}{I(\omega_x, \omega_y)^{2(d-1)} A_{\alpha, \varphi}(\omega_x, \omega_y)^2}. \quad (5)$$

Cette expression de densité spectrale de puissance met en évidence une partie isotrope :

$$I(\omega_x, \omega_y) = \sin^2 \frac{\omega_x}{2} + \sin^2 \frac{\omega_y}{2},$$

et une partie anisotrope,

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \varphi}(\omega_x, \omega_y) &= (1 - \alpha \cos \varphi) \sin^2 \frac{\omega_x}{2} \\ &+ (1 + \alpha \cos \varphi) \sin^2 \frac{\omega_y}{2} + \frac{1}{2} \alpha \sin \varphi \sin \omega_x \sin \omega_y, \end{aligned}$$

qui ne dépend que de  $\alpha$  et  $\varphi$ .

Considérons le passage en coordonnées polaires

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_r \cos \omega_\theta \\ \omega_y = \omega_r \sin \omega_\theta, \end{cases}$$

où  $\omega_r \geq 0$ . Alors, pour  $\omega_r \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$\mathcal{S}(\omega_r \cos \omega_\theta, \omega_r \sin \omega_\theta) \sim \frac{2^{2d} \sigma_w^2}{\omega_r^{4d} [1 + \alpha - 2\alpha \cos^2(\omega_\theta - \frac{\varphi}{2})]^2}. \quad (6)$$

Pour que le processus défini par (4) soit à longue dépendance, il faut que sa densité spectrale de puissance diverge à la fréquence (0,0), soit  $d > 0$ . Par ailleurs, pour que l'on puisse définir sa fonction de corrélation, on doit avoir  $d < \frac{1}{2}$ . On obtient donc comme domaine de variation possible de  $d$  l'intervalle  $(0, \frac{1}{2})$ .

La forme de la densité spectrale de puissance suggère une interprétation des paramètres qui caractérisent le modèle. Le

paramètre  $\varphi/2 \in [0, \pi)$  détermine l'orientation du champ résultant. Plus précisément, la densité spectrale de puissance est maximale pour  $\omega_\theta = \varphi/2$  et, donc, la direction privilégiée dans le champ résultant est  $\varphi/2 + \pi/2$ . Le facteur  $\alpha \in [0, 1)$  caractérise la dispersion de la densité spectrale du processus autour de cette direction privilégiée et sera dénommé coefficient d'anisotropie. On remarque en particulier que pour  $\alpha = 0$  se retrouve un processus isotrope du type (3). Le paramètre de dérivation fractionnaire  $d$  va déterminer le degré de "granulosité" du champ. Plus  $d$  est proche de  $\frac{1}{2}$ , plus le champ est "lisse". En séparant de cette façon les paramètres du modèle, on peut modifier de manière indépendante l'orientation et le degré de "granulosité" de l'image.

### 3 Identification du modèle

Le modèle proposé est caractérisé par 4 paramètres :  $\sigma_w^2$ ,  $d$ ,  $\alpha$  et  $\varphi$ . Nous avons comparé deux méthodes pour les estimer.

Dans la première approche, nous avons généralisé une méthode 1D [2], qui est basée sur l'expression (5) de la densité spectrale de puissance. Un estimateur asymptotiquement non biaisé de  $\log \mathcal{S}(\omega_x, \omega_y)$  est  $\log P_n(\omega_x, \omega_y) + \gamma$  ( $\gamma \cong 0.577621$ ), où  $P_n(\omega_x, \omega_y)$  est le périodogramme de l'image  $n \times n$  observée. On est ainsi amené naturellement à rechercher les paramètres minimisant l'erreur quadratique moyenne suivante :

$$\begin{aligned} E(\sigma_w^2, d, \alpha, \varphi) &= \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} \left\{ \log P_n(\omega_k, \omega_l) + \gamma \right. \\ &\left. - \log \sigma_w^2 + 2(d-1) \log I(\omega_k, \omega_l) + 2 \log \left( A_{\alpha, \varphi}(\omega_k, \omega_l) \right) \right\}^2, \end{aligned}$$

où  $\omega_k = (2\pi k)/n$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ . En remplaçant  $\log \sigma_w^2$  et  $d$  dans l'équation précédente par leurs estimées au sens des moindres carrés, on obtient une fonction de  $\alpha$  et  $\varphi$ , qu'il est facile de minimiser à l'aide de méthodes numériques<sup>1</sup>.

Dans la seconde approche, on réalise une estimation complète des paramètres au sens du maximum de vraisemblance. Cette méthode repose sur une approximation de la log-vraisemblance dans le domaine spectral, que nous avons effectuée en exploitant les propriétés asymptotiques du périodogramme (quand  $n \gg 1$ ). Ainsi, la log-vraisemblance

$$\log f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \log(\det \mathbf{R}) - \frac{n^2}{2} \log(2\pi)$$

se ré-écrit (à une constante additive près) :

$$\log f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) \sim -\frac{1}{2} \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} \left[ \frac{P_n(\omega_k, \omega_l)}{\mathcal{S}(\omega_k, \omega_l)} + \log \mathcal{S}(\omega_k, \omega_l) \right] \quad (7)$$

où  $\mathbf{u}$  représente le vecteur de données (de dimensions  $1 \times n^2$ ) et  $\mathbf{R}$  la matrice d'autocorrélation de ce vecteur.

En utilisant la forme de la densité spectrale de puissance, (7) devient :

$$\log f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) \sim$$

<sup>1</sup>Une méthode de simplexe a été employée dans nos simulations.

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} \left[ P_n(\omega_k, \omega_l) I(\omega_k, \omega_l)^{2d-2} A_{\alpha, \varphi}(\omega_k, \omega_l)^2 \right. \\
& \left. + (d-1) \log I(\omega_k, \omega_l) + \log A_{\alpha, \varphi}(\omega_k, \omega_l) \right] - \frac{n^2-1}{2} \log \sigma_w^2.
\end{aligned} \tag{8}$$

En dérivant (8), on obtient une formule explicite pour l'estimée de la variance du bruit générateur du processus :

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma_w^2}(d, \alpha, \varphi) = \frac{1}{n^2-1} \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} P_n(\omega_k, \omega_l) \\
\times I(\omega_k, \omega_l)^{2(d-1)} A_{\alpha, \varphi}(\omega_k, \omega_l)^2
\end{aligned}$$

et les trois autres paramètres à estimer s'obtiennent en minimisant :

$$\begin{aligned}
\log \left[ \widehat{\sigma_w^2}(d, \alpha, \varphi) \right] - \frac{2}{n^2-1} \left[ \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} (d-1) \log I(\omega_k, \omega_l) \right. \\
\left. + \log A_{\alpha, \varphi}(\omega_k, \omega_l) \right].
\end{aligned} \tag{9}$$

On est donc conduit à un problème d'optimisation numérique d'une fonction à trois variables.

Les résultats d'une étude de Monte Carlo portant sur ces deux méthodes sont résumés dans le Tableau 1. Une réalisation du modèle employé dans ces simulations est présentée Figure 1. Il convient de noter que les deux algorithmes fournissent tous deux des résultats très satisfaisants. Ce fait a pu être confirmé par une analyse théorique de leurs performances.

	Val	MC	MV
$\sigma_w^2$	1	0.999 ± 0.015	0.998 ± 0.012
$d$	0.3	0.301 ± 0.009	0.299 ± 0.005
$\alpha$	0.7	0.701 ± 0.012	0.701 ± 0.009
$\varphi$	$\pi/3$	1.050 ± 0.018	1.049 ± 0.012

TAB. 1 — Estimation paramétrique du bGdf pour 100 réalisations. Les valeurs fournies représentent la moyenne ± l'écart type des estimateurs (val = valeurs théoriques, MC = moindres carrés, MV = maximum de vraisemblance).

## 4 Prise en compte d'un bruit de mesure

Dans la pratique, il est important de pouvoir prendre en compte la présence d'un bruit de mesure. Considérons donc l'image observée  $v(n, m)$  comme la somme d'un bGdf  $u(n, m)$  et d'un bruit gaussien centré  $b(n, m)$  indépendant de  $u(n, m)$ . Le modèle se ré-écrit alors sous forme vectorielle :  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{b}$ . Les lois de probabilité du signal et du bruit vont dépendre de paramètres inconnus qu'il faudra estimer. Soit  $\boldsymbol{\theta}^T = (\boldsymbol{\theta}_U^T, \boldsymbol{\theta}_B^T)$  le vecteur global de paramètres, où  $\boldsymbol{\theta}_U$  caractérise le signal et  $\boldsymbol{\theta}_B$  le bruit. Une estimation directe de ces paramètres par maximum de vraisemblance conduirait à un problème d'optimisation assez complexe. Nous avons donc opté pour une approche de type "expectation-maximisation" (EM) [10], où le vecteur d'observations  $\mathbf{v}$  est vu comme le

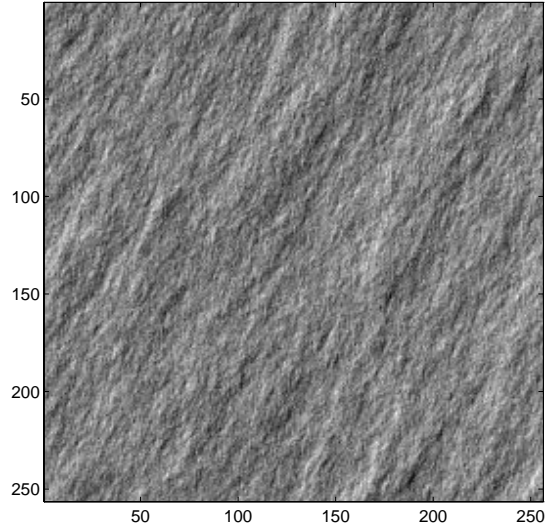


FIG. 1 — Une réalisation de bruit anisotrope ( $\sigma_w^2, d = 0.3, \alpha = 0.7, \varphi/2 = \pi/6$ ).

vecteur de données "incomplètes" et le vecteur de données non bruitées  $\mathbf{u}$  permet de compléter les données.

Le pas "E" consiste à calculer la fonction de coût

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(q)}) = E \{ \log f_{\mathbf{U}, \mathbf{V}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \boldsymbol{\theta}) | \mathbf{V} = \mathbf{v}, \boldsymbol{\theta}^{(q)} \}$$

où  $\boldsymbol{\theta}^{(q)}$  est l'estimé de  $\boldsymbol{\theta}$  à l'iteration  $q$ .

Dans le pas "M", on calcule

$$\boldsymbol{\theta}^{(q+1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^{(q)}).$$

Ces formules nous permettent de transformer le problème initial en deux problèmes d'estimation séparés, l'un pour le bruit et l'autre pour les données non bruitées. En exprimant les espérances et les matrices de corrélation du signal et du bruit conditionnellement aux observations, nous obtenons des expressions similaires au cas non-bruité pour la détermination des vecteurs de paramètres à chaque iteration. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_B^{(q+1)} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}_B} \left[ \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} \frac{M(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}^{(q)})}{\mathcal{S}_B(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}_B)} \right. \\
\left. + \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} \log \mathcal{S}_B(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}_B) \right] \tag{10}
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{S}_B(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}_B)$  est la densité spectrale de puissance du bruit,  $M(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}^{(q)})$  est une quantité jouant le même rôle que le périodogramme dans l'expression (7) et dépend du rapport signal sur bruit.

Le vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\theta}_U^{(q)}$  est déterminé par une expression similaire à (10), où  $\mathcal{S}(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}_U)$  se substitue à  $\mathcal{S}_B(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}_B)$ .

Dans le cas d'un bruit blanc, la densité spectrale de puissance du bruit est  $\mathcal{S}_B(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}_B) = \sigma_B^2$  et le seul paramètre du modèle de bruit à estimer est  $\sigma_B^2$ . Son estimé s'écrit :

$$(\sigma_B^2)^{(q+1)} = \frac{1}{n^2-1} \sum_{(\omega_k, \omega_l) \neq (0,0)} M(\omega_k, \omega_l|\boldsymbol{\theta}^{(q)}). \tag{11}$$

On a, de même, une formule explicite pour estimer la variance du bruit générateur connaissant  $d$ ,  $\alpha$  et  $\varphi$ . Les paramètres  $d$ ,  $\alpha$  et  $\varphi$  s'obtiennent alors en minimisant une fonction du type (9).

Les résultats d'une étude de Monte Carlo sont présentés dans le Tableau 2. La méthode de moindres carrés ne donne plus de résultats satisfaisants au niveau de bruit considéré, alors que l'algorithme EM estime correctement les paramètres du modèle.

	Val	MC	EM
$\sigma_w^2$	1	$2.119 \pm 0.027$	$0.934 \pm 0.027$
$d$	0.3	$0.2219 \pm 0.007$	$0.304 \pm 0.007$
$\alpha$	0.7	$0.502 \pm 0.017$	$0.714 \pm 0.016$
$\varphi$	$\pi/3$	$1.099 \pm 0.026$	$1.044 \pm 0.023$
$\sigma_B^2$	1	$3.542 \pm 0.010$	$1.051 \pm 0.028$

TAB. 2 — Comparaison des méthodes de moindres carrés (MC) et EM pour l'estimation paramétrique du modèle bruité.

- [7] C. Henegan, S.B. Lowen, M.C. Teich, *Two-dimensional Fractional Brownian Motions : Wavelet Analysis and Synthesis*, postprint
- [8] S. Hofer, F. Heil, M. Pandit, R. Kumaresan, *Segmentation of Textures with Different Roughness Using the Model of Isotropic Two-Dimensional Fractional Brownian Motion*, Proc. Int. Conf. Imag. Proc., vol.5, pp. 53-56, Philadelphia, 25-28 Oct. 1994
- [9] L.M. Kaplan, C.C.J. Kuo, *An Improved Method for 2D Self-Similar Image Synthesis*, IEEE Tran. on Image Processing, vol. 5, No. 5, May 1995, pp. 754-760
- [10] T. K. Moon, *The Expectation-Maximization Algorithm*, IEEE Signal Processing Magazine, Nov. 1996, pp. 47-60

## 5 Conclusion

Nous avons proposé un modèle paramétrique discret de processus stationnaire 2D anisotrope à longue dépendance. Deux estimateurs (au sens de moindres carrés ou du maximum de vraisemblance) de ces paramètres ont été développés, qui fournissent d'excellents résultats en l'absence (ou à faible niveau) de bruit. Dans le cas où le bruit de mesure n'est plus négligeable, l'algorithme EM permet de retrouver les paramètres du modèle.

## Références

- [1] J.R.M. Hosking, *Fractional differencing*, Biometrika, Vol. 68, No. 1, pp. 165-176, 1981
- [2] P.J. Brockwell, R. A. Davis, *Time Series : Theory and Methods*, New York : Springer-Verlag, 1995
- [3] M. Deriche, A. Tewfik, *Signal Modeling with Filtered Discrete Fractional Noise Processes*, IEEE Tran. on Signal Processing, vol.41, No. 9, Sept. 1993, pp. 2839-2849
- [4] G. Wornell, *Signal Processing with Fractals : a Wavelet Based Approach*, Prentice Hall, 1996
- [5] F. Peyrin, L. Ratton, N. Zegadi, S. Mouhamed, Yi Ding, *Evaluation of the Fractal Dimension of an Image Using the Wavelet Transform : Comparison with a Standard Method*, Proc. Int. Conf. Imag. Proc., vol.1, pp. 244-247, Philadelphia, 25-28 Oct. 1994
- [6] I.S. Reed, P.C. Lee, T.K. Truong, *Spectral Representation of Fractional Brownian Motion in n Dimensions and its Properties*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol.41, No.5, Sept.1995