

# La Polarisation dans les Méthodes à Haute Résolution

Yide WANG et Joseph SAILLARD

Laboratoire Systèmes Electroniques et Informatiques EP-CNRS63  
IRESTE, Rue Christian PAUC, La Chantrerie, BP60601  
44306 Nantes Cedex 3, France

## RÉSUMÉ

Dans cet article, on se propose de généraliser la méthode MUSIC à la diversité de polarisation. La méthode proposée permet d'exploiter pleinement l'information contenue dans les signaux vectoriels, tout en gardant un temps de calcul raisonnable.

## ABSTRACT

We propose a high resolution method with polarization diversity which makes use of all the information available in the received vectorial signal optimally, the calculation time of the proposed method is comparable to the scalar HR method.

## 1 Introduction

Un radar à diversité de fréquence et à diversité de polarisation est considéré dans notre étude. La cible est modélisée par un ensemble de points brillants indépendants et isotropes. La classification d'une telle cible revient donc à estimer les caractéristiques des contributeurs élémentaires, notamment les distances entre ces contributeurs, les amplitudes et les polarisations associées à partir des signaux reçus.

Ce problème peut se ramener à une estimation des composantes sinusoïdales dans du bruit blanc additif, sachant que les fréquences estimées correspondent aux distances entre les points brillants, les amplitudes donnent des informations sur la section efficace radar du contributeur et les polarisations apportent une aide pour déterminer la géométrie de la cible radar.

Une méthode classique est la transformée de Fourier [1] limitée par son pouvoir de résolution. Différentes méthodes à haute résolution (HR), [2], [3], ont été proposées afin de s'affranchir de ce problème. Mais, la plupart de ces méthodes ignorent l'aspect de polarisation des signaux reçus, ce paramètre est pourtant riche d'informations.

La méthode proposée dans [4] est basée sur le principe de la méthode Prony en incorporant l'information de la polarisation des signaux reçus, elle a été généralisée dans [6] à la méthode MUSIC. Ces deux méthodes séparent l'estimation des fréquences (distances) de l'estimation des amplitudes et des polarisations associées. Les premières sont d'abord estimées à l'aide d'une méthode d'analyse spectrale HR, ensuite les secondes sont estimées en se basant sur le principe de la méthode des moindres carrés. Mais ces méthodes ne bénéficient pas pleinement de l'information apportée par la polarisation des signaux reçus, car elles considèrent que le signal reçu par la voie horizontale et celui reçu par la voie verticale sont de même importance, par conséquent elles ne cherchent pas à optimiser cette information.

Nous proposons une méthode qui permet d'optimiser cette

information. Contrairement aux méthodes proposées dans [4, 6], cette méthode permet aussi en une seule étape d'estimer conjointement les fréquences (distances), les amplitudes des points brillants et les polarisations associées, d'où un gain de temps de calcul appréciable.

Nous commençons par une formulation du problème, et par un bref rappel sur la caractérisation polarimétrique d'une cible radar, nous présentons ensuite la nouvelle méthode HR à diversité de polarisation, des résultats de simulation sont également fournis afin d'obtenir une idée sur la performance de la méthode proposée. Puis nous concluons.

## 2 Formulation du problème

Considérons une cible radar composée de  $m$  contributeurs élémentaires indépendants et isotropes, notons la polarisation de l'onde émise par  $q$  et la polarisation de l'onde reçue par  $p$ . Si la cible est éclairée par une onde électromagnétique de fréquence  $f$ , le coefficient complexe de rétrodiffusion de la cible peut s'exprimer par :

$$s_{pq}(f) = \sum_{i=1}^m b_{pqi} e^{j\frac{4\pi}{c} R_i f}$$

où  $b_{pqi}$  représente l'amplitude complexe du  $i^{\text{ième}}$  point brillant et  $R_i$  la distance projetée du  $i^{\text{ième}}$  point brillant sur la direction radar-cible.

Pour un radar à diversité de fréquence, on émet une suite de  $N$  exponentielles pures :  $e^{j2\pi f_n t}$  avec  $f_n = f_0 + n\Delta f$ , et  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Ainsi pour la  $n^{\text{ième}}$  fréquence :

$$s_{pq}(n) = \sum_{i=1}^m b_{pqi} e^{j\frac{4\pi}{c} R_i f_n} = \sum_{i=1}^m a_{pqi} e^{j2\pi \left(\frac{2\Delta f}{c} R_i\right) n} \quad (1)$$

le signal reçu  $s_{pq}(n)$  peut alors être considéré comme l'échantillon à l'instant  $n$  d'un signal composé d'une somme de  $m$  sinusoïdes ayant pour fréquences propres  $\frac{2\Delta f}{c} R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), la fréquence d'échantillonnage étant normalisée à 1. Pour que la condition de Shannon soit respectée, il faut

$\left| \frac{2\partial f}{c} R_i \right| \leq 1/2$ , ce qui donne la formule classique de la distance d'ambiguïté :

$$R_a = |2R_i|_{\max} \leq \frac{c}{2\partial f}$$

alors le signal reçu (1) peut être réécrit en fonction de la distance d'ambiguïté :

$$s_{pq}(n) = \sum_{i=1}^m a_{pqi} e^{j2\pi \left(\frac{R_i}{R_a}\right)n} = \sum_{i=1}^m a_{pqi} e^{j2\pi f_i n}$$

donc, le signal vectoriel reçu par le radar s'écrit :

$$\begin{bmatrix} s_{hh}(n) \\ s_{hv}(n) \\ s_{vv}(n) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} a_{hh_i}(n) \\ a_{hv_i}(n) \\ a_{vv_i}(n) \end{bmatrix} e^{j2\pi f_i n} \quad (2)$$

où  $f_i$  est la fréquence normalisée, sa valeur étant limitée à 0.5 ; le vecteur du signal reçu est entaché d'un bruit additif, que l'on supposera blanc gaussien complexe.

### 3 Caractérisation polarimétrique

La matrice de rétrodiffusion relie la polarisation de l'onde incidente à celle de l'onde rétrodiffusée, elle permet de caractériser complètement le comportement polarimétrique d'une cible radar. Elle peut être obtenue en estimant la polarisation de l'onde reçue pour deux ondes incidentes de polarisation orthogonale. Le point pertinent est d'estimer sans biais la polarisation de l'onde reçue pour une onde incidente de polarisation quelconque. A titre d'exemple, nous prenons comme état de polarisation de l'onde émise une onde circulaire gauche comme dans [4], tout autre état de polarisation est néanmoins possible.

Dans le domaine fréquentiel, les signaux reçus sur les voies horizontale et verticale pour une onde incidente de polarisation circulaire gauche peuvent être écrits :

$$\begin{bmatrix} s_{hg}(n) \\ s_{vg}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{hh}(n) & s_{hv}(n) \\ s_{vh}(n) & s_{vv}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

D'après (2), le vecteur des signaux reçus (3) peut être modélisé par :

$$\begin{bmatrix} s_{hg}(n) \\ s_{vg}(n) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} a_{h_i} \\ a_{v_i} \end{bmatrix} e^{j2\pi f_i n} \quad (4)$$

où  $a_{h_i}$  et  $a_{v_i}$  associées avec la fréquence normalisée  $f_i$  contiennent les informations polarimétriques concernant le  $i^{\text{ème}}$  point brillant.

La polarisation d'une onde peut être représentée par l'ellipse de polarisation caractérisée essentiellement par l'angle d'ellipticité  $\tau_i$  ( $|\tau_i| \leq \pi/4$ ) et l'angle d'orientation  $\phi_i$  ( $0 \leq \phi_i < \pi$ ). Ces deux paramètres peuvent être calculés en fonction des amplitudes horizontale et verticale des signaux reçus par les formules suivantes [4] :

$$\gamma_i = \arctan \left[ \frac{|a_{v_i}|}{|a_{h_i}|} \right]$$

$$\delta_i = \arg(a_{v_i}) - \arg(a_{h_i})$$

$$\tau_i = \frac{1}{2} \arcsin [\sin(2\gamma_i) \sin(\delta_i)]$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \arctan [\tan(2\gamma_i) \cos(\delta_i)]$$

$$\phi_i = \begin{cases} \alpha_i + \frac{\pi}{2} & \text{si } \gamma_i > \frac{\pi}{4} \\ \alpha_i + \pi & \text{si } \gamma_i \leq \frac{\pi}{4} \text{ et } \alpha_i < 0 \end{cases}$$

L'axe majeur de l'ellipse peut être calculé par :

$$A_i = \left| |a_{h_i}| \cos(\phi_i) + |a_{v_i}| \exp(j\delta_i) \sin(\phi_i) \right|$$

### 4 Méthodes à haute résolution

Supposons que l'on dispose de  $N$  échantillons du vecteur des signaux reçus 4, et considérons les deux matrices de données construites de la façon suivante :

$$\mathbf{S}_h = \begin{bmatrix} s_{hg}(0) & s_{hg}(1) & \cdots & s_{hg}(N-p) \\ s_{hg}(1) & s_{hg}(2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{hg}(p-1) & & & s_{hg}(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} s_{vg}(0) & s_{vg}(1) & \cdots & s_{vg}(N-p) \\ s_{vg}(1) & s_{vg}(2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{vg}(p-1) & & & s_{vg}(N-1) \end{bmatrix}$$

Il est connu que si les dimensions de la matrice  $\mathbf{S}_h$  ou bien  $\mathbf{S}_v$  sont supérieures au nombre de points brillants,  $\mathbf{S}_h$  et  $\mathbf{S}_v$  sont déficientes, le principe des méthodes HR peut être appliqué sur chacune de ces deux matrices. Mais ces méthodes ne sont pas optimales, car elles ignorent que les deux matrices sont construites à partir de données issues des mêmes contributeurs. Par exemple  $\mathbf{S}_h$  ne permet pas de détecter les signaux liés à l'état de polarisation verticale. Une des manières permettant de prendre en compte simultanément les signaux reçus sur les deux voies est proposée dans [4, 6], il s'agit de construire une matrice  $\mathbf{S1}$  composée de  $\mathbf{S}_h$  et  $\mathbf{S}_v$  :

$$\mathbf{S1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_h & \mathbf{S}_v \end{bmatrix}$$

Il est clair que la matrice  $\mathbf{S1}$  ainsi construite est déficiente comme les matrices  $\mathbf{S}_h$  et  $\mathbf{S}_v$ . Donc les méthodes HR s'appliquent sur  $\mathbf{S1}$ . Dans [4], les auteurs, en choisissant la dimension de la matrice  $p = m + 1$ , ont généralisé la méthode Prony sur la matrice  $\mathbf{S1}$ . Et dans [6], le principe de la méthode MUSIC a été généralisé sur la matrice  $\mathbf{S1}$ .

Les défauts majeurs de ces méthodes résident dans le fait que les signaux reçus sur les deux voies de polarisation sont considérés de même importance, elles ne sont donc pas optimales.

Afin d'exploiter pleinement l'information contenue dans  $\mathbf{S}_h$  et  $\mathbf{S}_v$ , nous proposons d'utiliser la matrice  $\mathbf{S}$  construite de la façon suivante :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_h \\ \mathbf{S}_v \end{bmatrix}$$

D'après la structure des matrices  $\mathbf{S}_h$  et  $\mathbf{S}_v$  et celle des signaux reçus (4), on peut factoriser  $\mathbf{S}$  par :

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_{2p}(a_{h_i}, a_{v_i}, f_i) \mathbf{d}_{n_1}^T(f_i)$$

avec  $\mathbf{g}_{2p}(a_{h_i}, a_{v_i}, f_i)$ ,  $\mathbf{d}_{n_1}(f_i)$  deux vecteurs de dimensions  $2p$  et  $n_1 = N - p + 1$  respectivement :

$$\mathbf{d}_{n_1}(f_i) = \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi f_i} & \dots & e^{j2\pi(n_1-1)f_i} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{g}_{2p} = \begin{bmatrix} a_{h_i} \mathbf{d}_p^T(f_i) & a_{v_i} \mathbf{d}_p^T(f_i) \end{bmatrix}^T$$

On peut montrer que si  $p > m$  et  $n_1 > m$ , la matrice  $\mathbf{S}$  est de rang déficient. Si en plus  $f_i \neq f_j, \forall i \neq j$ , et  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , le rang de la matrice  $\mathbf{S}$  est égal au nombre de points brillants  $m$ . Par conséquent, le principe des méthodes HR s'applique sur la matrice  $\mathbf{S}$ , avec le vecteur directionnel défini par  $\mathbf{g}_{2p}(a_h, a_v, f)$ .

Notons  $\mathbf{U}_1$  la matrice de dimension  $(2p, m)$  constituée par les vecteurs singuliers gauches associés aux  $m$  plus grandes valeurs singulières et  $\mathbf{U}_2$  la matrice de dimension  $(2p, 2p-m)$  constituée par les autres vecteurs singuliers gauches de la matrice  $\mathbf{S}$ . Le principe des méthodes HR, [2], [3] est basé sur le fait que l'ensemble des  $m$  vecteurs  $\mathbf{g}_{2p}(a_{h_i}, a_{v_i}, f_i), i = 1, 2, \dots, m$  engendre le même espace que celui engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{U}_1$ , appelé espace signal ; et est par conséquent orthogonal à l'espace engendré par les colonnes de la matrice  $\mathbf{U}_2$ , appelé espace bruit ou bien espace complémentaire. Notons le projecteur de l'espace complémentaire par  $\Pi_b = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H$ . Les paramètres intéressants peuvent être estimés en minimisant la projection du vecteur directionnel sur l'espace complémentaire :

$$\min_{a_h, a_v, f} \frac{\mathbf{g}_{2p}^H(a_h, a_v, f) \Pi_b \mathbf{g}_{2p}(a_h, a_v, f)}{\mathbf{g}_{2p}^H(a_h, a_v, f) \mathbf{g}_{2p}(a_h, a_v, f)} \quad (5)$$

Il s'agit d'une recherche dans l'espace tri-dimensionnel, trop coûteuse en temps de calcul, et difficilement utilisable en pratique. Heureusement, grâce à la structure du vecteur directionnel, nous pouvons rendre ce problème de minimisation beaucoup plus rapide. Réécrivons la structure du vecteur  $\mathbf{g}_{2p}(a_h, a_v, f)$  :

$$\mathbf{g}_{2p} = \begin{bmatrix} a_h \mathbf{d}_p(f) \\ a_v \mathbf{d}_p(f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_p & \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{d}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_h \\ a_v \end{bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{a}$$

avec  $\mathbf{D}$  une matrice de dimension  $(2p, 2)$  qui contient l'information des fréquences et  $\mathbf{a}$  un vecteur de dimension 2 contenant l'information de polarisation.

Donc la minimisation (5) peut être reformulée de la manière suivante :

$$\min_{f, \mathbf{a}} \frac{\mathbf{a}^H \mathbf{D}^H \Pi_b \mathbf{D} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{D}^H \mathbf{D} \mathbf{a}} = \min_f \left[ \min_{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{a}^H \mathbf{D}^H \Pi_b \mathbf{D} \mathbf{a}}{p \mathbf{a}^H \mathbf{a}} \right]$$

Or, la minimisation entre les crochets (par rapport au vecteur  $\mathbf{a}$ ) est donnée par la valeur propre minimale de la matrice  $\mathbf{D}^H \Pi_b \mathbf{D}$ . Comme cette matrice est de dimension  $(2, 2)$ , sa valeur propre minimale peut être calculée analytiquement, évitant alors la recherche des minima dans l'espace de polarisation ; la minimisation à trois dimensions (5) est ainsi réduite à

une seule dimension, d'où un gain important en temps de calcul. Les fréquences peuvent être estimées comme celles qui minimisent la valeur propre minimale de la matrice  $\mathbf{D}^H \Pi_b \mathbf{D}$  ; et le vecteur propre correspondant fournit une estimation sur les paramètres de polarisation correspondant.

Cette méthode efficace permet d'exploiter pleinement l'aspect vectoriel des signaux reçus, tout en conservant un temps de calcul comparable à un problème scalaire. Cette méthode permet d'estimer les fréquences et les paramètres de polarisation en une seule étape, contrairement aux méthodes proposées dans [4] et [6], pour lesquelles ces estimations sont effectuées en deux étapes distinctes. Dans la suite, nous donnons quelques résultats de simulation permettant de se faire une idée sur les performances de cette méthode.

## 5 Simulation

Le modèle proposé dans [4] est adopté dans la simulation. La cible est modélisée par 4 points brillants dont les distances par rapport au centre de référence sont : 8cm, 12cm, 13.3cm et 14cm, et les matrices de rétrodiffusion correspondantes

$$\text{sont } \begin{bmatrix} a_{hh} & a_{hv} \\ a_{vh} & a_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 10 \begin{bmatrix} \cos^2 10 & \frac{\sin^2 20}{2} \\ \frac{\sin^2 20}{2} & \sin^2 10 \end{bmatrix},$$

$$2 \begin{bmatrix} \cos^2 10 & \frac{\sin^2 20}{2} \\ \frac{\sin^2 20}{2} & \sin^2 10 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} \sin^2 10 & -\frac{\sin^2 20}{2} \\ -\frac{\sin^2 20}{2} & \cos^2 10 \end{bmatrix}.$$

Le radar émet des impulsions dont la porteuse varie de 2GHz à 18GHz avec un pas de 50MHz, qui correspond à une distance d'ambiguïté de 3m, et à un total de 320 fréquences discrètes. Afin de ramener la distance d'ambiguïté de radar proche de la dimension de cible et d'améliorer le pouvoir de résolution [5], une décimation d'un facteur de 10 a été effectuée, qui donne une distance d'ambiguïté de 30cm, le nombre de fréquences retenues étant alors 32. Un calcul rapide nous permet de trouver les fréquences normalisées pour les 4 points brillants : 0,267, 0,4, 0,443 et 0,467.

Sur la figure 1, nous présentons la méthode MUSIC version scalaire appliquée au signal reçu sur la voie horizontale, le SNR est pris égal à 20dB, les deux fréquences les plus proches sont bien séparées. Mais, cette méthode n'est pas optimale, car l'aspect vectoriel du signal reçu n'est pas pris en compte. La méthode ne peut plus séparer les points brillants les plus proches si le SNR devient à 10dB, comme le montre la figure 2.

Nous appliquons la méthode proposée sur le même signal que précédemment, le résultat est montré à la figure 3, les deux points brillants les plus proches sont correctement séparés. La méthode proposée permet de séparer les deux fréquences les plus proches même si le SNR vaut 3dB, comme le montre la figure 4. La méthode proposée est appliquée pour SNR = 10dB sur 50 tirages de bruit indépendants, nous donnons les résultats de l'estimation du troisième point brillant qui est le plus difficile à estimer parmi les 4 points brillants dans le tableau suivant :

	$\phi$ (deg)	$\tau$ (deg)	$d$ (cm)
<b>Valeur vraie</b>	10	0.00	13.3
<b>Valeur estimée</b>	10.22	-0.42	13.296
<b>Ecart Type</b>	2.68	2.51	0.068

Il est clair que la méthode proposée possède une performance satisfaisante aussi bien pour l'estimation de la fréquence que pour l'estimation des paramètres de polarisation des signaux reçus.

## 6 Conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé une généralisation des méthodes à haute résolution à la diversité de polarisation des signaux reçus. Une méthode a été proposée permettant d'exploiter pleinement les informations contenues dans les signaux reçus sur deux voies de polarisation orthogonale, tout en gardant un temps de calcul comparable à une méthode scalaire délaissant l'aspect de polarisation des signaux reçus. Cette méthode permet d'estimer en une seule étape les distances entre les points brillants et les paramètres de polarisation des signaux correspondants, d'où un gain de temps de calcul, par rapport aux méthodes traitant les deux estimations séparément [4, 6]. Les résultats de simulation sont très satisfaisants.

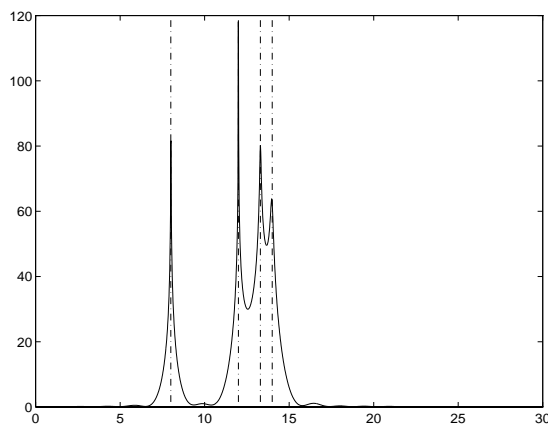


FIG. 1 — Figure 1 : MUSIC scalaire SNR=20dB

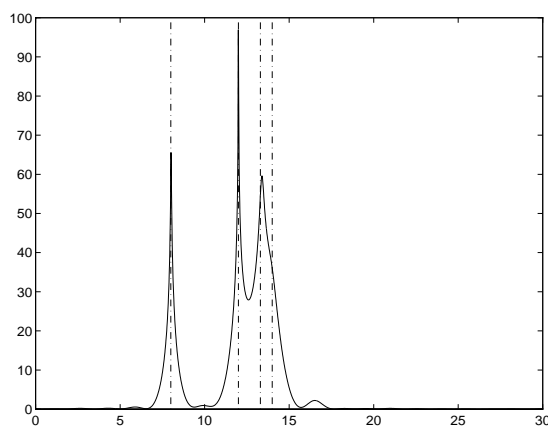


FIG. 2 — Figure 2 : MUSIC scalaire SNR=10dB

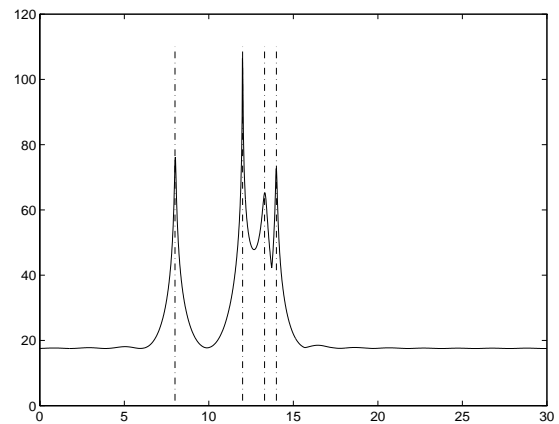


FIG. 3 — Figure 3 : MUSIC vectorielle SNR=10dB

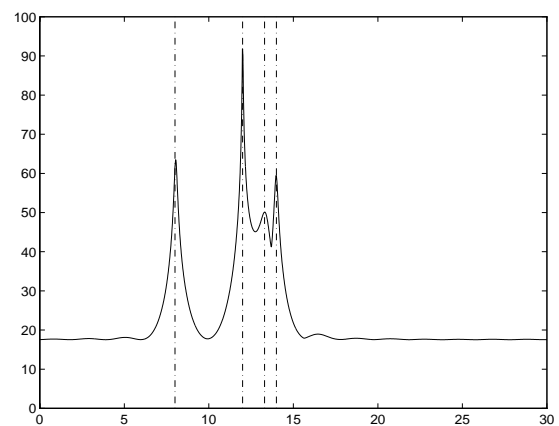


FIG. 4 — Figure 4 : MUSIC vectorielle SNR=3dB

## Références

- [1] N. F. Chamberlain, E. K. Walton and F. D. Garber : «Radar Target Identification of Aircraft Using Polarization Diverse Features», IEEE Trans. on AES, Vol.27, No.1, pp. 58-66, Jan., 1991.
- [2] G. Bienvenu and L. Kopp : "Optimality of High-Resolution Array Processing Using the Eigenstructure Approach". IEEE Trans. on ASSP, Vol.31, pp.1235-1248, October, 1983.
- [3] R.Kumaresan, D.Tufts : «Estimation the Angles of Arrival of Multiple Plane Waves», IEEE Trans. on AES, Vol.19, No.1, pp. 134-139, Jan., 1983.
- [4] W. M. Steedly and R. L. Moses : «High Resolution Exponential Modeling of Fully Polarized Radar Returns», IEEE Trans. on AES, Vol.27, No.3, pp. 459-468, May, 1991.
- [5] Y. Wang and J. Saillard : «Application des Méthodes à Haute Résolution dans la Discrimination des Contributeurs Elémentaires d'une Cible Radar», GRETI93, pp. 1151-1154, Nice, Septembre, 1993.
- [6] Y. Wang and J. Saillard : «Polarimetric High Resolution Methods», JIPR95 (Troisièmes Journées Internationales de la Polarimétrie Radar), pp. 480-491, Nantes, Mars, 1995.